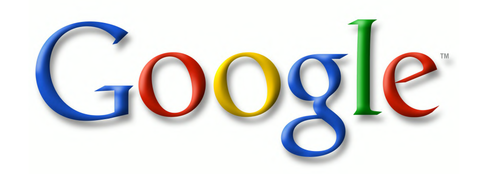


GRUNDLEHREN DER MATHEMATISCHEN
ENSCHAFTEN IN EINZELDARSTELLUNGEN
BAND III

HURWITZ-COURANT

FUNKTIONENTHEORIE

ERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN







DIE GRUNDLEHREN DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE
HAMBURG

M. BORN
GÖTTINGEN

C. RUNGE
GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

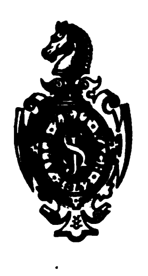
R. COURANT
GÖTTINGEN

BAND III

FUNKTIONENTHEORIE

VON

A. HURWITZ-R. COURANT



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1922

VORLESUNGEN ÜBER

ALLGEMEINE FUNKTIONENTHEORIE UND ELLIPTISCHE FUNKTIONEN

VON

ADOLF HURWITZ
WEIL. ORD. PROF. DER MATHEMATIK AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNIKUM ZÜRICH

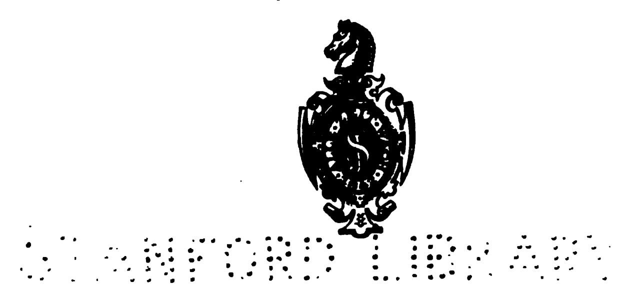
HERAUSGEGEBEN UND ERGÄNZT DURCH EINEN ABSCHNITT ÜBER

GEOMETRISCHE FUNKTIONENTHEORIE

VON

R. COURANT
ORD. PROF. DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

MIT 122 TEXTFIGUREN



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1922

Vorwort.

Es bedarf kaum eines Wortes der Rechtfertigung, wenn neben den schon vorhandenen funktionentheoretischen Lehrbüchern nunmehr die Vorlesungen von *Adolf Hurwitz* über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen erscheinen. Der Verstorbene, der in seltener Weise die Eigenschaften des großen Forschers mit denen des akademischen Lehrers verband, pflegte seine Vorlesungen auf die sorgfältigste Weise, auch in äußerlich abgerundeter Form, schriftlich niederzulegen. So war es bei der Herausgabe möglich, fast durchweg wörtlich das *Hurwitz*sche Manuskript zu benutzen und, abgesehen von den letzten Kapiteln aus der Theorie der elliptischen Funktionen, von größeren Ergänzungen und Berichtigungen abzusehen; auch wo solche Ergänzungen nötig waren, konnten alte Ausarbeitungen *Hurwitz*scher Vorlesungen zugrunde gelegt werden. Die trotz alledem nicht geringe Mühe der genauen Prüfung und Ergänzung des Manuskriptes hat zum großen Teil mein Kollege und Freund *Carl Ludwig Siegel* auf sich genommen und dadurch die Herausgabe überhaupt erst ermöglicht.

Der Raumersparnis halber wurde auf den Abdruck eines einleitenden Abschnittes über die Theorie der reellen Zahlen und Funktionen verzichtet, was trotz aller Bedenken um so eher geschehen konnte, als jetzt über diesen Gegenstand sehr zahlreiche und allen Bedürfnissen Rechnung tragende Darstellungen vorliegen. Demgemäß behandelt der erste Abschnitt sogleich die allgemeine Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen. Der Aufbau dieser Theorie wird im Geiste der *Weierstraß*schen Ideenbildungen auf arithmetischer Grundlage konsequent vollzogen. Im zweiten Abschnitt wird, ebenfalls von *Weierstraß*schen Gesichtspunkten aus, eine knappe, aber recht vollständige und übersichtliche Einführung in die Theorie der elliptischen Funktionen gegeben.

Bei aller inneren Konsequenz des so errichteten Gebäudes kann der Lernende sich heute mit den Gesichtspunkten der *Weierstraß*schen Theorie allein nicht mehr begnügen. Hieraus ergab sich der Plan, in einem selbständigen Anhang eine Einführung in den *Riemann*schen geometrisch-funktionentheoretischen Gedankenkreis zu geben. Vielleicht ist der so entstandene dritte Abschnitt etwas umfangreicher

geworden, als es der ursprünglichen Absicht entsprach. Ich hoffe aber, damit eine wirkliche Lücke in der Literatur ausgefüllt zu haben, indem ich versuchte, die Darstellung über die elementaren Teile hinaus bis tief in die Problemstellungen der modernen geometrischen Funktionentheorie zu führen. Dabei habe ich, vielfach an eigene und fremde Arbeiten anknüpfend, zum Teil auch mit neuen Wendungen, den Gedanken des *Dirichlet*schen Prinzipes in den Mittelpunkt gestellt. Wie weit meine subjektive Überzeugung, daß auf diese Art der einfachste Zugang zu dem umfassenden Problemkreis gewonnen ist, auch objektive Berechtigung besitzt, kann nur die Aufnahme dieser Darstellung beim Publikum erweisen..

Das vorliegende Buch als Ganzes gibt, aus drei verhältnismäßig selbständigen und für sich allein lesbaren Abschnitten bestehend, einen einführenden Überblick über die meisten wichtigen funktionentheoretischen Gedankenreihen, die hier zwar nicht wie in anderen modernen Darstellungen (z. B. der von *Bieberbach*) ausdrücklich miteinander verschmolzen erscheinen, deren Zusammenhänge aber doch wohl hinreichend klar hervortreten dürften. Daß in den Schlußkapiteln etwas höhere Anforderungen an das Selbstdenken des Lesers gestellt werden als in den ersten Abschnitten, entspricht der Natur der Sache und ist wohl auch vom pädagogischen Standpunkte aus nicht unzweckmäßig. Ich habe hier zur Erleichterung der Übersicht in der etwas knappen Darstellung von dem typographischen Hilfsmittel des Fettdruckes mehr Gebrauch gemacht als in den vorangehenden Teilen des Buches. Auch sonst wird der Leser manche Ungleichmäßigkeiten im Äußeren des Buches bemerken, die ich mit der Entstehungsgeschichte des Ganzen zu entschuldigen bitte. — Dem Anfänger, der dieses Buch zum Selbststudium benutzen will, mag empfohlen werden, zugleich mit dem ersten Abschnitt die ersten vier Kapitel des dritten zu lesen.

Bei der Korrektur und der Anfertigung des Registers haben Kollegen *Siegel* und mir die Herren *Bessel-Hagen*, *Bieberbach*, *Grandjot*, *Artin*, *Emersleben*, *Hellinger*, *H. Kneser*, *Mettler* und *Rogosinski* geholfen. Ihnen allen, besonders den drei erstgenannten, von denen viele Ratschläge und Verbesserungen herrühren, sage ich herzlichen Dank.

Ebensolcher Dank gebührt auch der Verlagsbuchhandlung, welche in großzügiger Weise allen Wünschen entgegenkam und bei dem vorliegenden Buche trotz aller Schwierigkeiten der Zeit aufs neue ihren Unternehmungsgeist bewährt hat.

Göttingen, im Juni 1922.

R. Courant.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

1. Kapitel.

Die komplexen Zahlen.

2. Kapitel.

Die Potenzreihen.

3. Kapitel.

Der Begriff der analytischen Funktion.

4. Kapitel.

Untersuchung einiger spezieller analytischer Funktionen.

5. Kapitel.

Die Integration analytischer Funktionen.

6. Kapitel.

Die meromorphen Funktionen.

7. Kapitel.

Die Umkehrung der analytischen Funktionen.

Zweiter Abschnitt.

Elliptische Funktionen.

1. Kapitel.

Die doppeltperiodischen meromorphen Funktionen.

2. Kapitel.

Die Theta-Funktionen.

3. Kapitel.

Die elliptischen Funktionen Jacobis.

4. Kapitel.

Die elliptischen Modulfunktionen.

5. Kapitel.

Elliptische Gebilde.

6. Kapitel.

Elliptische Integrale.

7. Kapitel.

Die Transformation der elliptischen Funktionen.

Dritter Abschnitt.

Geometrische Funktionentheorie.

1. Kapitel.

Vorbereitende Betrachtungen.

2. Kapitel.

Die regulären analytischen Funktionen.

3. Kapitel.

Die einfachsten analytischen Funktionen.

4. Kapitel.

Weitere Abbildungen.

5. Kapitel.

Das Riemannsche Abbildungsprinzip und die Existenztheoreme der Funktionentheorie.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

1. Kapitel.

Die komplexen Zahlen.

§ 1. Begriff der komplexen Zahl.

Die Einführung der komplexen Zahlen hat ihren Grund bekanntlich in dem Umstande, daß die Gleichungen zweiten Grades (mit reellen Koeffizienten) in zwei Kategorien zerfallen: in solche mit Lösungen und solche ohne Lösungen. Jedesmal, wenn man in mathematischen Untersuchungen auf die Unmöglichkeit geführt wird, gewissen Aufgaben zu genügen, so versucht man durch eine Erweiterung der fundamentalen Begriffe diese Unmöglichkeit zu beseitigen. So fällt die Unmöglichkeit, gewisse quadratische Gleichungen aufzulösen, fort, wenn wir das Zahlenreich erweitern durch Einführung der komplexen Zahlen. Um die komplexen Zahlen zu definieren, betrachten wir die Gesamtheit aller Zahlenpaare (a, b), welche wir durch die Punkte einer Ebene geometrisch versinnlichen wollen (Fig. 1). Jedem solchen Zahlenpaar ordnen wir das Zeichen

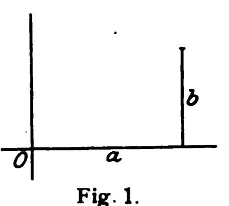


Fig. 1.

$$a + bi$$

zu, in welchem der Buchstabe i zunächst nur als ein reines Symbol anzusehen ist. Wir setzen sogleich fest, daß im Falle $b = 0$ statt $a + 0i$ einfach a geschrieben werden soll, im Fall $a = 0$ statt $0 + bi$ einfach bi und statt $1i$ einfach i. Die allgemeinen Zahlen a, welche wir von jetzt ab reelle Zahlen nennen wollen, sind also als Symbole den Punkten zugeordnet, deren zweite Koordinate Null ist.

Den Symbolen $a + bi$ geben wir nun dadurch den Charakter von Zahlen, daß wir bestimmte Festsetzungen über das Rechnen mit diesen Symbolen treffen. Dementsprechend werden wir von jetzt an die Symbole $a + bi$ als *komplexe Zahlen* bezeichnen. Wir nennen a

den *reellen*, bi den *imaginären* Teil, a und b die *Komponenten* der komplexen Zahl $a + bi$. Die Zahlen bi, deren reeller Teil verschwindet, heißen *rein imaginär*. Endlich heißt die Zahl $1i = i$ die *imaginäre Einheit*.

Die *Addition* der komplexen Zahlen $a + bi$ und $a' + b'i$ definieren wir durch die Gleichung

(I) $$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i.$$

Offenbar genügt die Addition, wie im Gebiete der reellen Zahlen, dem kommutativen und dem assoziativen Gesetze.

Überdies ist die Addition eindeutig umkehrbar, oder, indem wir diese Umkehrung der Addition wieder als *Subtraktion* bezeichnen: die Subtraktion ist stets in eindeutiger Weise ausführbar.

Die *Multiplikation* von $a + bi$ und $a' + b'i$ definieren wir durch die Gleichung

(II) $$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')i.$$

Nehmen wir $a = a' = 0$, $b = b' = 1$, so ist also speziell

(II') $$i \cdot i = i^2 = -1.$$

Ein anderer wichtiger spezieller Fall der Definitionsgleichung (II) ist der folgende:

(II'') $$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Er enthält das Gesetz der Multiplikation zweier „*konjugierter*" Zahlen, worunter wir zwei komplexe Zahlen verstehen, welche dieselben ersten, aber entgegengesetzte zweite Komponenten haben.

Aus der Gleichung (II) ist ersichtlich, daß $(a + bi)(a' + b'i)$ dieselbe Zahl vorstellt, wie $(a' + b'i)(a + bi)$, daß also das *kommutative Gesetz* für die Multiplikation der komplexen Zahlen gilt.

Sind ferner

$$\alpha = a + bi, \quad \alpha' = a' + b'i, \quad \alpha'' = a'' + b''i$$

drei komplexe Zahlen, so ergibt eine leichte Rechnung, daß die beiden Zahlen $(\alpha\alpha')\alpha''$ und $\alpha(\alpha'\alpha'')$ identisch sind, also

$$(\alpha\alpha')\alpha'' = \alpha(\alpha'\alpha'').$$

Es gilt also auch das *assoziative Gesetz* für die Multiplikation. Da die Komponenten des Produktes $(a + bi)(a' + b'i)$ homogene lineare Funktionen von a', b' sind, so gilt ersichtlich die Gleichung

$$\alpha(\alpha' + \alpha'') = \alpha\alpha' + \alpha\alpha''$$

für je drei komplexe Zahlen α, α', α''; d. h. das *distributive Gesetz* ist gültig.

Nach (II) ist ein Produkt zweier komplexer Zahlen Null, wenn ein Faktor Null ist. Aber auch umgekehrt:

Ist ein Produkt Null, so ist notwendig ein Faktor des Produktes Null.

In fact

In der Tat folgt aus

$$(a + bi)(a' + b'i) = 0,$$

daß auch

$$(a - bi)(a' - b'i)(a + bi)(a' + b'i) = 0$$

ist, oder, wegen der Vertauschbarkeit der Faktoren in einem Produkt,

$$(a + bi)(a - bi) \cdot (a' + b'i)(a' - b'i) = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = 0.$$

Daher muß entweder

$$a^2 + b^2 = 0 \quad \text{oder} \quad a'^2 + b'^2 = 0$$

sein. Im ersten Falle ist $a = b = 0$, also der Faktor $a + bi = 0$, im zweiten Falle ist $a' = b' = 0$, also der Faktor $a' + b'i = 0$.

Endlich bemerken wir, daß die *Division*, mit Ausnahme der Division durch Null, eine stets eindeutig ausführbare Operation im Reiche der komplexen Zahlen ist. Denn betrachten wir die Gleichung

$$(1) \qquad (a + bi)x = (a' + b'i),$$

so folgt aus derselben

$$(a^2 + b^2)x = (a - bi)(a' + b'i)$$

und hieraus, wenn $a + bi$ nicht Null ist,

$$x = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - bi)(a' + b'i).$$

Dieser Wert von x befriedigt auch wirklich die Gleichung (1), welche demnach stets eine und nur eine Lösung zuläßt.

Die Gleichungen

$$(a - bi) + (a' - b'i) = (a + a') - (b + b')i,$$
$$(a - bi)(a' - b'i) = (aa' - bb') - (ab' + ba')i$$

zeigen, wenn man sie mit (I) und (II) vergleicht, daß die Summe resp. das Produkt zweier komplexer Zahlen in den konjugierten Wert übergeht, wenn man die Summanden bzw. die Faktoren des Produktes durch ihre konjugierten Werte ersetzt. Oder in anderer Ausdrucksweise: Ordnet man jeder komplexen Zahl ihre konjugierte Zahl als Bild zu, so entsteht dadurch eine Abbildung des Systems aller komplexen Zahlen auf sich selbst von der Eigenschaft, daß Gleichungen von der Form

$$\alpha + \beta = \gamma, \quad \alpha - \beta = \gamma, \quad \alpha\beta = \gamma$$

bestehen bleiben, wenn man die in ihnen vorkommenden Zahlen durch ihre Bilder ersetzt. Daraus folgt dann sofort, daß überhaupt jede Gleichung zwischen komplexen Zahlen, deren beide Seiten durch ausschließliche Anwendung der Operationen der Addition, Subtraktion und Multiplikation gebildet sind, bestehen bleibt, wenn man jede der komplexen Zahlen durch ihre konjugierte Zahl ersetzt.

§ 2. Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen. Sätze über den absoluten Betrag.

Die komplexen Zahlen lassen sich dadurch den Punkten einer Ebene eindeutig umkehrbar zuordnen, daß man der komplexen Zahl

$$\alpha = a + b i$$

den Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten (a, b) entsprechen läßt. Zur Vereinfachung werden wir in der Folge den Punkt, welcher einer komplexen Zahl α entspricht, ebenfalls mit α benennen. Die Ebene, durch deren Punkte wir die komplexen Zahlen repräsentieren, nennen wir die „*komplexe Zahlenebene*". Der Koordinatenanfangspunkt, welcher der Zahl 0 entspricht, heiße der „*Nullpunkt*".

Die Entfernung r des Punktes α vom Nullpunkt ist (Fig. 2)

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a + b i)(a - b i)}.$$

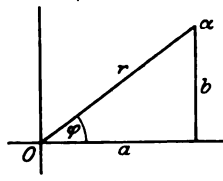


Fig. 2.

Diese Größe wird der *absolute Betrag* der komplexen Zahl α genannt und nach *Weierstraß* mit $|\alpha|$ bezeichnet. Diejenigen Zahlen, welche ein und denselben absoluten Betrag r besitzen, werden offenbar durch die Punkte einer Kreisperipherie mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius r repräsentiert. Die einzige komplexe Zahl, deren absoluter Betrag 0 ist, ist die Zahl 0. Ferner beweisen wir leicht:

Der absolute Betrag der Differenz $\alpha - \alpha'$ ist die Entfernung der beiden Punkte α und α'.

In der Tat, ist $\alpha = a + b i$, $\alpha' = a' + b' i$, so wird

$$\alpha - \alpha' = (a - a') + (b - b') i$$

und folglich

$$|\alpha - \alpha'| = \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2}.$$

Einige weitere wichtige Sätze über die absoluten Beträge erhalten wir durch folgende Betrachtungen.

Bezeichnen wir mit α, β zwei komplexe Zahlen, mit α_0, β_0 die zu ihnen konjugierten Zahlen, so ist

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\alpha_0}, \quad |\beta| = \sqrt{\beta\beta_0}, \quad |\alpha\beta| = \sqrt{(\alpha\beta)(\alpha_0\beta_0)} = \sqrt{\alpha\alpha_0} \cdot \sqrt{\beta\beta_0}$$

und folglich

$$\text{(I)} \qquad |\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

Ersetzen wir hier α durch $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$, so kommt $\left|\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \cdot |\beta|$, und daraus

$$\text{(II)} \qquad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}.$$

Die Gleichung (I) läßt sich leicht auf ein Produkt $\alpha\beta\gamma\ldots\lambda$ von beliebig vielen komplexen Zahlen ausdehnen; für ein solches Produkt gilt

$$|\alpha\beta\gamma\ldots\lambda| = |\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\gamma|\ldots|\lambda| \tag{III}$$

und speziell, wenn alle Faktoren einander gleich angenommen werden,

$$|\alpha^n| = |\alpha|^n. \tag{III'}$$

Wenn wir die Gleichung (I) auf das Produkt

$$(a + b\,i)(a' - b'\,i) = a\,a' + b\,b' - (a\,b' - b\,a')\,i$$

anwenden, so ergibt sich die merkwürdige Identität

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (a\,a' + b\,b')^2 + (a\,b' - b\,a')^2.$$

Aus derselben schließen wir, daß

$$\sqrt{a^2 + b^2}\cdot\sqrt{a'^2 + b'^2} \geqq |a\,a' + b\,b'| \tag{IV}$$

ist, wobei das Gleichheitszeichen nur steht, falls

$$a\,b' - b\,a' = 0, \quad \text{d. h.} \quad a : b = a' : b'$$

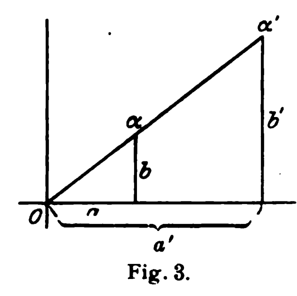


Fig. 3.

Fig. 4.

ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, falls die Punkte

$$\alpha = a + b\,i, \qquad \alpha' = a' + b'\,i$$

mit dem Nullpunkt in einer Geraden liegen (Fig. 3).

Vergleichen wir nun den absoluten Betrag einer Summe

$$|\alpha + \alpha'|$$

mit den absoluten Beträgen der Summanden $|\alpha|$ und $|\alpha'|$.

Es sei $\alpha = a + b\,i$, $\alpha' = a' + b'\,i$, dann ist

$$\begin{aligned} |\alpha + \alpha'|^2 &= (a + a')^2 + (b + b')^2 \\ &= (a^2 + b^2) + (a'^2 + b'^2) + 2\,(a\,a' + b\,b') \end{aligned}$$

und folglich nach (IV)

$$|\alpha + \alpha'|^2 \leqq |\alpha|^2 + |\alpha'|^2 + 2\,|a\,a' + b\,b'| \leqq |\alpha|^2 + |\alpha'|^2 + 2\,|\alpha|\,|\alpha'|$$

und endlich

$$|\alpha + \alpha'| \leqq |\alpha| + |\alpha'|. \tag{V}$$

Diese sehr häufig zu brauchende Ungleichung hat eine einfache geometrische Bedeutung. Betrachten wir nämlich die drei Punkte (Fig. 4)

$$0, \quad \alpha, \quad \alpha + \alpha',$$

so bedeutet $|\alpha + \alpha'|$ die geradlinige Entfernung des Punktes $\alpha + \alpha'$ vom Punkte 0, während $|\alpha|$ die Entfernung des Punktes α vom Punkte 0 und $|\alpha'|$ die Entfernung des Punktes α vom Punkte $\alpha + \alpha'$ bedeutet.

Die Ungleichung (V) sagt also nichts anderes aus, als daß die Summe der beiden letzteren Entfernungen mindestens so groß ist, wie die erstgenannte Entfernung.

Ersetzen wir in (V) die Zahl α durch die Zahl $\alpha - \alpha'$, so kommt

$$|\alpha| \leqq |\alpha - \alpha'| + |\alpha'|$$

und hieraus

$$(V') \qquad |\alpha - \alpha'| \geqq |\alpha| - |\alpha'|.$$

Indem wir $-\alpha'$ für α' schreiben, gewinnt die vorstehende Ungleichung — da $|-\alpha'| = |\alpha'|$ ist — die Gestalt

$$(V'') \qquad |\alpha + \alpha'| \geqq |\alpha| - |\alpha'|.$$

Nach (V) und (V″) liegt also der Wert von $|\alpha + \alpha'|$ stets zwischen den beiden Grenzen $|\alpha| - |\alpha'|$ und $|\alpha| + |\alpha'|$.

Der Winkel φ zwischen der Halbachse der positiven reellen Zahlen und der Richtung vom Nullpunkt zur komplexen Zahl α wird der ***Winkel*** oder die ***Amplitude*** von α genannt und mit $\operatorname{arc} \alpha$ bezeichnet. Offenbar ist (Fig. 2)

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi, \quad \alpha = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Dieser Darstellung von α werden wir noch später begegnen (S. 70).

Wir wollen nun noch kurz die *geometrischen Konstruktionen besprechen, welche der Addition und der Multiplikation der komplexen Zahlen entsprechen.*

Sind α und α' zwei Punkte in der komplexen Zahlenebene, so ist $\frac{\alpha + \alpha'}{2}$ der Mittelpunkt ihrer Verbindungsstrecke. Daraus folgt, daß, wenn

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta'$$

ist, die Punkte α, α', β, β' die Ecken eines Parallelogramms bilden (Fig. 5). Um also aus α, α', β

$$\beta' = \alpha + \alpha' - \beta$$

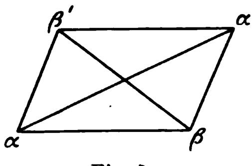


Fig. 5.

zu konstruieren, ergänze man das Dreieck $\beta\alpha\alpha'$ zum Parallelogramm $\beta\alpha\beta'\alpha'$, dann ist die β gegenüberliegende Ecke β' der zu konstruierende Punkt. Wählt man $\beta = 0$, so ist hierin die Konstruktion für die Summe $\alpha + \alpha'$ enthalten, wählt man $\alpha' = 0$, so hat man offenbar die Konstruktion für die Differenz $\alpha - \beta$.

Betrachten wir nun in der komplexen Zahlenebene zwei Dreiecke $\alpha\alpha'\alpha''$ und $\beta\beta'\beta''$ (Fig. 6), so sind dieselben ähnlich, wenn

$$\frac{\alpha'-\alpha}{\alpha''-\alpha}=\frac{\beta'-\beta}{\beta''-\beta}$$

ist. Denn zunächst folgt aus vorstehender Gleichung, indem man beide Seiten um 1 vermindert,

$$\frac{\alpha'-\alpha''}{\alpha''-\alpha}=\frac{\beta'-\beta''}{\beta''-\beta}$$

und indem man zu den absoluten Beträgen übergeht

$$|\alpha'-\alpha|:|\alpha''-\alpha|:|\alpha'-\alpha''|=|\beta'-\beta|:|\beta''-\beta|:|\beta'-\beta''|,$$

d. h. die Seiten des Dreiecks $\alpha\alpha'\alpha''$ sind proportional den Seiten des Dreiecks $\beta\beta'\beta''$. Eine nähere Betrachtung, die wir übergehen, zeigt, daß die beiden Dreiecke $\alpha\alpha'\alpha''$ und $\beta\beta'\beta''$ gleichorientiert sind, d. h. wenn der Punkt α'' zur Linken der Durchlaufungsrichtung $\alpha\alpha'$ liegt, so auch der Punkt β'' zur Linken der Durchlaufungsrichtung $\beta\beta'$, und wenn der Punkt α'' zur Rechten der Durchlaufungsrichtung $\alpha\alpha'$ liegt, so auch der Punkt β'' zur Rechten der Durchlaufungsrichtung $\beta\beta'$.[1])

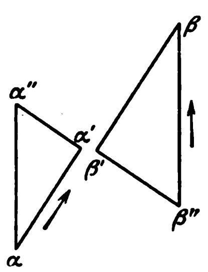


Fig. 6.

Sind fünf der Punkte α, α', α'', β, β', β'', etwa die ersten fünf, gegeben, so kann man hiernach den sechsten

$$\beta''=\beta+(\beta'-\beta)\frac{\alpha''-\alpha}{\alpha'-\alpha}$$

leicht konstruieren. Man hat nur nötig, über $\beta\beta'$ ein Dreieck $\beta\beta'\beta''$ zu errichten, das ähnlich und gleichorientiert mit dem Dreieck $\alpha\alpha'\alpha''$ ist. Nehmen wir speziell

$$\beta=0,\quad \beta'=1,\quad \alpha=0,$$

so erhalten wir eine Konstruktion für den Quotienten $\frac{\alpha''}{\alpha'}$, während der Annahme

$$\beta=0,\quad \alpha=0,\quad \alpha'=1$$

eine Konstruktion für das Produkt $\beta'\alpha''$ entspricht.

---

[1]) Nimmt man an, daß der Punkt i zur Linken der positiven Richtung $\overrightarrow{01}$ der Achse der reellen Zahlen liegt, so liegt α'' zur Linken oder zur Rechten der Durchlaufungsrichtung $\alpha\alpha'$, je nachdem die zweite Komponente des Bruches $\frac{\alpha''-\alpha}{\alpha'-\alpha}$ positiv oder negativ ist.

§ 3. Konvergente Zahlenfolgen. Die Zahlenkugel.

Eine Folge komplexer Zahlen

$$(1) \qquad \alpha_1 = a_1 + b_1 i, \quad \alpha_2 = a_2 + b_2 i, \quad \ldots, \quad \alpha_n = a_n + b_n i, \quad \ldots$$

wollen wir ***konvergent*** nennen, wenn jede der beiden Folgen reeller Zahlen

$$(2) \qquad \begin{cases} a_1, \; a_2, \ldots, a_n, \ldots \\ b_1, \; b_2, \ldots, b_n, \ldots \end{cases}$$

konvergent ist[1]). Es sind dann

$$\lim_{n=\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n=\infty} b_n = b$$

bestimmte endliche Zahlen. Wir nennen $\alpha = a + bi$ die *Grenze* der Zahlenfolge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ und schreiben

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \alpha.$$

Wir wissen, daß für die Konvergenz der Folgen (2) notwendig und hinreichend ist, daß zu jeder beliebig klein vorgeschriebenen positiven Zahl ε der Index n so bestimmbar ist, daß

$$(3) \qquad |a_k - a_h| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |b_k - b_h| < \varepsilon$$

ist, falls nur k und $h > n$ sind.

Hieraus werden wir jetzt den „*Fundamentalsatz der Konvergenz*" für das komplexe Zahlgebiet ableiten:

Die Zahlenfolge

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

ist immer und nur dann konvergent, wenn zu jedem positiven ε der Index n so gewählt werden kann, daß

$$|\alpha_k - \alpha_h| < \varepsilon$$

ist, sobald k und h größer als n sind.

Offenbar ist dies eine notwendige Bedingung; denn aus (3) folgt

$$|\alpha_k - \alpha_h| = \sqrt{(a_k - a_h)^2 + (b_k - b_h)^2} < \sqrt{2} \cdot \varepsilon,$$

und $\sqrt{2} \cdot \varepsilon$ kann ebenso jede beliebige positive Zahl darstellen, wie ε selbst. Die Bedingung ist aber auch hinreichend, denn aus

$$|\alpha_k - \alpha_h| = \sqrt{(a_k - a_h)^2 + (b_k - b_h)^2} < \varepsilon$$

folgt

$$|a_k - a_h| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |b_k - b_h| < \varepsilon,$$

also das Bestehen der Ungleichungen (3).

---

[1]) Definitionen und einfache Tatsachen aus der Theorie der unendlichen Reihen mit reellen Gliedern werden als bekannt vorausgesetzt. Man vergleiche etwa das Lehrbuch von *Knopp*, Unendliche Reihen. (Anmerkung der Herausgeber).

Wir bemerken hier sogleich, daß die Bedingung des Fundamentalsatzes der Konvergenz schon erfüllt ist, wenn nur zu jedem positiven ε der Index n so gewählt werden kann, daß

$$|\alpha_k - \alpha_n| < \varepsilon$$

ist, falls $k > n$ ist. Denn ist letztere Bedingung erfüllt, so können wir zu $\frac{\varepsilon}{2}$ den Index n so bestimmen, daß

$$|\alpha_k - \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\alpha_h - \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, unter k und h zwei beliebige Indizes $> n$ verstanden. Dann ist aber

$$|\alpha_k - \alpha_h| = |(\alpha_k - \alpha_n) + (\alpha_n - \alpha_h)|$$
$$\leqq |\alpha_k - \alpha_n| + |\alpha_h - \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also wirklich die Bedingung des Fundamentalsatzes der Konvergenz erfüllt.

An die Definition der konvergenten Zahlenfolgen knüpfen wir nun noch eine weitere Definition.

Wenn die Zahlenfolge

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

die Eigenschaft hat, daß zu jeder beliebig groß gewählten positiven Zahl G der Index n so bestimmt werden kann, daß

$$|\alpha_k| > G$$

ist, sobald $k > n$ ist, so wollen wir sagen, die Zahlenfolge hat die Grenze unendlich, und wir drücken dies durch die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \infty$$

aus. Um für das hierdurch eingeführte Symbol ∞ ebenfalls eine geometrische Darstellung zu erhalten, stellen wir folgende Überlegung an.

Wir betrachten eine Kugel, deren Mittelpunkt sich senkrecht über dem Nullpunkt der komplexen Zahlenebene befindet, welch letztere wir uns horizontal liegend denken wollen (Fig. 7). Verbinden wir den höchsten Punkt N der Kugel mit dem Punkte α der komplexen Zahlenebene geradlinig, so schneidet die Verbindungsgerade die Kugeloberfläche außer in N noch in einem weiteren Punkte, den wir ebenfalls α nennen wollen. Diese Konstruktion, welche jedem Punkte der Ebene einen bestimmten Punkt der Kugel zuordnet, nennt man „*stereographische Projektion*". Jede komplexe Zahl α findet nun auf diese

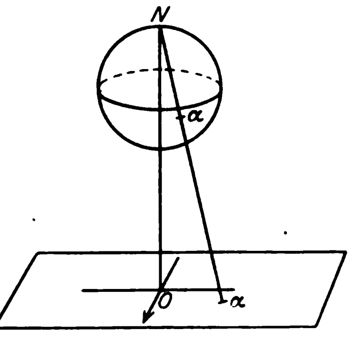


Fig. 7.

Weise einen ihr entsprechenden Punkt α der Kugel. Umgekehrt entspricht, mit Ausnahme des Punktes N, jedem Punkte der Kugel eine bestimmte komplexe Zahl. Und nun wollen wir festsetzen, daß der Punkt N als Repräsentant des Symboles ∞ angesehen werden und dementsprechend „Punkt ∞" heißen soll.

Betrachten wir eine Zahlenfolge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, für die

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \infty$$

ist, so nähern sich die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ der Kugel mit wachsendem Index immer mehr dem Punkte N, während die entsprechenden Punkte der Zahlenebene immer weiter vom Nullpunkt abrücken. Es entspricht also der Punkt N dem unendlich Fernen der Zahlenebene. Deshalb sprechen wir zuweilen kurz vom *„unendlich fernen Punkt"* der Zahlenebene, worunter wir uns dann aber immer den Punkt ∞ der Zahlenkugel vorzustellen haben. (Diese in der Funktionentheorie allgemein adoptierte Auffassung des unendlich Fernen der Ebene als eines „Punktes" steht in charakteristischem Gegensatz zu der Auffassung der projektiven Geometrie, in welcher bekanntlich das unendlich Ferne der Ebene als eine „Gerade" angesehen wird.)

Der Vollständigkeit halber wollen wir hier die Formeln kurz ableiten, die zwischen den Koordinaten eines Punktes (x, y) der Zahlenebene und den Koordinaten (ξ, η, ζ) des entsprechenden Punktes der Zahlenkugel bestehen. Wir nehmen den Nullpunkt der Zahlenebene als Anfangspunkt und lassen die positive Z-Achse mit der Richtung ON zusammenfallen.

Der Radius der Kugel heiße a und die Entfernung ON heiße e. Dann ist die Gleichung, welche ausdrückt, daß der Punkt (ξ, η, ζ) auf der Kugeloberfläche liegt:

$$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - (e - a))^2 = a^2,$$

oder

$$\xi^2 + \eta^2 = 2a(e - \zeta) - (e - \zeta)^2.$$

Liegen nun der Punkt $N(0, 0, e)$, der Punkt (ξ, η, ζ) der Kugel und der Punkt $(x, y, 0)$ der Zahlenebene in einer Geraden, so ist

$$\frac{x-0}{\xi-0} = \frac{y-0}{\eta-0} = \frac{0-e}{\zeta-e},$$

d. h.

$$x = e \cdot \frac{\xi}{e-\zeta}, \qquad y = e \cdot \frac{\eta}{e-\zeta}.$$

Hieraus folgt

$$x^2 + y^2 = e^2 \cdot \frac{\xi^2+\eta^2}{(e-\zeta)^2} = e^2 \cdot \frac{2a-(e-\zeta)}{e-\zeta}.$$

Es drücken sich also x, y und $x^2 + y^2$ durch folgende Formeln vermöge ξ, η, ζ aus:

$$\text{(I)} \qquad x = \frac{e\xi}{e-\zeta}, \quad y = \frac{e\eta}{e-\zeta}, \quad x^2 + y^2 = \frac{2ae^2}{e-\zeta} - e^2.$$

Umgekehrt folgt:

$$\text{(II)} \qquad \xi = \frac{2aex}{x^2+y^2+e^2}, \quad \eta = \frac{2aey}{x^2+y^2+e^2}, \quad \zeta = e - \frac{2ae^2}{x^2+y^2+e^2}.$$

Betrachten wir in der Zahlenebene diejenigen Punkte, welche der Gleichung

$$\text{(4)} \qquad A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

genügen, so bilden dieselben eine Kreisperipherie oder, falls $A = 0$ ist, eine Gerade. Der Kürze halber werden wir jede Gerade in der komplexen Zahlenebene auch als „Kreis" (mit unendlichem Radius) bezeichnen, so daß also die vorstehende Gleichung (4) in jedem Falle einen Kreis in der Zahlenebene definiert.

Den Formeln (I) zufolge genügen die Koordinaten (ξ, η, ζ) der Gleichung

$$A\left(\frac{2ae^2}{e-\zeta} - e^2\right) + B\frac{e\xi}{e-\zeta} + C\frac{e\eta}{e-\zeta} + D = 0$$

oder

$$\text{(5)} \qquad Be\xi + Ce\eta + (Ae^2 - D)\zeta + Ae^2(2a - e) + De = 0,$$

wenn (x, y) der Gleichung (4) genügt. Die Gleichung (5) stellt eine Ebene vor, wenn ξ, η, ζ als laufende Koordinaten angesehen werden. Da eine Ebene die Kugel in einem Kreise schneidet, so folgt:

Jedem Kreise in der Zahlenebene entspricht ein Kreis auf der Zahlenkugel.

Der Satz darf offenbar auch umgekehrt werden, da die Koeffizienten A, B, C, D so gewählt werden können, daß die Gleichung (5) eine beliebige Ebene darstellt. Also:

Jedem Kreise auf der Zahlenkugel entspricht ein Kreis in der Zahlenebene.

Diejenigen Kreise der Kugel, welche durch den Punkt ∞ hindurchgehen, entsprechen den Geraden der Zahlenebene. Daher sagen wir, daß eine Gerade ein Kreis sei, welcher durch den unendlich fernen Punkt der Zahlenebene hindurchgeht.

Die leicht beweisbare Tatsache, daß die stereographische Projektion eine *konforme Abbildung* der Ebene auf die Kugel darstellt, d. h. daß der Winkel zwischen zwei Kurven in der Ebene derselbe ist, wie der Winkel zwischen den entsprechenden Kurven auf der Kugel, sei hier nur beiläufig erwähnt.

§ 4. Grenzwerte unendlicher Zahlenmengen.

Bezeichnet ε eine positive Zahl, so wollen wir unter der *„Umgebung ε"* eines im Endlichen liegenden Punktes α der komplexen Zahlenebene die Gesamtheit derjenigen Punkte z verstehen, welche der Bedingung $|z - \alpha| < \varepsilon$ genügen. Diese Punkte erfüllen das

Innere eines Kreises mit dem Mittelpunkt α und dem Radius ε (Fig. 8). Die Zahl ε nehmen wir als Maß der Größe der Umgebung. Auf der Zahlenkugel bilden die Punkte einer Umgebung des Punktes α das Innere eines um den Punkt α sich legenden Kreises, der sich mit abnehmendem ε immer mehr auf den Punkt α zusammenzieht. Unter der Umgebung ε des unendlich fernen Punktes wollen wir die Gesamtheit derjenigen Punkte z verstehen, die der Bedingung $|z| > \frac{1}{\varepsilon}$ genügen. Diese Punkte erfüllen das Äußere eines Kreises mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius $\frac{1}{\varepsilon}$. Auch hier nehmen wir ε als Maß für die Größe der Umgebung. Auf der Zahlenkugel stellt sich die Umgebung ε des unendlich fernen Punktes als das Innere eines Kreises dar, der um den Punkt ∞ der Kugel abgegrenzt ist und um so kleiner wird, je kleiner ε ist.

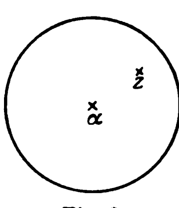


Fig. 8.

Wir betrachten nun ein System Σ von unendlich vielen komplexen Zahlen. Dasselbe wird geometrisch durch ein System von unendlich vielen Punkten der Zahlenebene oder der Zahlenkugel dargestellt, welches wir ebenfalls mit Σ bezeichnen wollen. Dabei wollen wir nicht ausschließen, daß unter den Zahlen des Systemes Σ sich gleiche finden, in welchem Falle ein und derselbe Punkt dem Punktsystem mehrfach zugerechnet werden muß.

Das Punktsystem Σ auf der Zahlenkugel bildet eine Punktmenge im dreidimensionalen Zahlenraum, in welchem unsere Kugel liegt. Die *Grenz-* oder *Häufungsstellen* dieser Punktmenge Σ sind gewisse Punkte der Kugel.

Wenn α eine solche Grenzstelle ist, wo α eine endliche komplexe Zahl oder auch $\alpha = \infty$ sein kann[1]), so liegen in jeder noch so kleinen Umgebung von α unendlich viele Punkte der Menge Σ. Wir können daher aus Σ eine Zahlenfolge

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

so herausheben, daß

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \alpha$$

ist. Daher nennen wir α auch einen Grenzwert des Zahlensystems Σ. Wir knüpfen an diese Betrachtung noch folgende Sätze:

Liegt eine Zahlenfolge

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

vor mit der Grenze α, *so daß also*

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \alpha$$

[1]) Bekanntlich gibt es für ein System von unendlich vielen Punkten auf der Kugel stets mindestens eine Häufungsstelle (Häufungsstellensatz) (A. d. H.).

ist, so besitzt das aus den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ bestehende Punktsystem nur die eine Grenzstelle α.

Umgekehrt:

Besitzt ein Punktsystem der Zahlenkugel nur eine Grenzstelle α, so ist das entsprechende Zahlensystem abzählbar, läßt sich also in eine Reihenfolge

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

bringen, und es ist dann

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \alpha .$$

Wir wollen den letzteren Satz unter der Annahme beweisen, daß die eine Grenzstelle α im Punkte ∞ liegt. Man erkennt leicht, daß die Schlüsse, die wir in diesem Falle machen, auch für jeden beliebigen Wert von α anwendbar bleiben.

Es liege uns also ein unendliches Punktsystem Σ vor mit der einen Grenzstelle ∞. Betrachten wir irgendeine Umgebung ε des Punktes ∞, so können außerhalb derselben nur endlich viele Punkte von Σ liegen. Im anderen Falle würde nämlich eine von ∞ verschiedene Grenzstelle von Σ existieren. In der komplexen Zahlenebene wird die Umgebung ε durch das Äußere des Kreises mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius $\frac{1}{\varepsilon}$ dargestellt. Im Innern eines solchen Kreises liegen also immer nur endlich viele Punkte von Σ.

Wir beschreiben nun um den Nullpunkt eine Reihe von Kreisen, deren Radien nach irgendeinem Gesetze ins Unendliche wachsen, und zerlegen dadurch die Ebene in die Stücke I, II, III, ..., welche, abgesehen vom ersten, lauter Kreisringe sind (Fig. 9).

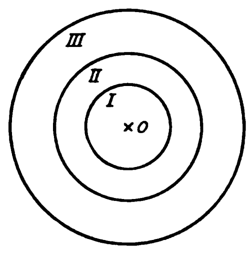


Fig. 9.

Diesen Stücken entsprechend, teilen wir die Punkte von Σ in Gruppen (I), (II), (III), ... ein, indem wir in jede Gruppe diejenigen aufnehmen, welche in dem betreffenden Stücke liegen. Jede einzelne Gruppe enthält nur eine endliche Zahl von Punkten. Diese ordnen wir immer so, daß diejenigen voranstehen, welche dem Nullpunkte näher liegen.

Auf diese Weise erkennen wir, daß die Zahlen von Σ sich in eine Folge

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$$

bringen lassen und zwar derart, daß

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq |\alpha_3| \leqq |\alpha_4| \ldots$$

und $\lim_{n=\infty} \alpha_n = \infty$ ist.

§ 5. Konvergenz der Reihen mit komplexen Gliedern.

Die Reihe

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n + \cdots, \tag{1}$$

deren allgemeines Glied

$$w_n = u_n + i v_n$$

eine komplexe Zahl ist, heißt *konvergent*, wenn

$$\lim_{n=\infty} (w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n) = s$$

einen bestimmten endlichen Wert vorstellt, wenn also die Folge der Teilsummen

$$s_1 = w_1, \quad s_2 = w_1 + w_2, \quad s_3 = w_1 + w_2 + w_3, \quad \ldots$$

eine konvergente Zahlenfolge bildet. Die Zahl s heißt dann die *Summe* der Reihe (1). Hieraus folgt, daß die Reihe (1) dann und nur dann konvergiert, wenn die beiden Reihen

$$\begin{cases} u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \\ v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \end{cases} \tag{2}$$

konvergieren, sowie daß $s = u + iv$ ist.

Ferner folgt aus dem Fundamentalsatz der Konvergenz, angewandt auf die Zahlenfolge $s_1, s_2, s_3, \ldots$, das allgemeine Konvergenzkriterium:

Die unendliche Reihe

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n + \cdots$$

konvergiert dann und nur dann, wenn zu jedem positiven ε der Index n so bestimmt werden kann, daß die Ungleichung

$$|w_{n+1} + w_{n+2} + \cdots + w_{n+k}| < \varepsilon$$

für jeden Index k erfüllt ist[1]).

Wir wollen nun eine konvergente Reihe (1) *unbedingt* konvergent nennen, wenn sie bei beliebiger Umstellung der Glieder konvergent bleibt und ihre Summe nicht ändert. Für die unbedingte Konvergenz ist notwendig und hinreichend, daß die Reihen (2) unbedingt konvergent sind, und dies ist bekanntlich dann und nur dann der Fall, wenn die Reihen

$$\begin{cases} |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots \\ |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| + \cdots \end{cases} \tag{3}$$

konvergieren.

Da nun

$$|w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2} = |u_n + iv_n| \leqq |u_n| + |v_n|$$

[1]) Insbesondere ist also notwendig, daß w_n mit wachsendem n gegen 0 konvergiert.

ist, so konvergiert mit den Reihen (3) zugleich die Reihe

$$|w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n| + \cdots. \tag{4}$$

Da ferner sowohl $|u_n|$ als auch $|v_n|$ nicht größer als

$$|w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$$

sind, so konvergiert mit der Reihe (4) auch jede der beiden Reihen (3). Daher dürfen wir folgendermaßen sagen:

Eine Reihe $w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$ konvergiert stets und nur dann unbedingt, wenn sie „absolut“ konvergiert, d. h. wenn die Reihe der absoluten Beträge

$$|w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n| + \cdots$$

konvergent ist.

Aus einer gegebenen unendlichen Reihe

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n + \cdots \tag{5}$$

kann man in mannigfaltiger Weise eine unendliche Anzahl von Reihen

$$\begin{cases} w_{\alpha_1} + w_{\alpha_2} + w_{\alpha_3} + \cdots \\ w_{\beta_1} + w_{\beta_2} + w_{\beta_3} + \cdots \\ w_{\gamma_1} + w_{\gamma_2} + w_{\gamma_3} + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases} \tag{6}$$

derart bilden, daß jedes Glied w_n der ursprünglichen Reihe in einer und nur einer der neuen Reihen auftritt. Beispielsweise würde

$$\begin{array}{l} w_1 + w_2 + w_4 + w_7 + w_{11} + \cdots \\ w_3 + w_5 + w_8 + w_{12} + \cdots \\ w_6 + w_9 + w_{13} + \cdots \\ w_{10} + w_{14} + \cdots \\ w_{15} + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

eine derartige Zerlegung der Reihe (1) in unendlich viele Reihen sein. Wir wollen nun den folgenden Satz beweisen, den wir als *Doppelreihen-Satz* bezeichnen werden:

Wenn die Reihe (5) *absolut konvergiert und die Summe s besitzt, so konvergiert auch jede der Reihen* (6) *absolut, und wenn die Summen dieser Reihen mit $s_1, s_2, s_3, \ldots$ bezüglich bezeichnet werden, so konvergiert auch die Reihe*

$$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots \tag{7}$$

absolut, und ihre Summe ist s.

Die Reihe

$$|w_{\alpha_1}| + |w_{\alpha_2}| + |w_{\alpha_3}| + \cdots$$

ist konvergent, weil ihre Teilsummen unterhalb der endlichen Zahl

$$S = |w_1| + |w_2| + |w_3| + \cdots$$

bleiben. Die erste der Reihen (6) ist daher absolut konvergent, und in gleicher Weise folgt, daß jede einzelne der Reihen (6) absolut konvergiert.

Sei nun

$$s = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

und

$$\begin{aligned} s_1 &= w_{\alpha_1} + w_{\alpha_2} + w_{\alpha_3} + \cdots \\ s_2 &= w_{\beta_1} + w_{\beta_2} + w_{\beta_3} + \cdots \\ s_3 &= w_{\gamma_1} + w_{\gamma_2} + w_{\gamma_3} + \cdots \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

Dann wird

$$s - (s_1 + s_2 + \cdots + s_m) = w_{\varkappa_1} + w_{\varkappa_2} + \cdots$$

sein, wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ diejenigen Indizes bedeuten, die in den ersten m Reihen (6) nicht auftreten. Ist nun n eine beliebig angenommene natürliche Zahl, so werden für genügend große Werte von m die Glieder $w_1, w_2, \ldots, w_n$ in den ersten m Reihen (6) vorkommen und also $\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots$ über n liegen. Dann wird

$$|s - (s_1 + s_2 + \cdots + s_m)| \leqq |w_{n+1}| + |w_{n+2}| + \cdots = r_n$$

sein, wo r_n den Rest der Reihe

$$|w_1| + |w_2| + |w_3| + \cdots$$

bezeichnet. Da nun n so angenommen werden kann, daß r_n kleiner als eine beliebig klein vorgeschriebene Zahl ist, so hat man

$$\lim (s_1 + s_2 + \cdots + s_m) = s.$$

Die Reihe (7) konvergiert also und hat die Summe s. Daß diese Reihe absolut konvergiert, folgt aus den Ungleichungen

$$\begin{aligned} |s_1| &\leqq |w_{\alpha_1}| + |w_{\alpha_2}| + \cdots \\ |s_2| &\leqq |w_{\beta_1}| + |w_{\beta_2}| + \cdots \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . , \end{aligned}$$

aus welchen man sofort

$$|s_1| + |s_2| + \cdots + |s_m| \leqq |w_1| + |w_2| + |w_3| + \cdots = S$$

schließt. Die Reihe

$$|s_1| + |s_2| + |s_3| + \cdots$$

ist demnach konvergent, da ihre Teilsummen unterhalb der festen Zahl S bleiben. Hiermit ist der Doppelreihensatz in allen Stücken bewiesen.

Mit Hülfe des Doppelreihensatzes ist es leicht, folgenden wichtigen Satz zu beweisen:

Das Produkt $s \cdot s'$ der Summen s und s' zweier absolut konvergenter Reihen

$$s = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$
$$s' = w_1' + w_2' + w_3' + \cdots$$

wird durch die ebenfalls absolut konvergente Reihe

$$s \cdot s' = w_1 w_1' + (w_1 w_2' + w_2 w_1') + (w_1 w_3' + w_2 w_2' + w_3 w_1') + \cdots$$
$$+ (w_1 w_n' + w_2 w_{n-1}' + \cdots + w_n w_1') + \cdots$$

dargestellt.

In der Tat ist die aus den Gliedern

$$(8) \qquad w_1 w_1', \quad w_1 w_2', \quad w_2 w_1', \quad w_1 w_3', \quad w_2 w_2', \quad w_3 w_1', \ \ldots$$

gebildete Reihe absolut konvergent. Betrachten wir nämlich irgendwelche Glieder dieser Reihe, so ist die Summe ihrer absoluten Beträge nicht größer als

$$(|w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|)(|w_1'| + |w_2'| + \cdots + |w_n'|),$$

wenn n der höchste Index ist, der in jenen Gliedern auftritt. Um so mehr überschreitet diese Summe nicht das Produkt $W \cdot W'$, wo

$$W = |w_1| + |w_2| + |w_3| + \cdots$$
$$W' = |w_1'| + |w_2'| + |w_3'| + \cdots$$

ist.

Nach dem Doppelreihensatz ist nun die Summe der aus den Gliedern (8) gebildeten Reihe einerseits gleich

$$w_1 w_1' + (w_1 w_2' + w_2 w_1') + (w_1 w_3' + w_2 w_2' + w_3 w_1') + \cdots$$

und andererseits gleich der Summe der unendlich vielen Reihen

$$s_1 = w_1 w_1' + w_1 w_2' + w_1 w_3' + \cdots = w_1 s',$$
$$s_2 = w_2 w_1' + w_2 w_2' + w_2 w_3' + \cdots = w_2 s',$$
$$s_3 = w_3 w_1' + w_3 w_2' + w_3 w_3' + \cdots = w_3 s',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

d. h. gleich

$$w_1 s' + w_2 s' + w_3 s' + \cdots = s \cdot s'.$$

§ 6. Komplexe Variable und Funktionen derselben.

Betrachten wir ein System Σ von komplexen Zahlen und setzen wir fest, daß die komplexe Zahl $z = x + iy$ mit jeder Zahl dieses Systems Σ identifiziert werden darf, so nennen wir z eine komplexe Variable und Σ ihr Gebiet. Dies Gebiet Σ wird geometrisch durch ein Punktsystem in der komplexen Zahlenebene oder auf der Zahlenkugel dargestellt. Wie früher wollen wir das Punktsystem ebenfalls mit Σ und ebenfalls als *„Gebiet“* der komplexen Variablen z

bezeichnen. Bedienen wir uns der Darstellung der Zahlen von Σ durch die Zahlenkugel, so brauchen wir dann den Fall nicht auszuschließen, in welchem der Punkt ∞ zu dem Punktsystem Σ gehört, in welchem also unter den Zahlen von Σ auch der Wert ∞ vorkommt.

Wenn nun jedem Wert, den z annehmen darf, also jeder Zahl von Σ, nach einem bestimmten Gesetze ein komplexer Zahlenwert $w = u + iv$ zugeordnet ist, so nennen wir w eine *Funktion* von z. Ist wie oben $z = x + iy$, so sind dann u und v *reelle* Funktionen der *reellen* Variablen x und y. Wenn uns also w als Funktion von z gegeben ist, so kommt das darauf hinaus, daß uns im reellen Gebiete zwei Funktionen u und v von x und y gegeben sind.

Betrachten wir das Punktsystem Σ (sei es in der Zahlenebene oder auf der Zahlenkugel), welches das Gebiet der Variablen z ist, so entspricht jedem Punkte von Σ ein bestimmter komplexer Zahlenwert w. Stellen wir den letzteren wieder geometrisch als Punkt in einer Zahlenebene oder auf einer Zahlenkugel dar, so erhalten wir den verschiedenen Werten, die w annimmt, entsprechend ein Punktsystem Σ'. Dabei kann das Punktsystem Σ' ein und denselben Punkt mehrfach enthalten, was eintritt, wenn verschiedenen Werten von z derselbe Wert w zugeordnet ist.

Nun stellt sich die Abhängigkeit des Wertes von w von dem Werte von z geometrisch offenbar so dar:

Die Punktsysteme Σ und Σ' stehen in der Beziehung zueinander, daß jedem Punkte von Σ ein bestimmter Punkt von Σ' zugeordnet ist.

Wenn wir die Punktsysteme Σ und Σ' auf der Zahlenkugel betrachten, so brauchen wir den Fall nicht auszuschließen, in welchem zu dem Punktsysteme Σ' der Punkt ∞ gehört, in welchem also unter den Funktionswerten w auch $w = \infty$ vorkommt.

Wir wollen nun den Begriff der *Stetigkeit* einführen.

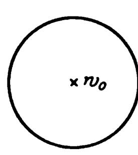


Fig. 10.

Es sei z_0 ein bestimmter Wert der Variablen z, geometrisch dargestellt durch den Punkt z_0 von Σ, und es sei w_0 der zugehörige Funktionswert, geometrisch dargestellt durch den Punkt w_0 von Σ'. Wenn nun z_0 eine Häufungsstelle der Punktmenge Σ ist, so sagen wir, w sei *stetig* für den betrachteten Wert z_0, falls w_0 endlich ist und zu jeder beliebig kleinen Umgebung ε von w_0 sich eine Umgebung δ von z_0 so angeben läßt, daß den Punkten von Σ, welche in letztere Umgebung fallen, Punkte von Σ' entsprechen, die in die Umgebung ε von w_0 fallen (Fig. 10).

Diese Bedingung läßt sich auch durch folgende ersetzen:

Haben die Punkte $z', z'', z''', \ldots$ von Σ die eine Grenzstelle z_0, so sollen die entsprechenden Punkte $w', w'', w''', \ldots$ von Σ' die eine endliche Grenzstelle w_0 besitzen.

Betrachten wir den Fall, wo z_0 einen endlichen Wert besitzt, so drückt sich die Bedingung der Stetigkeit offenbar folgendermaßen aus:

Die Funktion w, welche für $z = z_0$ den Wert w_0 annimmt, ist für z_0 stetig, falls zu jedem beliebig klein vorgeschriebenen positiven ε die positive Größe δ so bestimmt werden kann, daß $|w - w_0| < \varepsilon$ ist, sobald $|z - z_0| < \delta$ ist.

Dies bleibt auch noch gültig für den Fall, wo z_0 unendlich ist, wenn wir nur dem an sich sinnlosen Symbol $z - \infty$ die Bedeutung $\frac{1}{z}$ beilegen.

Ist z. B.

$$w = z^n,$$

so können wir als Gebiet der Variablen z die ganze Zahlenkugel mit Ausschluß des Punktes $z = \infty$ annehmen. Ist z_0 ein bestimmter Wert von z, so kommt $w_0 = z_0{}^n$ und also

$$w - w_0 = z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \ldots + z_0^{n-1})$$

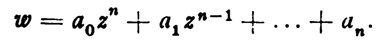
und folglich

$$\begin{aligned} |w - w_0| &= |z - z_0|\,|z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \ldots + z_0^{n-1}| \\ &\leqq |z - z_0|\,(r^{n-1} + r^{n-2} r_0 + \ldots + r_0^{n-1}), \end{aligned}$$

wo wir $|z| = r$, $|z_0| = r_0$ gesetzt haben. Betrachten wir nun die Umgebung δ des Punktes z_0, so ist für jedes z dieser Umgebung offenbar $r = |z| < OM = r_0 + \delta$ (Fig. 11). Daher wird dann

$$\begin{aligned} |w - w_0| &\leqq |z - z_0|\,((r_0 + \delta)^{n-1} + (r_0 + \delta)^{n-2}(r_0 + \delta) + \ldots) \\ &< n\delta \cdot (r_0 + \delta)^{n-1}. \end{aligned}$$

Nun ist es klar, daß wir δ so klein wählen können, daß $|w - w_0|$ unter einem beliebig vorgeschriebenen ε liegt. Also ist $w = z^n$ stetig für jeden endlichen Wert von z. Ebenso zeigt man, daß allgemeiner dasselbe gilt für jede ganze rationale Funktion



$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n.$$

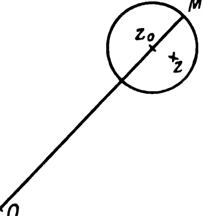


Fig. 11.

§ 7. Gleichmäßige Konvergenz.

Wir betrachten eine Reihe

$$(1) \qquad s = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n + \ldots,$$

deren Glieder Funktionen der komplexen Variablen z sind. Das Gebiet dieser Variablen sei Σ, und für jeden dem Punktsystem Σ angehörenden Punkt z möge die Reihe (1) konvergieren. Die Summe s der Reihe ist dann ebenfalls eine Funktion der Variablen z.

Bezeichnen wir mit r_n den n^{ten} Rest der Reihe, so daß also

$$s - (w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n) = r_n$$

oder

$$s = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n + r_n \tag{2}$$

ist, so folgt aus der vorausgesetzten Konvergenz der Reihe, daß für jeden bestimmten Punkt z des Gebietes Σ

$$|r_k| < \varepsilon \tag{3}$$

ist, sobald der Index k größer als ein geeignet gewählter Index n geworden ist. Dabei bedeutet, wie gewöhnlich, ε eine beliebig klein angenommene positive Zahl.

Wenn nun zu beliebig gegebenem positivem ε der Index n so fest gewählt werden kann, daß für $k > n$ die Ungleichung (3) *besteht für jeden beliebigen Punkt z des Gebietes Σ, so heißt die Reihe* (1) *im Gebiet Σ gleichmäßig konvergent*[1]*.*

Die Bedeutung dieses Begriffes der gleichmäßigen Konvergenz beruht wesentlich auf folgendem Satze:

Sind die Glieder der Reihe

$$s = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n + \dots$$

für das Gebiet Σ stetige Funktionen von z und konvergiert die Reihe für das Gebiet Σ gleichmäßig, so ist auch die Summe s *der Reihe für das Gebiet Σ eine stetige Funktion von z.*

Denn ist ε eine beliebig klein vorgeschriebene positive Zahl, so kann der Index n zunächst so gewählt werden, daß in der Gleichung

$$s = s_n + r_n$$

der absolute Betrag von r_n kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ ist für jeden Punkt z des Gebietes Σ. Bezeichnet dann z_0 einen bestimmten Punkt von Σ und nehmen wir in vorstehender Gleichung $z = z_0$, so kommt etwa

$$s^0 = s_n{}^0 + r_n{}^0$$

und

$$|s - s^0| = |s_n - s_n{}^0 + r_n - r_n{}^0| \leqq |s_n - s_n{}^0| + |r_n| + |r_n{}^0|.$$

Da s_n als Summe einer endlichen Anzahl stetiger Funktionen selbst stetig ist, so können wir die Umgebung δ von z_0 so wählen, daß

$$|s_n - s_n{}^0| < \frac{\varepsilon}{3}$$

---

[1]) Zum Verständnis des Begriffes der gleichmäßigen Konvergenz dient am besten die Betrachtung einer ungleichmäßig konvergenten Reihe, z. B. der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, welche, wie der Leser leicht nachprüfen wird, im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ ungleichmäßig konvergiert. (A. d. H.)

ist für jedes z, welches dieser Umgebung angehört. Für eben diese Umgebung ist dann

$$|s - s^0| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

womit die Stetigkeit von s dargetan ist.

Die gleichmäßige Konvergenz einer Reihe läßt sich häufig mit Hülfe des folgenden Satzes feststellen:

Es seien

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$
$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots$$

zwei Reihen; die Glieder der ersten Reihe seien Funktionen von z in dem Gebiete Σ, die Glieder der zweiten Reihe konstante positive Zahlen. Wenn dann für jedes z im Gebiete Σ die Ungleichungen

$$|w_n| \leqq \varrho_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

***gelten, so konvergiert die erste Reihe für das Gebiet Σ absolut und gleichmäßig, wenn die zweite Reihe konvergent ist*[1]).**

Daß die erste Reihe absolut konvergiert, folgt aus

$$|w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n| \leqq \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n < \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots \text{ in inf.}$$

Da ferner für jedes z im Gebiete Σ der Rest der ersten Reihe die Ungleichung

$$|w_{n+1} + w_{n+2} + \cdots| \leqq |w_{n+1}| + |w_{n+2}| + \cdots \leqq \varrho_{n+1} + \varrho_{n+2} + \cdots$$

erfüllt, also kleiner oder gleich dem Reste der zweiten Reihe ist, so leuchtet auch die gleichmäßige Konvergenz der ersten Reihe ein.

Unser Satz gestattet noch eine bemerkenswerte Verallgemeinerung. Wir wollen zwei Reihen betrachten:

$$(W) \qquad W_1 + W_2 + W_3 + \cdots,$$
$$(w) \qquad w_1 + w_2 + w_3 + \cdots,$$

deren Glieder Funktionen von z im Gebiete Σ sind.

Wenn nun für jedes z in diesem Gebiete

$$|W_n| \geqq |w_n|$$

ist, so soll die Reihe (W) eine „*Majorante*" der Reihe (w) für das Gebiet Σ heißen. Umgekehrt heiße (w) „*Minorante*" von (W). Wenn zwei Reihen in dieser Beziehung zueinander stehen, so bedienen wir uns zuweilen der Bezeichnung

$$(W) \gg (w) \quad \text{oder auch} \quad (w) \ll (W).$$

Nun gilt offenbar folgender Satz:

Ist für das Gebiet Σ die Reihe (w) Minorante der Reihe (W) und konvergiert die Reihe der absoluten Beträge der Glieder von (W) gleich-

[1]) Vgl. den Begriff der regulären Konvergenz im 6. Kap. § 2.

mäßig für das Gebiet Σ, so konvergiert die Reihe (w) absolut und gleichmäßig für das Gebiet Σ.

Für den Fall, daß die Glieder der Majorante (W) positive Konstanten sind, geht dieser Satz in den vorhergehenden über.

2. Kapitel.

Die Potenzreihen.

Die Theorie der analytischen Funktionen, wie wir sie hier nach *Weierstraß* entwickeln wollen, stützt sich auf die Betrachtung der *Potenzreihen*. Daher werden wir uns in diesem Kapitel eingehend mit den Eigenschaften dieser Reihen zu beschäftigen haben.

§ 1. Konvergenzgebiet einer Potenzreihe.

Es sei

$$\mathfrak{P}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \tag{1}$$

eine Potenzreihe, deren Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ irgendwelche komplexen Zahlen sind.

Diejenigen Punkte z in der komplexen Zahlenebene, für welche die Reihe konvergiert, bilden dann das „*Konvergenzgebiet*" (auch „Konvergenzbereich" oder „Konvergenzbezirk") der Potenzreihe. Jedenfalls gehört der Punkt $z = 0$ dem Konvergenzgebiete an.

Es gibt auch Potenzreihen, welche *nur* für $z = 0$ konvergieren, deren Konvergenzgebiet also aus dem einen Punkte $z = 0$ besteht. Wir werden nachher zeigen, daß z. B. die Reihe

$$1 + z + 2!z^2 + \dots + n!z^n + \dots$$

eine derartige Reihe ist.

Schließen wir diesen Fall aus, so wird $\mathfrak{P}(z)$ auch konvergieren für einen geeignet gewählten Wert z_0, der von Null verschieden ist. Wenn nun

$$c_0 + c_1 z_0 + c_2 z_0^2 + \dots + c_n z_0^n + \dots$$

konvergiert, so ist sicher

$$\lim_{n=\infty} c_n z_0^n = 0.$$

Die Punkte $c_0, c_1 z_0, c_2 z_0^2, \dots, c_n z_0^n, \dots$ haben also die einzige Häufungsstelle Null, und es ist daher möglich, um den Nullpunkt einen Kreis zu beschreiben, der alle diese Punkte in seinem Innern aufnimmt. Ist g der Radius dieses Kreises, so ist

$$|c_n z_0^n| < g$$

für $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Wir beschreiben nun um den Nullpunkt irgendeinen Kreis, der den Punkt z_0 ausschließt, und bezeichnen mit ϱ den Radius dieses Kreises (Fig. 12). Ist dann z ein beliebiger Punkt im Innern oder auf der Peripherie dieses Kreises, so ist

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \cdot \frac{|z|^n}{|z_0|^n} < g\left(\frac{\varrho}{|z_0|}\right)^n.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\varrho}{|z_0|} = k,$$

so wird also die Reihe

$$g + gk + gk^2 + \dots + gk^n + \dots$$

für den betrachteten Kreis eine Majorante der Potenzreihe

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$$

sein. Die erstere Reihe konvergiert als geometrische Reihe mit dem Quotienten $k < 1$. Folglich gilt der Satz:

Wenn die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ für $z = z_0$ konvergiert, so konvergiert sie absolut und gleichmäßig für die Punkte jedes Kreises mit dem Mittelpunkt 0 und einem Radius, der kleiner als $|z_0|$ ist.

Sie konvergiert daher insbesondere absolut für jeden Wert z, dessen absoluter Betrag kleiner als $|z_0|$ ist, also für alle Punkte z im Innern desjenigen Kreises, der den Mittelpunkt 0 hat und dessen Peripherie durch den Punkt z_0 geht.

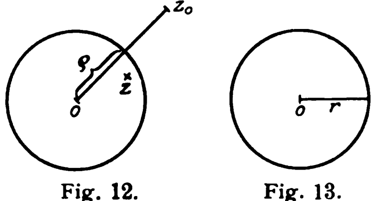


Fig. 12. Fig. 13.

Wir betrachten nun die Gesamtheit derjenigen Kreise C mit dem Mittelpunkt 0, welche die Eigenschaft haben, daß im Innern eines solchen Kreises die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ konvergiert. Es sei r die obere Grenze der Radien dieser Kreise (wobei ein unendlich großer Wert von r nicht ausgeschlossen ist) und K der Kreis mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius r (Fig. 13). Ist z ein Punkt außerhalb dieses Kreises, so kann $\mathfrak{P}(z)$ für diesen Punkt nicht konvergieren. Denn es würde sonst einen Kreis (mit dem Radius $|z|$) geben, in dessen Innern $\mathfrak{P}(z)$ konvergiert und dessen Radius $> r$ ist.

Ist dagegen z ein Punkt im Innern des Kreises K, so wird $\mathfrak{P}(z)$ für diesen Punkt konvergieren; denn unter den Kreisen C gibt es solche, deren Radien beliebig dicht bei r liegen, also auch solche, die den Punkt z in ihr Inneres aufnehmen. Wir haben damit folgenden Satz erhalten:

Ist $\mathfrak{P}(z)$ eine Potenzreihe, so gibt es einen Kreis K mit dem Mittelpunkt 0 von der Eigenschaft, daß $\mathfrak{P}(z)$ konvergiert für jeden Punkt z im Innern des Kreises K, daß dagegen $\mathfrak{P}(z)$ divergiert für jeden Punkt z außerhalb des Kreises K.

Ob $\mathfrak{P}(z)$ für die Punkte der Peripherie des Kreises K konvergiert oder divergiert, bleibt unentschieden.

Diesen Kreis K nennen wir den *Konvergenzkreis* von $\mathfrak{P}(z)$, seinen Radius r den *Konvergenzradius* von $\mathfrak{P}(z)$.

In dem ausgeschlossenen Fall, in welchem $\mathfrak{P}(z)$ nur für $z = 0$ konvergiert, wollen wir sagen, der Konvergenzradius r sei Null, und entsprechend, der Konvergenzkreis K reduziere sich auf den Nullpunkt.

Ist der Konvergenzradius r (also die obere Grenze der Radien der Kreise C) unendlich, so bedeckt der Konvergenzkreis K die ganze komplexe Zahlenebene, und die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ konvergiert dann für jeden Wert von z. Eine solche Potenzreihe nennen wir *„beständig“* konvergent.

Das Konvergenzgebiet einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ besteht nun offenbar aus den Punkten, die im Innern des Konvergenzkreises liegen, zu welchen Punkten eventuell noch diejenigen Punkte der Peripherie des Konvergenzkreises hinzukommen, in welchen $\mathfrak{P}(z)$ konvergiert.

Wegen der oben bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz einer Potenzreihe stellt eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ im Innern ihres Konvergenzkreises eine *stetige Funktion* vor.

§ 2. Bestimmung des Konvergenzradius.

Nach *Cauchy* kann man den Konvergenzradius einer Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \tag{1}$$

auf folgende Weise aus ihren Koeffizienten bestimmen.

Wir bilden uns die Zahlenfolge

$$|c_1|, \ \sqrt{|c_2|}, \ \sqrt[3]{|c_3|}, \ \sqrt[4]{|c_4|}, \ \dots, \ \sqrt[n]{|c_n|}, \ \dots \tag{2}$$

Alle Glieder dieser Folge sind als reelle nicht-negative Zahlen zu nehmen.

Unter den Häufungswerten dieser Zahlen sei der größte l, d. h. $l = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}$, dann ist

$$r = \frac{1}{l}$$

der Konvergenzradius der Potenzreihe (1).

Zum Beweise denken wir uns einen beliebig fixierten Wert z. Dann ist

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n z^n|} = l\,|z|.$$

Ist nun

$$l\,|z| > 1,$$

so ist für unendlich viele Indizes n

$$\sqrt[n]{|c_n z^n|} > 1, \quad \text{also } |c_n z^n| > 1,$$

und es findet Divergenz statt, weil $\lim c_n z^n$ nicht Null sein kann; ist aber

$$l\,|z| < 1,$$

so ist von einem gewissen n ab

$$\sqrt[n]{|c_n z^n|} < k,$$

wo k eine zwischen $l\,|z|$ und 1 fixierte Zahl bedeutet.

Also ist, wenn C eine geeignete positive Konstante bedeutet,

$$\mathfrak{P}(z) \ll C(1 + k + k^2 + \dots + k^n + \dots),$$

woraus die Konvergenz von $\mathfrak{P}(z)$ folgt.

Der Fall $l = 0$ (d. h. $r = \infty$) tritt dann und nur dann ein, wenn die Zahlenfolge (2) die einzige Häufungsstelle 0 besitzt, d. h. wenn

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$$

ist.

Die Potenzreihe

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$$

konvergiert beständig dann und nur dann, wenn

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$$

ist.

Für die vorstehenden Sätze wollen wir nun einige *Beispiele* betrachten.

Für die Potenzreihe

$$1 + z + z^4 + z^9 + z^{16} + \dots$$

ist $\sqrt[n]{|c_n|}$ gleich 1 oder 0, je nachdem n ein Quadrat ist oder nicht. Die Zahlenfolge (2) hat also die beiden Häufungswerte 0 und 1; es ist $l = 1$ und $r = \frac{1}{l} = 1$.

Für die Reihe

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

ist

$$c_n = \frac{1}{n!}.$$

Wir betrachten nun

$$(n!)^2 = [1 \cdot n] \cdot [2(n-1)] \cdot [3(n-2)] \dots [n \cdot 1].$$

Unter den n Faktoren der rechten Seite ist keiner kleiner als n. Denn es ist

$$a(n - a + 1) - n = (a - 1)(n - a) \geqq 0$$

für $a = 1, 2, 3, \ldots, n$. Folglich ist

$$(n!)^2 \geqq n^n, \quad n! \geqq (\sqrt{n})^n, \quad \sqrt[n]{n!} \geqq \sqrt{n}$$

und daher

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Hiernach ist

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0,$$

und die betrachtete Reihe konvergiert also in der ganzen komplexen Zahlenebene.

Für die Reihe

$$1 + z + 2!z^2 + \ldots + n!z^n + \ldots$$

ist

$$\lim \sqrt[n]{|c_n|} = \lim \sqrt[n]{n!} = \infty;$$

folglich $l = \infty$ und $r = \frac{1}{l} = 0$. Die Reihe konvergiert also nur für $z = 0$.

Wir erwähnen schließlich noch folgenden häufig gebrauchten Satz über den Konvergenzkreis:

Stehen die Potenzreihen

$$\mathfrak{P}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots.$$
$$\mathfrak{P}_1(z) = c_0' + c_1' z + c_2' z^2 + \ldots + c_n' z^n + \ldots$$

in der Beziehung zueinander, daß von einem gewissen Index ab beständig

$$|c_n| \leqq |c_n'|$$

ist, so ist der Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(z)$ mindestens so groß wie der von $\mathfrak{P}_1(z)$.

Denn für jeden Punkt im Innern des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}_1(z)$ konvergiert $\mathfrak{P}_1(z)$ absolut, folglich auch $\mathfrak{P}(z)$.

§ 3. Rechnung mit Potenzreihen.

Betrachten wir mehrere Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1(z), \quad \mathfrak{P}_2(z), \quad \ldots, \quad \mathfrak{P}_k(z),$$

so wollen wir den kleinsten unter ihren Konvergenzkreisen als *gemeinsamen* Konvergenzkreis der Reihen bezeichnen. Für jeden Punkt innerhalb dieses Kreises konvergieren sämtliche Reihen, und zwar absolut; für jeden Punkt außerhalb dieses Kreises divergiert wenigstens eine der Reihen.

Durch formale *Addition* zweier Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1(z) = c_0^{(1)} + c_1^{(1)} z + \ldots + c_n^{(1)} z^n + \ldots$$
$$\mathfrak{P}_2(z) = c_0^{(2)} + c_1^{(2)} z + \ldots + c_n^{(2)} z^n + \ldots$$

entsteht die neue Potenzreihe

$$(1) \qquad \mathfrak{P}_1(z) + \mathfrak{P}_2(z) = (c_0^{(1)} + c_0^{(2)}) + (c_1^{(1)} + c_1^{(2)})z + \cdots + (c_n^{(1)} + c_n^{(2)})z^n + \cdots.$$

Diese konvergiert für jedes z, für welches sowohl $\mathfrak{P}_1(z)$ wie $\mathfrak{P}_2(z)$ konvergiert. Das gleiche gilt offenbar von der *Differenz*

$$(2) \qquad \mathfrak{P}_1(z) - \mathfrak{P}_2(z) = (c_0^{(1)} - c_0^{(2)}) + (c_1^{(1)} - c_1^{(2)})z + \cdots + (c_n^{(1)} - c_n^{(2)})z^n + \cdots.$$

Wenn wir ferner das *Produkt* der beiden Reihen $\mathfrak{P}_1(z)$ und $\mathfrak{P}_2(z)$ bilden:

$$(3) \qquad \mathfrak{P}_1(z) \cdot \mathfrak{P}_2(z) = c_0^{(1)} c_0^{(2)} + (c_0^{(1)} c_1^{(2)} + c_0^{(2)} c_1^{(1)})z + \cdots,$$

so ist die hierdurch erhaltene neue Potenzreihe (absolut) konvergent für jedes z, für welches $\mathfrak{P}_1(z)$ und $\mathfrak{P}_2(z)$ absolut konvergieren, und die Summe dieser neuen Potenzreihe ist dann das Produkt aus den Summen der Reihen $\mathfrak{P}_1(z)$ und $\mathfrak{P}_2(z)$.

Durch wiederholte Anwendung dieser Bemerkungen erhalten wir folgenden Satz:

Es bedeute $G(\mathfrak{P}_1(z), \mathfrak{P}_2(z), \ldots, \mathfrak{P}_k(z))$ eine ganze rationale Funktion der Potenzreihen $\mathfrak{P}_1(z), \mathfrak{P}_2(z), \ldots, \mathfrak{P}_k(z)$, also einen Ausdruck, der durch ausschließliche Anwendung der Operationen der Addition, Subtraktion und Multiplikation aus diesen Reihen zusammengesetzt ist. Durch wiederholte Anwendung der Gleichungen (1), (2) *und* (3) *läßt sich dann diese ganze Funktion wieder in die Form einer Potenzreihe bringen. Die auf diese Weise entstehende Reihe $\mathfrak{P}(z)$ konvergiert absolut für jedes z im Innern des gemeinsamen Konvergenzkreises der Reihen $\mathfrak{P}_1(z), \mathfrak{P}_2(z), \ldots, \mathfrak{P}_k(z)$, und für jedes solche z besteht die Gleichung*

$$G(\mathfrak{P}_1(z), \mathfrak{P}_2(z), \ldots, \mathfrak{P}_k(z)) = \mathfrak{P}(z),$$

in welcher unter $\mathfrak{P}_1(z), \mathfrak{P}_2(z), \ldots, \mathfrak{P}_k(z)$ und $\mathfrak{P}(z)$ die Summen der Reihen für den betreffenden Wert von z zu verstehen sind.

Wir gehen nun zur Betrachtung der *Division* der Potenzreihen über und wollen zunächst den Quotienten

$$(4) \qquad \frac{1}{1 - c_1 z - c_2 z^2 - c_3 z^3 - \cdots}$$

ins Auge fassen, wobei wir annehmen, daß die Potenzreihe im Nenner einen nicht verschwindenden Konvergenzradius besitzt. Dann ist der größte Häufungswert l der Zahlenfolge

$$|c_1|, \quad \sqrt{|c_2|}, \quad \sqrt[3]{|c_3|}, \quad \ldots, \quad \sqrt[n]{|c_n|}, \quad \ldots$$

endlich, und es liegen daher diese Zahlen unterhalb einer geeignet gewählten positiven Zahl. Verstehen wir unter g eine derartige Zahl so ist für jeden Index n

$$(5) \qquad |c_n| < g^n.$$

Dies vorausgeschickt, bestimmen wir die Potenzreihe

$$(6)\qquad \mathfrak{Q}(z) = 1 + k_1 z + k_2 z^2 + k_3 z^3 + \dots + k_n z^n + \dots$$

so, daß formal[1])

$$(7)\quad (1 - c_1 z - c_2 z^2 - c_3 z^3 - \dots)\,(1 + k_1 z + k_2 z^2 + k_3 z^3 + \dots) = 1$$

wird. Wenn wir nach (3) das Produkt ausführen, so kommt

$$1 + (k_1 - c_1) z + (k_2 - c_1 k_1 - c_2) z^2 + (k_3 - c_1 k_2 - c_2 k_1 - c_3) z^3 + \dots = 1,$$

und diese Gleichung ist formal befriedigt, wenn

$$k_1 = c_1, \quad k_2 = c_1 k_1 + c_2, \quad k_3 = c_1 k_2 + c_2 k_1 + c_3, \;\dots$$

genommen wird.

Nun findet man nach (5) sukzessive:

$$|k_1| < g, \quad |k_2| \leqq |c_1|\,|k_1| + |c_2| < g^2 + g^2 = 2g^2,$$
$$|k_3| \leqq |c_1|\,|k_2| + |c_2|\,|k_1| + |c_3| < 2g^3 + g^3 + g^3 = 4g^3, \dots .$$

Allgemein ist

$$(8)\qquad |k_n| < 2^{n-1} g^n.$$

In der Tat, nimmt man dies bis zu einem gewissen Index n hin als bewiesen an, so folgt

$$|k_{n+1}| = |c_1 k_n + c_2 k_{n-1} + \dots + c_{n+1}|$$
$$\leqq |c_1|\,|k_n| + |c_2|\,|k_{n-1}| + \dots + |c_{n+1}|$$

und also

$$|k_{n+1}| < g \cdot 2^{n-1} g^n + g^2 \cdot 2^{n-2} g^{n-1} + \dots + g^{n+1} + g^{n+1}$$
$$= g^{n+1}(1 + 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) = g^{n+1} \cdot 2^n.$$

Die Ungleichung (8) gilt also allgemein, weil sie für $n = 1$ gilt.

Aus dieser Vergleichung folgt, daß die Potenzreihe (6) eine Minorante von

$$1 + g z + 2^1 g^2 z^2 + 2^2 g^3 z^3 + \dots + 2^{n-1} g^n z^n + \dots$$

ist. Die letztere Reihe konvergiert aber absolut, solange

$$|z| < \frac{1}{2g}$$

ist; unter derselben Bedingung konvergiert daher auch die Reihe (6) absolut. Also folgt:

Für alle Punkte z im Innern des Kreises mit dem Mittelpunkt 0 *und dem Radius* $\frac{1}{2g}$ *gilt die Gleichung*

$$(9)\qquad \frac{1}{1 - c_1 z - c_2 z^2 - c_3 z^3 - \dots} = 1 + k_1 z + k_2 z^2 + k_3 z^3 + \dots .$$

Im Innern dieses Kreises konvergiert nämlich die Reihe auf der rechten Seite, wie eben gezeigt wurde. Aber auch die Reihe

[1]) D. h. wenn wir mit den Potenzreihen nach denselben Rechenregeln wie mit endlichen Summen rechnen (A. d. H.).

$1 - c_1 z - c_2 z^2 - c_3 z^3 - \ldots$ konvergiert in jenem Kreise; denn der Konvergenzradius $r = \frac{1}{l}$ dieser Reihe ist, wegen $l \leqq g$, nicht kleiner als $\frac{1}{g}$ und um so mehr größer als $\frac{1}{2g}$. Hierdurch gewinnt die formal gebildete Gleichung (7) eine Bedeutung. Für $|z| < \frac{1}{2g}$ ist ferner

$$|1 - c_1 z - c_2 z^2 - \ldots| \geqq 1 - |c_1 z| - |c_2 z^2| - \ldots$$
$$> 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \ldots = 0,$$

also der Nenner in (9) von Null verschieden. Daher folgt (9) aus (7).

Sei jetzt

$$\mathfrak{P}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

eine Potenzreihe, deren erster Koeffizient a_0 von Null verschieden ist und die überdies einen nicht verschwindenden Konvergenzradius besitzt. Dann können wir setzen

$$\mathfrak{P}(z) = a_0(1 - c_1 z - c_2 z^2 - c_3 z^3 - \ldots),$$

wo

$$c_1 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad c_2 = -\frac{a_2}{a_0}, \quad c_3 = -\frac{a_3}{a_0}, \ldots$$

ist. Es wird dann nach dem vorigen Satze

$$\frac{1}{\mathfrak{P}(z)} = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 - c_1 z - c_2 z^2 - c_3 z^3 - \ldots} = \frac{1}{a_0} + \frac{k_1}{a_0} z + \frac{k_2}{a_0} z^2 + \cdots$$

für diejenigen Werte von z, deren absoluter Betrag kleiner als eine geeignet gewählte positive Zahl $\frac{1}{2g}$ ist. Für g darf man irgendeine positive Zahl nehmen, die größer ist als jede Zahl der Reihe

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \quad \sqrt{\left|\frac{a_2}{a_0}\right|}, \quad \sqrt[3]{\left|\frac{a_3}{a_0}\right|}, \quad \ldots, \quad \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{a_0}\right|}, \quad \ldots .$$

Wenn also $\mathfrak{P}(z)$ nicht verschwindenden Konvergenzradius besitzt und für $z = 0$ nicht Null ist, so gibt es eine andere Potenzreihe $\mathfrak{Q}(z)$ mit ebenfalls nicht verschwindendem Konvergenzradius, so beschaffen, daß in einem geeignet gewählten Kreise mit dem Mittelpunkte Null $\mathfrak{P}(z)$ und $\mathfrak{Q}(z)$ beide konvergieren und in der Beziehung

$$\frac{1}{\mathfrak{P}(z)} = \mathfrak{Q}(z)$$

zueinander stehen.

Hieraus folgern wir nun sofort:

Eine gebrochene rationale Funktion der Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1(z), \quad \mathfrak{P}_2(z), \quad \ldots, \quad \mathfrak{P}_k(z)$$

ist in einem nicht verschwindenden Kreise wieder als Potenzreihe darstellbar, wenn die Potenzreihen $\mathfrak{P}_1(z), \mathfrak{P}_2(z), \ldots, \mathfrak{P}_k(z)$ ***nicht ver-***

schwindende Konvergenzradien besitzen und der Nenner der rationalen Funktion für $z = 0$ nicht Null ist.

§ 4. Prinzip der Koeffizientenvergleichung.

Dieses Prinzip beruht auf folgendem Satze:

Es sei $\mathfrak{P}(z)$ eine Potenzreihe, die nicht „identisch Null" ist, das soll heißen, deren Koeffizienten nicht sämtlich Null sind. Der Konvergenzradius der Potenzreihe sei nicht Null. Dann kann man stets eine Umgebung δ der Stelle $z = 0$ bestimmen, innerhalb deren $\mathfrak{P}(z)$, außer etwa für $z = 0$, nirgends verschwindet.

Sei c_k der erste nicht verschwindende Koeffizient der Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$, so ist

$$\mathfrak{P}(z) = z^k (c_k + c_{k+1} z + c_{k+2} z^2 + \ldots) = z^k \mathfrak{P}_1(z),$$

wo $\mathfrak{P}_1(z)$ zur Abkürzung steht.

Die Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(z)$ hat denselben Konvergenzkreis wie $\mathfrak{P}(z)$.

Da eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzkreises eine stetige Funktion ist, so können wir eine Umgebung δ des Nullpunktes bestimmen, innerhalb welcher $\mathfrak{P}_1(z)$ von $\mathfrak{P}_1(0) = c_k$ um eine Größe verschieden ist, deren absoluter Betrag kleiner als $|c_k|$ ist. In dieser Umgebung ist

$$|\mathfrak{P}_1(z)| = |(\mathfrak{P}_1(z) - \mathfrak{P}_1(0)) + c_k| \geqq |c_k| - |\mathfrak{P}_1(z) - \mathfrak{P}_1(0)| > 0.$$

In der betrachteten Umgebung kann also $\mathfrak{P}(z)$ nur für $z = 0$ Null sein, und zwar ist dieses der Fall oder nicht, je nachdem $k > 0$ oder $k = 0$ ist.

Der soeben bewiesene Satz läßt sich offenbar auch so aussprechen:

Diejenigen Werte von z, für welche eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ verschwindet, also die sogenannten „Nullstellen" von $\mathfrak{P}(z)$, können nicht die Grenzstelle $z = 0$ besitzen.

Hieraus folgt nun weiter, daß zwei Potenzreihen miteinander *identisch* sein müssen, wenn für unendlich viele Werte von z, welche die Häufungsstelle $z = 0$ besitzen, die beiden Potenzreihen konvergieren und denselben Wert haben. Denn die Differenz der beiden Reihen muß nach dem letzten Satze identisch Null sein. Also:

Aus der Gleichung

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots = c_0' + c_1' z + c_2' z^2 + \ldots$$

darf man

$$c_0 = c_0', \quad c_1 = c_1', \quad c_2 = c_2', \ \ldots$$

schließen, wenn die beiden Seiten der Gleichung nicht verschwindende Konvergenzradien besitzen und die Gleichung für unendlich viele Werte von z mit der Häufungsstelle $z = 0$ gilt.

§ 5. Ausdehnung der erhaltenen Sätze.

Die bisherigen Resultate sind unmittelbar zu übertragen auf Potenzreihen von der Gestalt

(1) $\mathfrak{P}(z/a) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots.$

Setzt man bei einer solchen Potenzreihe

$$z - a = \zeta,$$

so wird

$$\mathfrak{P}(z/a) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \cdots + c_n\zeta^n + \cdots,$$

also eine nach Potenzen von ζ fortschreitende Reihe. Ist r der Konvergenzradius der letzteren, so konvergiert oder divergiert die Reihe (1), je nachdem

$$|\zeta| = |z-a| < r \quad \text{oder} \quad > r$$

ist. Die Punkte z, für welche $|z-a| < r$ ist, erfüllen das Innere des Kreises, der den Mittelpunkt a und den Radius r besitzt. Also:

Zu jeder Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/a)$ gehört ein Kreis mit dem Mittelpunkt a, innerhalb dessen die Reihe konvergiert, außerhalb dessen die Reihe divergiert.

Dieser Kreis heißt der *Konvergenzkreis*, sein Radius der *Konvergenzradius* der Reihe $\mathfrak{P}(z/a)$.

Betrachten wir einen Kreis, der den Mittelpunkt a hat und dessen Radius (um beliebig wenig) kleiner ist als der Konvergenzradius, so konvergiert $\mathfrak{P}(z/a)$ für alle Punkte dieses Kreises absolut und gleichmäßig.

Die Summe der Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/a)$ stellt daher insbesondere im Innern des Konvergenzkreises eine *stetige* Funktion von z dar.

Eine rationale Funktion von mehreren Potenzreihen $\mathfrak{P}_1(z/a), \ldots, \mathfrak{P}_k(z/a)$ ist in einem nicht verschwindenden Kreise mit dem Mittelpunkt a wieder in der Form einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/a)$ darstellbar, wenn die Potenzreihen $\mathfrak{P}_1(z/a), \ldots, \mathfrak{P}_k(z/a)$ nicht verschwindende Konvergenzradien besitzen und der Nenner der rationalen Funktion für $z = a$ nicht verschwindet.

Entsprechendes wie für die Potenzreihen $\mathfrak{P}(z/a)$ gilt auch für die Reihen der Gestalt

(2) $$\mathfrak{P}(z/\infty) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_n}{z^n} + \cdots.$$

Diese konvergieren oder divergieren, je nachdem

$$\left|\frac{1}{z}\right| < r \quad \text{oder} \quad \left|\frac{1}{z}\right| > r, \quad \text{d. i.} \quad |z| > \frac{1}{r} \quad \text{oder} \quad |z| < \frac{1}{r}$$

ist, unter r den Konvergenzradius von $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$ verstanden. Eine Reihe von der Gestalt (2) konvergiert oder divergiert also, je nachdem der Punkt z außerhalb oder innerhalb eines gewissen Kreises mit dem Mittelpunkt 0 liegt.

Die Ausnahmestellung des Punktes ∞ verschwindet, wenn wir die komplexen Zahlen durch die Punkte einer Kugel darstellen. Es gilt dann, gleichgültig ob a endlich oder ∞ ist, der Satz:

Jeder Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/a)$ entspricht auf der Kugel ein Kreis, welcher die Kugel in zwei Gebiete zerlegt von folgender Beschaffenheit: Im Innern desjenigen Gebietes, in welchem der Punkt a liegt, konvergiert $\mathfrak{P}(z/a)$, im Innern des anderen Gebietes divergiert $\mathfrak{P}(z/a)$.

Der wesentliche Inhalt des vorigen Paragraphen überträgt sich auf die Potenzreihen $\mathfrak{P}(z/a)$, wo a endlich oder ∞ sein darf, in dieser Form:

Wenn die Koeffizienten einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/a)$ nicht sämtlich verschwinden, so kann man um den Punkt a eine Umgebung so abgrenzen, daß innerhalb derselben $\mathfrak{P}(z/a)$, außer etwa für $z = a$, nirgends verschwindet.

§ 6. Die Umbildungen einer Potenzreihe.

Wir betrachten eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(z/a) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots, \tag{1}$$

deren Konvergenzradius r nicht verschwindet.

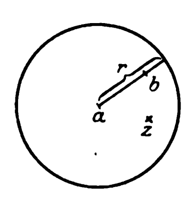


Fig. 14.

Es sei b ein Punkt im Innern des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}(z/a)$ (Fig. 14). Wir können dann

$$z - a = (b-a) + (z-b) = \delta + \zeta$$

setzen, wo δ und ζ Abkürzungen für $b - a$ und $z - b$ resp. sind.

Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/a)$ nimmt dadurch die Gestalt an:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(z/a) &= c_0 + c_1(\delta+\zeta) + c_2(\delta+\zeta)^2 + c_3(\delta+\zeta)^3 + \dots \\ &= c_0 + [c_1\delta + c_1\zeta] + [c_2\delta^2 + 2c_2\delta\zeta + c_2\zeta^2] \\ &\quad + [c_3\delta^3 + 3c_3\delta^2\zeta + 3c_3\delta\zeta^2 + c_3\zeta^3] + \dots\,.\end{aligned} \tag{2}$$

Wir fragen jetzt: dürfen wir hier auf der rechten Seite nach Potenzen von $\zeta = z - b$ anordnen?

Das ist jedenfalls dann erlaubt, wenn die Reihe der absoluten Beträge

$$|c_0| + |c_1\delta| + |c_1\zeta| + |c_2\delta^2| + |2c_2\delta\zeta| + |c_2\zeta^2| + \dots \tag{3}$$

konvergiert. Eine Reihe aus lauter nicht negativen reellen Gliedern konvergiert aber, sobald sie bei irgendeiner beliebigen Anordnung der Glieder konvergiert. Daher konvergiert die Reihe (3), wenn die folgende Reihe

$$|c_0| + |c_1|(|\delta| + |\zeta|) + |c_2|(|\delta| + |\zeta|)^2 + |c_3|(|\delta| + |\zeta|)^3 + \dots \tag{4}$$

konvergiert. Die letztere Reihe ist nichts anderes, als die Reihe der absoluten Beträge von $\mathfrak{P}(z/a)$, wenn $z - a$ durch $|\delta| + |\zeta|$ ersetzt wird. Die Reihe (4) konvergiert also, falls

$$|\delta| + |\zeta| < r, \quad \text{d. h.} \quad |z - b| < r - |b - a|$$

ist. Diese Bedingung ist für jeden Punkt z erfüllt, der im Innern desjenigen Kreises liegt, dessen Mittelpunkt b ist und der den Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(z/a)$ von innen berührt (Fig. 15). Liegt also z im Innern dieses Kreises, so dürfen wir die rechte Seite in der Gleichung (2) nach Potenzen von $\zeta = (z - b)$ anordnen.

Wir wollen nun folgende Terminologie einführen:

Setzt man in einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/a)$ an Stelle von $z - a$ überall $(b - a) + (z - b)$, entwickelt sodann jedes Glied der Potenzreihe nach Potenzen von $(z - b)$ und ordnet schließlich die ganze Reihe nach den Potenzen von $(z - b)$ an, so soll die dadurch erhaltene Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(z/b)$ eine *„Umbildung"* der Reihe $\mathfrak{P}(z/a)$ heißen.

Es gilt dann der Satz:

Die Umbildung $\mathfrak{P}_1(z/b)$ konvergiert sicher im Innern desjenigen Kreises, der den Mittelpunkt b hat und den Konvergenzkreis der Reihe $\mathfrak{P}(z/a)$ von innen berührt. Innerhalb des genannten Kreises besteht überall die Gleichung

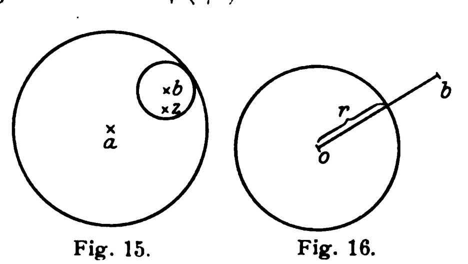


Fig. 15. Fig. 16.

$$\mathfrak{P}(z/a) = \mathfrak{P}_1(z/b).$$

Ein entsprechender Satz gilt für die Potenzreihen $\mathfrak{P}(z/\infty)$. Es sei

$$\mathfrak{P}(z/\infty) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_n}{z^n} + \cdots \tag{5}$$

konvergent außerhalb des Kreises $|z| = r$ und b ein Punkt außerhalb dieses Kreises (Fig. 16).

Wir setzen

$$z = b - (b - z) = b - \zeta,$$

wo ζ zur Abkürzung für $b - z$ steht.

Dann kommt

$$\mathfrak{P}(z/\infty) = c_0 + \frac{c_1}{b - \zeta} + \frac{c_2}{(b - \zeta)^2} + \frac{c_3}{(b - \zeta)^3} + \cdots. \tag{6}$$

Solange nun $|\zeta| < |b|$, d. h., solange z in dem Kreise liegt, der b als Mittelpunkt hat und durch den Nullpunkt hindurchgeht, ist

$$\frac{1}{b - \zeta} = \frac{1}{b} + \frac{\zeta}{b^2} + \frac{\zeta^2}{b^3} + \cdots$$

und nach den Sätzen des § 3 auch

$$\frac{1}{(b-\zeta)^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{2\zeta}{b^3} + \cdots$$

$$\frac{1}{(b-\zeta)^3} = \frac{1}{b^3} + \frac{3\zeta}{b^4} + \cdots$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Daher ist dann

$$(7) \qquad \mathfrak{P}(z/\infty) = c_0 + c_1\left(\frac{1}{b} + \frac{\zeta}{b^2} + \cdots\right) + c_2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{2\zeta}{b^3} + \cdots\right) + \cdots.$$

Hier dürfen wir nun nach Potenzen von ζ anordnen, wenn

$$|c_0| + |c_1|\left(\left|\frac{1}{b}\right| + \left|\frac{\zeta}{b^2}\right| + \cdots\right) + |c_2|\left(\left|\frac{1}{b^2}\right| + \left|\frac{2\zeta}{b^3}\right| + \cdots\right) + \cdots,$$

d. h. wenn

$$|c_0| + |c_1|\cdot\frac{1}{|b| - |\zeta|} + |c_2|\frac{1}{(|b| - |\zeta|)^2} + \cdots$$

konvergiert. Dies ist der Fall, wenn

$$|b| - |\zeta| > r, \quad \text{d. h.} \quad |b - z| < |b| - r$$

ist, wenn also z in demjenigen Kreise mit dem Mittelpunkt b liegt, der den Kreis $|z| = r$ von außen berührt.

Innerhalb dieses Kreises ist also

$$(8) \qquad \mathfrak{P}(z/\infty) = \mathfrak{P}_1(z/b),$$

wo $\mathfrak{P}_1(z/b)$ diejenige Potenzreihe ist, die durch Anordnung der rechten Seite der Gleichung (7) nach Potenzen von $\zeta = b - z$ entsteht. Diese Potenzreihe nennen wir die „*Umbildung*" der Reihe $\mathfrak{P}(z/\infty)$ für den Punkt b.

§ 7. Die Ableitungen einer Potenzreihe.

Betrachten wir den Koeffizienten von $\zeta = z - b$ in der Umbildung $\mathfrak{P}_1(z/b)$ der Potenzreihe

$$(1) \quad \mathfrak{P}(z/a) = c_0 + c_1(b-a+\zeta) + c_2(b-a+\zeta)^2 + \cdots + c_n(b-a+\zeta)^n + \cdots,$$

so ist derselbe

$$c_1 + 2c_2(b-a) + 3c_3(b-a)^2 + \cdots + nc_n(b-a)^{n-1} + \cdots.$$

Wir wissen, daß diese Reihe für jeden Punkt b, der im Innern des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}(z/a)$ liegt, konvergiert. Mit anderen Worten:

Die Reihe

$$(2) \quad c_1 + 2c_2(z-a) + 3c_3(z-a)^2 + \cdots + nc_n(z-a)^{n-1} + \cdots$$

hat einen Konvergenzradius r', der mindestens so groß ist, wie der Konvergenzradius r von $\mathfrak{P}(z/a)$, also

$$r' \geqq r.$$

Vergleichen wir nun die beiden Reihen

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots,$$
$$c_0 + c_1(z-a) + 2c_2(z-a)^2 + \dots + nc_n(z-a)^n + \dots,$$

so ist r der Konvergenzradius der ersten, r' der Konvergenzradius der zweiten. Da aber $|c_n| \leqq |nc_n|$ $(n = 1, 2, \dots)$, so ist der Konvergenzradius der ersten mindestens so groß wie der der zweiten, also

$$r \geqq r'.$$

Folglich ist $r' = r$. Die Reihe (2) bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}'(z/a)$ und nennen sie die *„abgeleitete"* Reihe von $\mathfrak{P}(z/a)$.

Es gilt also der Satz:

Die abgeleitete Reihe

$$\mathfrak{P}'(z/a) = c_1 + 2c_2(z-a) + 3c_3(z-a)^2 + \dots + nc_n(z-a)^{n-1} + \dots$$

hat denselben Konvergenzkreis wie die ursprüngliche Reihe

$$\mathfrak{P}(z/a) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots.$$

Die Potenzreihen

$$\mathfrak{P}(z/a), \quad \mathfrak{P}'(z/a), \quad \mathfrak{P}''(z/a), \quad \mathfrak{P}'''(z/a), \quad \dots,$$

von denen jede die abgeleitete Reihe der vorhergehenden Reihe ist, haben also sämtlich denselben Konvergenzkreis wie $\mathfrak{P}(z/a)$ selbst. Wir nennen $\mathfrak{P}^{(n)}(z/a)$ die n^{te} *abgeleitete Reihe* von $\mathfrak{P}(z/a)$, wobei wir, um diesen Begriff auch für den Fall $n = 0$ anwendbar zu machen, unter der 0ten abgeleiteten Reihe $\mathfrak{P}^{(0)}(z/a)$ die ursprüngliche Reihe $\mathfrak{P}(z/a)$ selbst verstehen wollen.

Wenn wir in der Gleichung (1) auf der rechten Seite nach Potenzen von $\zeta = z - b$ anordnen, so ergibt sich als Darstellung der Umbildung $\mathfrak{P}_1(z/b)$ von $\mathfrak{P}(z/a)$, wie man leicht erkennt:

$$(3) \quad \mathfrak{P}(z/a) = \mathfrak{P}_1(z/b) = \mathfrak{P}(b/a) + \mathfrak{P}'(b/a)(z-b) + \dots + \mathfrak{P}^{(n)}(b/a)\frac{(z-b)^n}{n!} + \dots.$$

Diese Entwicklung ist, wie wir wissen, sicher gültig im Innern des Kreises mit dem Mittelpunkt b, der den Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(z/a)$ von innen berührt.

Setzen wir $z = b + h$, so folgt aus (3) für alle Werte von h, deren absoluter Betrag eine gewisse Größe nicht überschreitet,

$$\frac{\mathfrak{P}(b+h/a) - \mathfrak{P}(b/a)}{h} = \mathfrak{P}'(b/a) + \dots + \mathfrak{P}^{(n)}(b/a)\frac{h^{n-1}}{n!} + \dots.$$

Da nun die Potenzreihe rechter Hand eine stetige Funktion von h ist, so kommt

$$\lim_{h=0} \frac{\mathfrak{P}(b+h/a) - \mathfrak{P}(b/a)}{h} = \mathfrak{P}'(b/a).$$

Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/a)$ definiert also im Innern ihres Konvergenzkreises eine stetige Funktion von z, welche *differentiierbar* ist, und

zwar ist der Wert der abgeleiteten Reihe $\mathfrak{P}'(z/a)$ immer der Differentialquotient von $\mathfrak{P}(z/a)$. Der Begriff des ***Differentialquotienten*** einer für ein gewisses Gebiet Σ der Variablen z betrachteten Funktion $f(z)$ ist dabei so aufzufassen:

Ist z ein bestimmter Wert der Variablen, dargestellt durch einen bestimmten Punkt des Punktsystems Σ, so betrachte man den Quotienten

$$\frac{f(z_1)-f(z)}{z_1-z},$$

wo z_1 einen von z verschiedenen und veränderlich gedachten Punkt des Systems Σ bezeichnet.

Gibt es nun einen endlichen bestimmten Wert f', von der Art, daß

$$\frac{f(z_1)-f(z)}{z_1-z}-f'$$

absolut genommen kleiner als eine beliebig klein vorgeschriebene positive Zahl ε ist, sobald z_1 einer geeignet gewählten Umgebung des Punktes z angehört, so drücken wir diese Tatsache durch die Gleichung

$$\lim_{z_1=z}\frac{f(z_1)-f(z)}{z_1-z}=f'$$

aus, nennen $f(z)$ für den betrachteten Wert z im Gebiete Σ ***differentiierbar*** und bezeichnen f' als den ***Differentialquotienten*** von $f(z)$ für den betrachteten Wert z. Es ist f' von z abhängig und also im Gebiete Σ wieder eine Funktion von z. Der Differentialquotient dieser Funktion, wenn er existiert, heißt der ***zweite Differentialquotient*** von $f(z)$ usf. Die Ableitung $\mathfrak{P}'(z/a)$ von $\mathfrak{P}(z/a)$ ist ihrerseits im Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(z/a)$ differentiierbar und hat als Differentialquotienten $\mathfrak{P}''(z/a)$ usf. Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/a)$ definiert also im Innern ihres Konvergenzkreises eine Funktion von z, welche Differentialquotienten ***aller Ordnungen*** besitzt.

§ 8. Unmittelbare Fortsetzungen einer Potenzreihe.

Die Konvergenzkreise zweier Potenzreihen $\mathfrak{P}(z/a)$ und $\mathfrak{P}_1(z/a_1)$ mögen ineinandergreifen; S sei das ihnen gemeinsame Stück und b ein Punkt innerhalb S (Fig. 17).

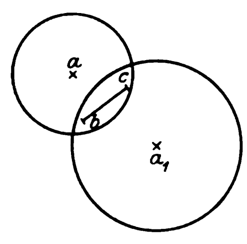
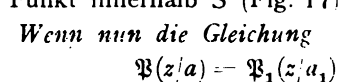


Fig. 17.

Wenn nun die Gleichung



$$\mathfrak{P}(z/a)=\mathfrak{P}_1(z/a_1)$$

für unendlich viele Punkte innerhalb S gilt, die dort die Häufungsstelle b haben, so gilt dieselbe Gleichung für jeden beliebigen Punkt c innerhalb S.

Aus der Voraussetzung folgt, daß die Umbildungen von $\mathfrak{P}(z/a)$ und $\mathfrak{P}_1(z/a_1)$ für den Punkt b identisch sind. Denn diese Umbildungen

sind Potenzreihen von $(z - b)$, die für unendlich viele Werte in beliebiger Nähe von b einander gleich sind. Für diejenigen Punkte der geradlinigen Strecke bc, welche ins Innere des Konvergenzkreises jener gemeinsamen Umbildung von $\mathfrak{P}(z/a)$ und $\mathfrak{P}_1(z/a_1)$ fallen, besitzen die letzteren Potenzreihen immer den gleichen Wert. Auf der Strecke bc gibt es also Punkte p von der Beschaffenheit, daß $\mathfrak{P}(z/a) = \mathfrak{P}_1(z/a_1)$ für jeden Punkt der Strecke bp gilt. Wir betrachten die Entfernungen dieser Punkte p von dem Punkte b. Es sei bq die obere Schranke dieser Entfernungen (Fig. 18). Wir behaupten: der Punkt q fällt mit c zusammen. Denn in einem genügend kleinen um q beschriebenen Kreise gilt $\mathfrak{P}(z/a) = \mathfrak{P}_1(z/a_1)$, weil diese Gleichung für alle Punkte der Strecke bq gilt. Wenn nun q von c verschieden wäre, so würde hiernach die Gleichung $\mathfrak{P}(z/a) = \mathfrak{P}_1(z/a_1)$ auch noch für ein Stück der Verlängerung der Strecke bq über q hinaus gelten, was der Bedeutung des Punktes q widerspricht. Da q mit c zusammenfällt, so gilt $\mathfrak{P}(z/a) = \mathfrak{P}_1(z/a_1)$ auch für $z = c$, w. z. b. w.

Fig. 18.

Stehen zwei Potenzreihen in der eben betrachteten Beziehung zueinander, haben also ihre Konvergenzkreise ein Stück gemeinsam und besitzen die Reihen innerhalb dieses Stückes überall denselben Wert, so heißt jede der Reihen eine „*unmittelbare Fortsetzung*" der andern.

§ 9. Ein Hilfssatz über Potenzreihen.

Sind $a_0, a_1, a_{-1}, a_2, a_{-2}, \ldots$ komplexe Zahlen, so wollen wir unter dem Zeichen

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n \tag{1}$$

die Summe der beiden Reihen

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \\ \quad\; a_{-1} + a_{-2} + a_{-3} + \cdots \end{cases} \tag{2}$$

verstehen. Nur wenn diese beiden Reihen konvergent sind, stellt also das Symbol (1) eine bestimmte komplexe Zahl, nämlich die Summe der beiden Limites

$$\lim_{n=\infty}(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \quad \lim_{m=\infty}(a_{-1} + a_{-2} + \cdots a_{-m})$$

vor. Die Summe dieser beiden Limites können wir auch durch

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} \sum_{k=-m}^{k=n} a_k$$

andeuten. Nach diesen Festsetzungen wollen wir nun eine Summe der Gestalt

$$P(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n z^n \tag{3}$$

betrachten. Für einen bestimmten Wert von z besitzt $P(z)$ einen bestimmten endlichen Wert, wenn für das betreffende z die beiden Potenzreihen

$$\mathfrak{P}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots,$$

$$\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right) = \quad \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots$$

beide zugleich konvergieren. Die Reihe $\mathfrak{P}(z)$ konvergiert im Innern eines Kreises $|z| = r$, die Reihe $\mathfrak{P}_1(z)$ außerhalb eines Kreises $|z| = r_1$. Offenbar haben die beiden Konvergenzgebiete von $\mathfrak{P}(z)$ und $\mathfrak{P}_1(z)$ nur dann ein Stück gemein, wenn $r > r_1$ ist. Und zwar ist dieses gemeinsame Stück ein Kreisring. Diesen nennen wir den ***Konvergenzring*** von $P(z)$. Da sowohl $\mathfrak{P}(z)$ wie $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right)$ im Innern dieses Kreisringes stetige Funktionen von z vorstellen, so gilt gleiches für

$$P(z) = \mathfrak{P}(z) + \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right).$$

Eine Summe der Gestalt $P(z)$ wollen wir eine *Laurent*sche Reihe nennen. Eine gewöhnliche Potenzreihe können wir offenbar als eine *Laurent*sche Reihe ansehen, in welcher die Koeffizienten $c_{-1}, c_{-2}, \ldots$ sämtlich Null sind.

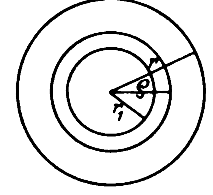


Fig. 19.

Es sei nun ϱ der Radius eines Kreises mit dem Mittelpunkte 0, dessen Peripherie ganz im Innern des Konvergenzringes von $P(z)$ verläuft (also $r_1 < \varrho < r$) (Fig. 19).

Längs der Peripherie dieses Kreises ist $P(z)$ und folglich auch der absolute Betrag $|P(z)|$ von $P(z)$ eine stetige Funktion. Folglich besitzt $|P(z)|$ auf der Kreisperipherie ein endliches Maximum, so daß für jeden Punkt z der Kreisperipherie

$$|P(z)| \leqq M \tag{4}$$

ist, unter M eine endliche nicht negative Zahl verstanden. ***Es besteht nun der ebenso merkwürdige wie wichtige Satz, daß für jeden Index n die Ungleichung***

$$|c_n| \cdot \varrho^n \leqq M \tag{5}$$

gilt, wenn längs der Kreisperipherie $|z| = \varrho$ ***die Ungleichung (4) erfüllt ist.***

Wir beweisen diesen Satz zunächst für den Index $n = 0$[1]).

[1]) Einen anderen Beweis siehe 5. Kap., § 7.

Da die Reihen $\mathfrak{P}(z)$ und $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right)$ längs der Peripherie des Kreises $|z| = \varrho$ gleichmäßig konvergieren, so können wir m und n so bestimmen, daß in der Gleichung

$$P(z) = \sum_{-m}^{n} c_k z^k + \delta \tag{6}$$

der Wert von δ der Ungleichung

$$|\delta| < \varepsilon \tag{7}$$

genügt für jeden Wert von z, dessen absoluter Betrag gleich ϱ ist. Dabei bedeutet, wie gewöhnlich, ε eine beliebig klein gewählte positive Zahl. Es ist dann

$$f(z) = c_0 + \sum_{k=-m}^{n}{}' c_k z^k = P(z) - \delta \tag{8}$$

für alle diese Werte z absolut kleiner als $M + \varepsilon$, also

$$|f(z)| < M + \varepsilon. \tag{9}$$

Das Komma an dem Summenzeichen in (8) soll andeuten, daß bei der Summation über k der Wert $k = 0$ auszuschließen ist. Wir wählen etzt irgendeine Zahl ξ vom absoluten Betrage 1, die jedoch so beschaffen sein soll, daß keine ganzzahlige positive und negative Potenz von ξ gleich 1 wird. (Die *Existenz* derartiger Zahlen ξ wollen wir nachher nachweisen.) Sei dann s eine positive ganze Zahl und

$$z_0 = \varrho, \quad z_1 = \xi\varrho, \quad z_2 = \xi^2\varrho, \quad \ldots, \quad z_{s-1} = \xi^{s-1}\varrho,$$

so sind dies s Punkte auf dem Kreise $|z| = \varrho$, und wir finden leicht

$$\frac{f(z_0) + f(z_1) + \ldots + f(z_{s-1})}{s} = c_0 + \frac{1}{s} \sum_{-m}^{n}{}' c_k \varrho^k \cdot \frac{\xi^{ks} - 1}{\xi^k - 1}. \tag{10}$$

Nun ist

$$\left| \sum_{-m}^{n}{}' c_k \varrho^k \frac{\xi^{ks} - 1}{\xi^k - 1} \right| \leqq \sum_{-m}^{n}{}' \left| \frac{c_k \varrho^k}{\xi^k - 1} \right| (|\xi|^{ks} + 1) = 2 \cdot \lambda,$$

wo

$$\lambda = \sum_{-m}^{n}{}' \left| \frac{c_k \varrho^k}{\xi^k - 1} \right|$$

von s unabhängig ist. Hieraus und aus (10) folgt

$$|c_0| \leqq \frac{|f(z_0)| + |f(z_1)| + \ldots + |f(z_{s-1})|}{s} + \frac{2\lambda}{s} < M + \varepsilon + \frac{2\lambda}{s}.$$

Da wir s beliebig groß und ε beliebig klein annehmen dürfen, so folgt schließlich

$$|c_0| \leqq M. \tag{11}$$

Betrachten wir jetzt

$$z^{-n} P(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^{k-n},$$

so ist in dieser Reihe c_n das von z freie Glied. Ferner ist längs des Kreises $|z| = \varrho$

$$|z^{-n} P(z)| \leqq \varrho^{-n} M.$$

Folglich gilt nach (11)

$$|c_n| \leqq \varrho^{-n} M,$$

woraus die zu beweisende Ungleichung (5) unmittelbar folgt.

Es erübrigt noch die Existenz von Zahlen ξ nachzuweisen, deren absoluter Betrag gleich 1 ist, ohne daß irgendeine Potenz von ξ mit ganzzahligem positiven Exponenten den Wert 1 besitzt.

Eine solche ist z. B. die Zahl $\xi = \frac{2-i}{2+i}$.

Wäre nämlich $\xi^n = 1$, so folgte

$$(2-i)^n = (2+i)^n = (2-i+2i)^n = (2i)^n + n(2-i)(2i)^{n-1} + \ldots$$

und hieraus

$$(2i)^n = (2-i)(A+Bi),$$

wo A und B ganze Zahlen bedeuten. Nimmt man die Quadrate der absoluten Beträge der beiden Seiten, so ergibt sich

$$4^n = 5(A^2+B^2),$$

eine Gleichung, die einen Widerspruch involviert.

3. Kapitel.

Der Begriff der analytischen Funktion.

§ 1. Monogene Systeme von Potenzreihen.

Es sei $\mathfrak{P}(z/a)$ eine Potenzreihe

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

mit nicht verschwindendem Konvergenzradius. Dieselbe besitzt unendlich viele unmittelbare Fortsetzungen. Diese haben ihrerseits wieder unmittelbare Fortsetzungen usf.

Alle auf diese Weise entstehenden Potenzreihen nennen wir „*Fortsetzungen*" der Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/a)$, so daß also $\mathfrak{P}(z/b)$ eine Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z/a)$ heißt, wenn entweder $\mathfrak{P}(z/b)$ in früherem Sinne eine unmittelbare Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z/a)$ oder das Endglied einer Reihe

$$\mathfrak{P}(z/a),\ \mathfrak{P}(z/a'),\ \mathfrak{P}(z/a''),\ \ldots,\ \mathfrak{P}(z/a^{(n-1)}),\ \mathfrak{P}(z/b)$$

ist, in welcher jedes Glied eine unmittelbare Fortsetzung des vorhergehenden ist.

Nach den Sätzen, die wir früher kennen lernten, können wir den Begriff der Fortsetzung auch so fassen:

Jede aus einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/a)$ durch eine oder mehrere Umbildungen entstehende Potenzreihe heißt eine Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z/a)$.

Ferner leuchtet unmittelbar ein, daß die Reihe $\mathfrak{P}(z/a)$ Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z/b)$ ist, wenn letztere Reihe Fortsetzung der ersteren ist.

Ein solches unendliches System von Potenzreihen, welches aus einer Reihe $\mathfrak{P}(z/a)$ und allen ihren Fortsetzungen besteht, nennen wir ein *„monogenes System von Potenzreihen“*.

Wir behaupten, daß jede beliebige in einem solchen System enthaltene Potenzreihe als erzeugende Reihe angesehen werden kann, daß also die Reihe $\mathfrak{P}(z/a)$ keine ausgezeichnete Stellung in dem System einnimmt. Diese Behauptung läßt sich offenbar auch so aussprechen: *Jede Potenzreihe des Systems ist eine Fortsetzung jeder anderen.*

Sind nämlich $\mathfrak{P}(z/b)$ und $\mathfrak{P}(z/c)$ irgend zwei Potenzreihen des aus der Reihe $\mathfrak{P}(z/a)$ erzeugten Systems, so ist $\mathfrak{P}(z/c)$ eine Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z/a)$ und $\mathfrak{P}(z/a)$ eine Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z/b)$. Folglich ist auch $\mathfrak{P}(z/c)$ eine Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z/b)$, w. z. b. w.

Wir bemerken schließlich noch, daß wir in ein uns vorliegendes monogenes System von Potenzreihen auch jede Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/\infty)$ aufnehmen, von welcher eine Fortsetzung in dem Systeme vorkommt. Dabei ist unter einer Fortsetzung einer Reihe $\mathfrak{P}(z/\infty)$ jede Reihe zu verstehen, die aus $\mathfrak{P}(z/\infty)$ durch eine oder mehrere Umbildungen hervorgeht. — Aus vorstehendem ergibt sich der evidente Satz:

Ein System von Potenzreihen bildet ein monogenes System, wenn

1. *jede Potenzreihe des Systems eine Fortsetzung jeder andern ist, und*
2. *jede Umbildung einer Potenzreihe des Systems ebenfalls zum System gehört.*

§ 2. Definition der analytischen Funktion.

Jedes monogene System von Potenzreihen definiert eine bestimmte Funktion $f(z)$ der komplexen Variablen z. Ist z_0 irgendein Wert von z, so betrachten wir die Potenzreihen, deren Konvergenzkreis z_0 in sich aufnimmt. Die Werte, welche diese Potenzreihen für $z = z_0$ annehmen, ordnen wir dem Werte z_0 zu. Dadurch ist eine bestimmte Funktion $f(z)$ von z erklärt, die für $z = z_0$ *eindeutig oder mehrdeutig ist,* je nachdem die genannten Potenzreihen für $z = z_0$ alle den nämlichen Wert annehmen oder nicht. Offenbar können wir die Werte dieser Funktion, die einem bestimmten Argumente z_0 entsprechen, auch so definieren:

Man betrachte die dem monogenen System angehörenden Potenzreihen $\mathfrak{P}(z/z_0)$. Die konstanten Glieder dieser Potenzreihen sind dann die Werte der Funktion $f(z)$ für $z = z_0$.

Diese Definition halten wir auch noch für $z_0 = \infty$ fest. Wenn also dem Systeme von Potenzreihen auch eine oder mehrere Potenz-

reihen $\mathfrak{P}(z/\infty)$ angehören, so sollen die konstanten Glieder dieser Potenzreihen die Werte der Funktion $f(z)$ für $z = \infty$ sein.

Eine Funktion von z heißt eine analytische Funktion, wenn sie in dieser Weise durch ein monogenes System von Potenzreihen erklärt werden kann. Jede Reihe dieses Systems heißt ein „Element" der Funktion $f(z)$.

Hierbei ist nun noch folgendes zu beachten: Liegt uns ein monogenes System von Potenzreihen vor, so ist es denkbar, daß ein bestimmt fixierter Wert z_0 von z überhaupt nicht in den Konvergenzkreis irgendeiner Potenzreihe des Systems hineinfällt. Dann ist die betreffende Funktion $f(z)$ für $z = z_0$ *nicht definiert.*

Die Gesamtheit derjenigen Werte z_0, die ins Innere des Konvergenzkreises von Potenzreihen des monogenen Systems fallen und für die also auch dem System angehörende Reihen $\mathfrak{P}(z/z_0)$ existieren, bezeichnen wir als den *„Stetigkeitsbereich"* der Funktion $f(z)$. Und zwar soll jeder Punkt so oft dem Stetigkeitsbereich zugezählt werden, als es *verschiedene* Potenzreihen $\mathfrak{P}(z/z_0)$ des monogenen Systems gibt.

Dabei ist der Fall nicht ausgeschlossen, daß zwei verschiedene Potenzreihen $\mathfrak{P}(z/z_0)$ dasselbe konstante Glied haben, so daß ihnen ein und derselbe Wert $f(z_0)$ entspricht.

Aber man erkennt leicht, daß dieses nur für mehrdeutige Funktionen eintreten kann, daß also folgender Satz gilt:

Ist die analytische Funktion $f(z)$ durchgehends eindeutig, so ist jeder Punkt z_0 ihres Stetigkeitsbereichs nur einfach zu zählen; die Funktion heißt dann schlechthin „eindeutige Funktion".

Angenommen, es wären $\mathfrak{P}(z/z_0)$ und $\mathfrak{P}_1(z/z_0)$ zwei verschiedene Funktionselemente von $f(z)$, so würden in einer genügend kleinen Umgebung der Stelle z_0 für jeden von z_0 verschiedenen Punkt z_1 die beiden Potenzreihen verschiedene Werte besitzen und daher $f(z)$ für jeden solchen Punkt z_1 mindestens zweideutig sein, entgegen der Annahme.

§ 3. Eindeutige Zweige einer analytischen Funktion.

Betrachten wir irgendein System Σ von Punkten in der komplexen Zahlenebene oder auf der Zahlenkugel, so kann sich ein beliebig fixierter Punkt a auf drei Arten gegen die Punktmenge verhalten.

Entweder gehören *alle* Punkte einer genügend kleinen Umgebung des Punktes a der Menge Σ an.

Oder es gehört *kein* Punkt einer genügend kleinen Umgebung des Punktes a der Menge Σ an.

Oder endlich es fällt in jede noch so kleine Umgebung des Punktes a sowohl mindestens ein Punkt, der zur Menge gehört, wie auch mindestens ein Punkt, der nicht zur Menge gehört.

Im ersten Falle sagen wir, a liege im Innern der Menge Σ oder sei ein *„innerer"* Punkt von Σ; im zweiten Falle, a liege außerhalb der Menge Σ oder sei ein *„äußerer"* Punkt von Σ; im dritten Falle endlich sagen wir, a liege an der *Grenze* von Σ oder sei ein *Begrenzungspunkt* von Σ. Ein Punkt a heiße ein *„isolierter"* Begrenzungspunkt der Menge Σ, wenn in einer genügend kleinen Umgebung von a der Punkt a der einzige Punkt ist, der nicht zur Menge Σ gehört.

Für uns sind nun in der Folge solche Punktmengen Σ von Wichtigkeit, die folgende Eigenschaften haben:

Erstens: alle ihre Punkte sind innere Punkte.

Zweitens: je zwei Punkte a und b der Menge lassen sich durch eine stetige Linie[1]) miteinander verbinden, deren Punkte sämtlich der Menge angehören.

Zur Abkürzung wollen wir jede Punktmenge, welche diese beiden Eigenschaften hat, eine *„Domäne"*[2]) nennen.

Betrachten wir z. B. eine geschlossene knotenlose stetige Linie C, welche die Zahlenebene in zwei Stücke zerlegt, so werden die Punkte im Innern eines solchen Stückes eine Domäne bilden. Dies gilt auch noch, wenn wir einzelne Punkte p', p'', ... und Linienstücke l im Innern des betreffenden Stückes ausscheiden (Fig. 20). Die Begrenzungspunkte einer solchen Domäne sind die Punkte der Linie C, die Punkte der ausgeschiedenen Linienstücke l und die ausgeschiedenen Punkte p', p'',... . Die letzteren sind isolierte Begrenzungspunkte der Domäne.

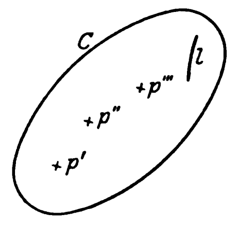


Fig. 20.

---

[1]) Unter einer *stetigen Kurve* in der Ebene der komplexen Variabeln $z = x + iy$ versteht man eine Menge von Punkten, deren Koordinaten x, y als stetige Funktionen

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

einer reellen Variabeln t in einem gegebenen Intervall $t_0 \leq t \leq t_1$ definiert sind. *Geschlossen* heißt die Kurve, wenn

$$\varphi(t_0) = \varphi(t_1), \qquad \psi(t_0) = \psi(t_1)$$

ist, *einfach* oder *knotenlos*, wenn für kein anderes Wertepaar $t = t'$, $t = t''$ die zugehörigen Punkte zusammenfallen.

Eine einfach geschlossene stetige Kurve zerlegt die Ebene stets in zwei Gebiete. Den Inhalt dieses *„Jordanschen Kurvensatzes"*, der eines arithmetischen Beweises fähig ist, müssen wir hier als anschaulich gegeben postulieren. (A. d. H.)

[2]) In der Literatur wird sonst statt „Domäne" meist „offenes Gebiet" oder „offener Bereich" oder auch schlechthin „Gebiet" bzw. „Bereich" gesagt. (A.d.H.)

Endlich wollen wir noch folgende Terminologie bezüglich der Fortsetzung einer Potenzreihe einführen. Wenn wir die Fortsetzung $\mathfrak{P}(z/b)$ der Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/a)$ dadurch herleiten, daß wir die Potenzreihen

$$\mathfrak{P}(z/a),\quad \mathfrak{P}(z/a'),\quad \mathfrak{P}(z/a''),\quad \ldots,\quad \mathfrak{P}(z/a^{(n)}),\quad \mathfrak{P}(z/b)$$

bilden, von denen jede eine Umbildung der vorhergehenden ist, so wollen wir sagen, die Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z/a)$ sei durch *Vermittelung der Stellen* a', a'', $\ldots$, $a^{(n)}$ erfolgt.

Es sei jedem Punkte z einer Domäne D ein bestimmter endlicher Wert w nach irgendeinem Gesetze zugeordnet, so daß also w als Funktion von z in der Domäne D gegeben ist. Wenn nun die Werte der Funktion w für eine genügend kleine Umgebung jeder Stelle a der Domäne D durch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/a)$ darstellbar sind, so sagen wir, w sei regulär in D.

Dann können wir folgenden fundamentalen Satz beweisen:

Es gibt eine analytische Funktion $f(z)$, so daß für jedes z von D die Funktion $w(z)$ einen der Werte von $f(z)$ vorstellt. Wir nennen $w(z)$ einen in der Domäne D **eindeutigen Zweig** *von $f(z)$.*

Alles was wir zu beweisen haben, ist, daß die Potenzreihen $\mathfrak{P}(z/a)$ und $\mathfrak{P}(z/b)$, welche in den Umgebungen zweier beliebiger Punkte a und b der Domäne D die Werte von w darstellen, Fortsetzungen voneinander sind.

Es sei a ein Punkt der Domäne D und r der Radius des größten Kreises mit dem Mittelpunkt a, innerhalb dessen die Werte von w durch $\mathfrak{P}(z/a)$ darstellbar sind. Ist dann r für geeignetes a unendlich, so liegt b im Innern des Kreises (a, r), und $\mathfrak{P}(z/b) = w(z)$ ist Umbildung von $\mathfrak{P}(z/a)$. — Ist aber r endlich für jedes a, so zeigen wir zunächst, daß r eine *stetige* Funktion von a innerhalb der Domäne D ist. Es sei a ein beliebig fixierter Punkt der Domäne D. Ferner sei a' ein Punkt, dessen Entfernung d von a kleiner als $\frac{r}{2}$ ist (Fig. 21).

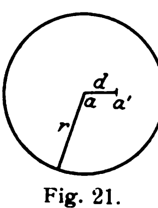


Fig. 21.

Da die Umbildung $\mathfrak{P}(z/a/a')$[1]) von $\mathfrak{P}(z/a)$ mindestens in dem Kreise mit dem Mittelpunkt a' und dem Radius $r - d$ die Werte von w darstellt, so ist $r' \geqq r - d$ oder $r - r' \leqq d$, wo r' dieselbe Bedeutung für a' hat, wie r für a. Da aber a im Innern des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}(z/a/a')$ liegt, so ist auch $r \geqq r' - d$ oder $r' - r \leqq d$. Es liegt also $r' - r$ zwischen $-d$ und $+d$, d. h. es ist

$$|r' - r| \leqq d.$$

Da d beliebig klein genommen werden kann, so ist also in der Tat r eine stetige Funktion von a.

[1]) $\mathfrak{P}(z/a/a')$ geht aus $\mathfrak{P}(z/a)$ hervor, indem $z - a$ durch $z - a' - (a - a')$ ersetzt und dann die Funktion nach Potenzen von $z - a'$ entwickelt wird. (A. d. H.)

Seien nun a und b irgend zwei Punkte der Domäne D. Wir verbinden dieselbe durch eine stetige Kurve, die ganz in D liegt. Da r sich längs dieser Linie stetig ändert, so besitzt r ein *Minimum* ϱ, welches den Wert von r für einen gewissen Punkt der Kurve ab darstellt und daher von Null verschieden ist.

Wir wählen nun auf der Kurve ab zwischen a und b die aufeinanderfolgenden Punkte $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, so daß in der Reihe

$$a\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n\, b$$

der Abstand zweier aufeinanderfolgender Punkte $< \varrho$ ist (Fig. 22).

Die Potenzreihen

$$\mathfrak{P}(z/a), \quad \mathfrak{P}(z/a_1), \quad \mathfrak{P}(z/a_2), \quad \ldots, \quad \mathfrak{P}(z/a_n), \quad \mathfrak{P}(z/b),$$

welche in der Umgebung jener Punkte die Werte der Funktion w darstellen, sind dann so beschaffen, daß jede durch Umbildung der vorhergehenden erzeugt werden kann, da der Konvergenzkreis jeder dieser Reihen den Mittelpunkt des Konvergenzkreises der nächstfolgenden Reihe in seinem Innern enthält. Es ist daher wirklich, wie gezeigt werden sollte, $\mathfrak{P}(z/b)$ eine Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z/a)$.

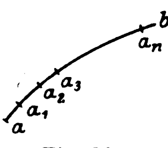


Fig. 22.

§ 4. Beispiele.

Betrachten wir eine rationale Funktion

$$\text{(1)} \qquad \frac{h(z)}{g(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + \ldots + b_r z^r}{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n},$$

deren Zähler vom r^{ten} Grade, deren Nenner vom n^{ten} Grade sei, so besitzt dieselbe für jeden endlichen Wert von z, für welchen der Nenner nicht verschwindet, einen bestimmten endlichen Wert w. Sie definiert also in der komplexen Zahlenebene, wenn wir die Wurzeln der Gleichung

$$\text{(2)} \qquad a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = 0$$

ausschließen, eine eindeutige Funktion von z.

Ohne den Fundamentalsatz der Algebra vorauszusetzen, kann man einsehen, daß die Gleichung (2) höchstens n Wurzeln besitzt. Denn ist $z = z_1$ eine Wurzel von (2), so ist die linke Seite $g(z)$ ohne Rest durch $(z - z_1)$ teilbar; würden nun $z = z_1, z = z_2, \ldots, z = z_{n+1}$ $n + 1$ verschiedene Wurzeln von (2) sein, so würde die ganze Funktion $g(z)$ durch die ganze Funktion $(n + 1)^{\text{ten}}$ Grades $(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_{n+1})$ teilbar sein, was widersinnig ist. Man darf außerdem voraussetzen, daß keine Wurzel von (2) zugleich Wurzel von $h(z) = 0$ ist, weil sonst $h(z)$ und $g(z)$ einen gemeinsamen Faktor hätten. Von dem größten gemeinsamen Teiler kann man aber $g(z)$ und $h(z)$ von vornherein befreit annehmen.

Betrachten wir nun die ganze Zahlenebene oder lieber gleich die Zahlenkugel mit Ausschluß der etwa vorhandenen Nullstellen des Nenners $g(z)$ und des unendlich fernen Punktes, so haben wir eine Domäne D vor uns, in welcher $w = \frac{h(z)}{g(z)}$ einen eindeutigen Zweig einer analytischen Funktion vorstellt. Denn ist a ein beliebiger Punkt der Domäne D, so ist

$$w = \frac{h(z)}{g(z)} = \frac{h(a + (z-a))}{g(a + (z-a))} = \frac{\mathfrak{P}_1(z-a)}{\mathfrak{P}_2(z-a)},$$

wo $\mathfrak{P}_1(z-a)$ und $\mathfrak{P}_2(z-a)$ im Endlichen abbrechende Potenzreihen (nämlich ganze rationale Funktionen von $z-a$) vorstellen, von welchen die zweite für $z = a$ nicht Null ist. Folglich ist nach den früheren Sätzen

$$w = \mathfrak{P}(z-a) \tag{3}$$

in einer genügend kleinen Umgebung der Stelle a.

Es ist aber $\frac{h(z)}{g(z)}$ eine *eindeutige* analytische Funktion von z. Denn die Potenzreihen (3), welche wechselnden Werten von a entsprechen, bilden ein *„monogenes System"*. Daß je zwei der Potenzreihen (3) Fortsetzungen voneinander sind, folgt aus dem schon benutzten Satze, nach welchem w einen eindeutigen Zweig einer analytischen Funktion darstellt. Daß aber auch, unter $\mathfrak{P}(z|a)$ eine der Potenzreihen (3) verstanden, *jede* Fortsetzung derselben zu den Potenzreihen (3) gehört, geht unmittelbar daraus hervor, daß jede Umbildung von $\mathfrak{P}(z|a)$ in ihrem Konvergenzkreise den Wert von $\frac{h(z)}{g(z)}$ darstellt. Durch fortgesetzte Umbildungen kommt man also aus dem System derjenigen Potenzreihen, die $\frac{h(z)}{g(z)}$ in der Umgebung irgendeines Punktes der Zahlenkugel darstellen, in der Tat nicht heraus. In dem System dieser Potenzreihen kommt auch eine dem Punkte ∞ entsprechende Reihe $\mathfrak{P}(z|a)$ vor, wenn $n \geqq r$ ist. Denn dann hat man

$$\frac{h(z)}{g(z)} = \frac{b_0\left(\frac{1}{z}\right)^r + \cdots + b_r}{a_0\left(\frac{1}{z}\right)^n + \cdots + a_n} \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{n-r} = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Ist dagegen $n < r$, so gibt es eine solche Reihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ nicht.

Zusammenfassend können wir sagen:

Eine rationale Funktion $\frac{h(z)}{g(z)}$ ist eine eindeutige analytische ***Funktion.*** *Der Stetigkeitsbereich umfaßt alle Werte von z mit* ***Ausschluß*** *der Nullstellen des Nenners $g(z)$ und — wenn der Grad des* ***Zählers*** *größer als der des Nenners ist — mit Ausschluß von $z = \infty$.*

Da an den ausgeschlossenen Stellen $\frac{h(z)}{g(z)}$ unendlich wird, so kann kein Funktionselement existieren, welches eine dieser Stellen im Innern seines Konvergenzkreises enthielte. Die ausgeschlossenen Stellen bilden also notwendig die Begrenzung des Stetigkeitsbereiches.

Als zweites Beispiel wollen wir eine beständig konvergierende Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

betrachten. Dieselbe definiert eine eindeutige analytische Funktion, deren Stetigkeitsbereich durch alle Werte von z mit eventuellem Ausschluß des Wertes $z = \infty$ gebildet wird.

In der Tat ist jede Umbildung $\mathfrak{P}(z/a)$ von $\mathfrak{P}(z)$ ebenfalls eine beständig konvergierende Reihe, und diese Umbildungen bilden daher das aus $\mathfrak{P}(z)$ entspringende monogene System von Potenzreihen.

Wir wollen nun zeigen, daß, abgesehen von dem Falle, wo $\mathfrak{P}(z)$ sich auf das Anfangsglied c_0 reduziert, der Punkt ∞ *nicht* zu dem Stetigkeitsbereich der durch $\mathfrak{P}(z)$ definierten Funktion gehört.

Zu diesem Zwecke beweisen wir den Satz:

Wenn die beständig konvergierende Reihe $\mathfrak{P}(z)$ sich nicht auf ihr Anfangsglied reduziert, so gibt es in jeder noch so kleinen Umgebung des Punktes ∞ mindestens einen Wert von z, für welchen

$$|\mathfrak{P}(z)| > G$$

wird, unter G eine beliebig groß vorgeschriebene positive Zahl verstanden.

Wir betrachten eine Umgebung des Punktes ∞, d. h. das Äußere eines Kreises mit dem Mittelpunkt 0. Sei ferner G eine beliebig vorgeschriebene positive Zahl und es werde angenommen, daß

$$|\mathfrak{P}(z)| \leqq G$$

sei, für jeden Punkt z in der betrachteten Umgebung des Punktes ∞. Wenn dann r den Radius eines Kreises mit dem Mittelpunkt 0 bedeutet, dessen Peripherie ganz in jener Umgebung verläuft (Fig. 23), so ist

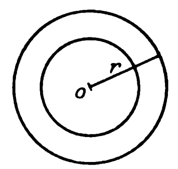


Fig. 23.

$$|c_n| r^n \leqq G \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

nach dem Hilfssatz in § 9 des vorigen Kapitels.

Hieraus folgt

$$|c_n| \leqq \frac{G}{r^n}.$$

Da wir nun r beliebig groß annehmen können, so ist $|c_n|$, falls $n > 0$, kleiner oder gleich einer beliebig klein zu machenden positiven Größe und daher

$$c_n = 0.$$

Folglich muß sich dann $\mathfrak{P}(z)$ auf das erste Glied c_0 reduzieren.

Damit ist offenbar unser Satz bewiesen.

Wenn nun $z = \infty$ dem Stetigkeitsbereiche der durch $\mathfrak{P}(z)$ definierten Funktion angehören würde, so hätte man in einer genügend kleinen Umgebung des Punktes ∞

$$\mathfrak{P}(z) = k_0 + \frac{k_1}{z} + \frac{k_2}{z^2} + \cdots.$$

Für große Werte von z würde $\mathfrak{P}(z)$ wenig von k_0 verschieden sein und daher $|\mathfrak{P}(z)|$ unter einer endlichen positiven Zahl bleiben. Folglich gehört, wie behauptet wurde, $z = \infty$ nur dann dem Stetigkeitsbereiche unserer Funktion an, wenn $\mathfrak{P}(z) = c_0$ ist und also die Funktion sich auf eine Konstante reduziert.

Eine analytische Funktion, welche durch eine beständig konvergierende Reihe $\mathfrak{P}(z)$ definiert werden kann, nennt man nach *Weierstraß* eine *„ganze Funktion“*. Wenn die Reihe $\mathfrak{P}(z)$ abbricht, so ist die betreffende ganze Funktion *„rational“*, im andern Falle *„transzendent“*.

Als letztes Beispiel wollen wir den Quotienten zweier beständig konvergierenden Reihen

$$w = \frac{\mathfrak{P}_1(z)}{\mathfrak{P}(z)}$$

betrachten. Zunächst beweisen wir den folgenden wichtigen Satz:

Die Nullstellen einer beständig konvergierenden Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ können keine im Endlichen liegende Häufungsstelle haben.

Betrachten wir nämlich einen beliebigen endlichen Wert $z = a$, so ist

$$\mathfrak{P}(z) = \mathfrak{P}_1(z - a),$$

wo die rechte Seite die Umbildung von $\mathfrak{P}(z)$ für $z = a$ bedeutet. Nun wissen wir, daß in einer genügend kleinen Umgebung von $z = a$ die Reihe $\mathfrak{P}_1(z - a)$ nicht verschwindet, außer etwa für $z = a$. Daher ist also $z = a$ keine Häufungsstelle der Nullstellen von $\mathfrak{P}(z)$.

Wenn wir nun aus der Zahlenkugel die Nullstellen von $\mathfrak{P}(z)$, wenn solche existieren, und den Punkt ∞ ausscheiden, so entsteht eine Domäne, in welcher w in der Umgebung jeder Stelle als Potenzreihe darstellbar ist. Daraus schließen wir wieder, daß der *Quotient* zweier beständig konvergierender Potenzreihen eine eindeutige analytische Funktion darstellt, deren Stetigkeitsbereich die Zahlenkugel ist mit Ausschluß gewisser Punkte. Die letzteren besitzen, wenn sie in unendlicher Anzahl vorhanden sind, die eine Häufungsstelle ∞.

§ 5. Die Elementarzweige und ihre singulären Punkte.

Eine einzelne Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/a)$, welche dem monogenen Systeme angehört, das die analytische Funktion $f(z)$ definiert, bezeichneten wir als ein „*Element*“ der Funktion $f(z)$. Im Innern ihres Konvergenzkreises definiert die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/a)$ einen eindeutigen Zweig von $f(z)$; wir wollen einen solchen Zweig einen „*Elementarzweig*“ nennen.

Betrachten wir einen Punkt s auf dem Konvergenzkreise von $\mathfrak{P}(z/a)$, so gibt es entweder eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/s)$ mit nicht verschwindendem Konvergenzradius, die eine unmittelbare Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z/a)$ ist, oder es gibt keine derartige Potenzreihe. Im ersten Falle wollen wir s einen *regulären*, im letzteren Falle einen *singulären* Punkt des Elementarzweiges nennen. Wir beweisen nun in diesem Paragraphen den fundamentalen Satz:

Auf der Peripherie des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}(z/a)$ liegt immer mindestens ein singulärer Punkt.

Beim Beweise setzen wir der Einfachheit halber $a = 0$. Ist a von Null verschieden, so sind die nachfolgenden Betrachtungen nur unwesentlich zu modifizieren.

Es sei also

$$\mathfrak{P}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

eine Potenzreihe, r ihr Konvergenzradius und K ihr Konvergenzkreis.

Nehmen wir nun an, daß nicht nur im Innern, sondern auch auf der Peripherie des Konvergenzkreises jedem Punkte a eine unmittelbare Fortsetzung $\mathfrak{P}(z/a)$ von $\mathfrak{P}(z)$ entspricht, so wird der Konvergenzradius r_a dieser Fortsetzung eine stetige Funktion von a sein. Dies folgt aus einer ähnlichen Betrachtung, wie wir sie in § 3 angestellt haben.

Wenn nämlich a' genügend nahe bei a liegt, so ist $|r_{a'} - r_a| \leqq d$, wo d die Entfernung $|a' - a|$ der beiden Punkte voneinander bedeutet. Da nun die Punkte a im Innern und auf der Peripherie unseres Kreises eine abgeschlossene Menge[1]) bilden, so besitzt r_a ein Minimum ϱ, welches von Null verschieden ist.

Hieraus würde nun, wie wir zeigen werden, weiter folgen, daß der Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(z)$ nicht r, sondern $> r$ wäre.

Wir beschreiben zu dem Zwecke um den Nullpunkt einen Kreis K' mit dem Radius $r + \sigma$, wo σ eine positive Zahl $< \varrho$ bedeutet. Den Ring zwischen K und K' bezeichnen wir mit C, wobei wir die den Ring begrenzenden Kreisperipherien mit zu dem Ringe zählen wollen.

[1]) Eine Punktmenge heißt *abgeschlossen*, wenn sie ihre Häufungspunkte oder Grenzpunkte enthält. Eine auf einer abgeschlossenen Punktmenge *stetige* Funktion besitzt ein *Maximum* und ein *Minimum* (A. d. H.).

Für das Innere und die Peripherie des Kreises K' definieren wir nun eine eindeutige Funktion von z folgendermaßen:

Liegt z im Innern des Konvergenzkreises K von $\mathfrak{P}(z)$, so soll

$$f(z) = \mathfrak{P}(z)$$

sein. Gehört dagegen z dem Ringe C an, so bestimmen wir einen Punkt a im Innern von K so, daß sein Abstand von z kleiner als ϱ ist (Fig. 24). Dann fällt z ins Innere des Konvergenzkreises der Umbildung $\mathfrak{P}(z/a)$ von $\mathfrak{P}(z)$, und wir setzen nun fest, daß

$$f(z) = \mathfrak{P}(z/a)$$

genommen werden soll. Der hierdurch definierte Wert $f(z)$ ist unabhängig von der Wahl des Punktes a. Denn nehmen wir statt a einen andern Punkt a' zu Hilfe, so daß der Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(z/a')$ ebenfalls den betrachteten Punkt z umfaßt, so sind $\mathfrak{P}(z/a)$ und $\mathfrak{P}(z/a')$ unmittelbare Fortsetzungen voneinander und daher

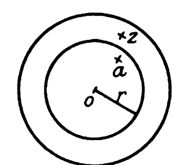


Fig. 24.

$$\mathfrak{P}(z/a') = \mathfrak{P}(z/a).$$

Die so definierte Funktion $f(z)$ ist (für den Kreis K' inklusive seiner Peripherie) eine eindeutige und *stetige* Funktion. Folglich hat $|f(z)|$ ein endliches ***Maximum***, welches wir mit g bezeichnen wollen.

Nun sei a wieder ein Punkt im Innern des Kreises K. Wir beschreiben um a als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius σ. Längs der Peripherie dieses Kreises ist

$$f(z) = \mathfrak{P}(z/a) = \mathfrak{P}(a) + \mathfrak{P}'(a)\frac{z-a}{1!} + \dots + \mathfrak{P}^{(n)}(a)\frac{(z-a)^n}{n!} + \dots$$

absolut beständig $\leqq g$. Folglich gilt

$$\left|\frac{1}{n!}\mathfrak{P}^{(n)}(a)\right|\sigma^n \leqq g \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Es ist aber

$$\frac{1}{n!}\mathfrak{P}^{(n)}(a) = \sum_{k=n}^{\infty}{}' \frac{k!}{n!\,(k-n)!}\,c_k\,a^{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty}{}' \binom{k}{n} c_k\,a^{k-n}.$$

Lassen wir a auf einem Kreise mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius $\alpha < r$ wandern, so ist dabei beständig

$$\left|\frac{\mathfrak{P}^{(n)}(a)}{n!}\right| \leqq \frac{g}{\sigma^n}$$

und folglich

$$\binom{k}{n}\,|c_k|\,\alpha^{k-n} \leqq \frac{g}{\sigma^n}.$$

Da wir α beliebig dicht bei r nehmen können, ist

$$|c_k|\binom{k}{n} r^{k-n}\,\sigma^n \leqq g.$$

Wir nehmen $n = 0, 1, 2, \ldots, k$ und addieren; so kommt

$$|c_k|(r+\sigma)^k \leqq (k+1)g$$

und folglich

$$\mathfrak{P}(z) \ll \sum_{k=0}^{\infty} g(k+1)\left(\frac{z}{r+\sigma}\right)^k.$$

Die rechte Seite konvergiert aber so weit wie

$$\sum g\left(\frac{z}{r+\sigma}\right)^k,$$

also für $|z| < r + \sigma$.

Ebensoweit müßte auch $\mathfrak{P}(z)$ konvergieren.

Da dies gegen die Voraussetzung ist, weil K der Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}(z)$ sein sollte, so ist die Annahme unzulässig, daß auf der Peripherie von K *kein singulärer* Punkt liege. Unser Satz ist also nunmehr bewiesen.

Betrachten wir, um ein Beispiel für die Anwendung dieses Satzes zu geben, den Quotienten zweier beständig konvergierender Potenzreihen

$$\frac{\mathfrak{P}_1(z)}{\mathfrak{P}(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots},$$

wobei wir a_0 von Null verschieden voraussetzen wollen. Der Einfachheit halber wollen wir überdies annehmen, daß $\mathfrak{P}(z)$ und $\mathfrak{P}_1(z)$ keine gemeinsame Nullstelle besitzen.

Wir wissen, daß in der Umgebung der Stelle $z = 0$ eine Gleichung

$$\frac{\mathfrak{P}_1(z)}{\mathfrak{P}(z)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots = \mathfrak{P}_2(z)$$

gilt. Welches ist nun der Konvergenzkreis der Reihe $\mathfrak{P}_2(z)$?

Auf dessen Peripherie muß ein Punkt s vorhanden sein, für welchen $\mathfrak{P}(z)$ verschwindet. Denn sonst würde in der Umgebung jedes Punktes s der Bruch $\frac{\mathfrak{P}_1(z)}{\mathfrak{P}(z)}$ in die Form einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(z|s)$ gesetzt werden können, welche offenbar eine unmittelbare Fortsetzung von $\mathfrak{P}_2(z)$ wäre. Da der Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}_2(z)$ im Innern keine Nullstelle von $\mathfrak{P}(z)$ enthalten kann, weil für eine solche $\mathfrak{P}_2(z)$ unendlich würde, während doch $\mathfrak{P}_2(z)$ im Innern des Konvergenzkreises stets einen endlichen Wert besitzt, so folgt, *daß der Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}_2(z)$ derjenige Kreis mit dem Mittelpunkt 0 ist, dessen Peripherie durch die dem Punkte $z = 0$ nächstgelegene Nullstelle von $\mathfrak{P}(z)$ hindurchgeht.*

Entwickeln wir beispielsweise

$$\frac{z^2}{1 - 6z - z^3}$$

nach Potenzen von z, so erhalten wir

$$\frac{z^2}{1-6z-z^2} = z^2 + 6z^3 + 37z^4 + \dots .$$

Diese Entwicklung ist gültig in demjenigen Kreise mit dem Mittelpunkt Null, der durch die dem Nullpunkt nächstgelegene Wurzel der Gleichung

$$z^2 + 6z - 1 = 0$$

geht. Die Wurzeln sind

$$z_1 = -3 + \sqrt{10}, \quad z_2 = -3 - \sqrt{10}.$$

Der Radius des in Betracht gezogenen Konvergenzkreises ist daher $\sqrt{10} - 3$.

§ 6. Der Fundamentalsatz der Algebra.

Wir wollen nun auf Grund der Untersuchung des vorigen Paragraphen einen sehr einfachen Beweis für den *Fundamentalsatz der Algebra* geben. Es sei

$$g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

eine ganze Funktion n^{ten} Grades, wobei $n > 0$, $a_n \neq 0$ vorausgesetzt werde.

Würde nun $g(z)$ für keinen Wert von z verschwinden, so wäre

$$(1) \qquad \frac{1}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots ,$$

wo die rechte Seite einen unendlich großen Konvergenzradius besitzt, also eine beständig konvergierende Reihe ist.

Da aber andererseits die linke Seite von (1) in einer gewissen Umgebung von $z = \infty$ in eine Potenzreihe von $\frac{1}{z}$ entwickelbar ist, weil die linke Seite ja in die Form

$$\frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + a_{n-2}\frac{1}{z^2} + \dots + a_0 \frac{1}{z^n}}$$

gesetzt werden kann, so muß nach § 4 die rechte Seite sich auf das Anfangsglied c_0 reduzieren. Die dann aus (1) folgende Gleichung

$$1 = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n)\, c_0$$

ist aber widersinnig. Folglich muß notwendig mindestens eine Wurzel der Gleichung $g(z) = 0$ existieren.

Hieraus leitet man in bekannter Weise den Satz ab, daß jede ganze Funktion n^{ten} Grades als Produkt von n Linearfaktoren darstellbar ist.

§ 7. Singuläre Punkte eines eindeutigen Zweiges.

Der *Stetigkeitsbereich* oder Definitionsbereich[1]) einer *eindeutigen* analytischen Funktion $f(z)$ ist eine Punktmenge, welche beiläufig bemerkt unter den Begriff einer Domäne fällt. Die Punkte an der Grenze des Stetigkeitsbereichs nennen wir die *singulären Punkte* der Funktion $f(z)$. Diese singulären Punkte bilden eine *abgeschlossene Menge,* d. h. eine Häufungsstelle von singulären Punkten ist ebenfalls ein singulärer Punkt. Dieser Satz ist nur ein spezieller Fall des allgemeinern:

Ist Σ irgendeine Punktmenge, so bilden die Punkte an der Grenze von Σ stets eine abgeschlossene Menge.

Ein Punkt p liegt an der Grenze von Σ, wenn in jeder Umgebung von p mindestens ein Punkt liegt, der zu Σ gehört, und auch mindestens ein Punkt, der nicht zu Σ gehört. (Vgl. S. 43.)

Ist nun a eine Häufungsstelle der Punkte $p_1, p_2, p_3, \ldots$, die ihrerseits an der Grenze von Σ liegen, so fallen in jede Umgebung von a Punkte p_k (und zwar in unendlicher Anzahl) hinein. Um einen solchen Punkt p_k können wir eine Umgebung (p_k) so klein abgrenzen, daß sie ganz im Inneren der betrachteten Umgebung von a liegt (Fig. 25). Daher wird in letztere mindestens ein Punkt, der zu Σ gehört, und mindestens ein Punkt, der nicht zu Σ gehört, hineinfallen, weil dieses für die Umgebung (p_k) gilt. Folglich ist a ebenfalls ein Punkt an der Grenze von Σ.

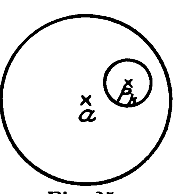


Fig. 25.

Betrachten wir nun einen singulären Punkt der Funktion $f(z)$, so wird derselbe entweder Häufungsstelle anderer singulärer Punkte sein oder nicht. Im letzteren Falle nennen wir ihn einen *„isolierten"* singulären Punkt. Ein isolierter singulärer Punkt ist also ein solcher, um welchen sich eine so kleine Umgebung abgrenzen läßt, daß in derselben kein weiterer singulärer Punkt der Funktion liegt.

Betrachten wir einen Elementarzweig $\mathfrak{P}(z/a)$ der eindeutigen analytischen Funktion $f(z)$, so ist *jeder singuläre Punkt s dieses Elementarzweiges auch ein singulärer Punkt von $f(z)$.* Denn da für den Punkt s keine Fortsetzung $\mathfrak{P}(z/s)$ von $\mathfrak{P}(z/a)$ existiert, so ist s selbst kein Punkt des Stetigkeitsbereiches von $f(z)$, und folglich ist s ein Punkt an der Grenze des Stetigkeitsbereiches.

Wenn wir daher die singulären Punkte einer eindeutigen Funktion kennen, so können wir sofort den Konvergenzkreis eines Funktionenelementes $\mathfrak{P}(z/a)$ angeben:

[1]) Vgl. zu diesen Ausführungen die mehr anschaulichen Betrachtungen im dritten Abschnitt, 4. Kap., § 4.

Der Kreis mit dem Mittelpunkt a, dessen Peripherie durch einen singulären Punkt geht, welcher a zunächst liegt, ist der Konvergenzkreis der Reihe $\mathfrak{P}(z/a)$.

Wir haben nun schließlich noch die Einteilung der singulären Punkte in *wesentlich singuläre* und *außerwesentlich singuläre* auseinanderzusetzen.

Wenn für einen singulären Punkt s eine Umgebung existiert, innerhalb welcher die Werte, welche der reziproke Wert $\frac{1}{f(z)}$ von $f(z)$ annimmt, durch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/s)$ darstellbar sind, so nennen wir s einen *außerwesentlich singulären Punkt* oder auch einen *„Pol"* von $f(z)$; im anderen Falle nennen wir s einen *wesentlich singulären* Punkt. Betrachten wir einen Pol s der Funktion $f(z)$ einmal näher In der Umgebung von s ist nach der gegebenen Definition eines Poles

$$(1)\quad \frac{1}{f(z)} = c_k(z-s)^k + c_{k+1}(z-s)^{k+1} + \ldots = (z-s)^k\,\mathfrak{P}(z-s),$$

wobei wir c_k als nicht verschwindend voraussetzen. Hier ist für den Fall $s=\infty$ unter $z-s$ der reziproke Wert von z, also $\frac{1}{z}$, zu verstehen. Nun folgt aus (1), daß in einer geeignet gewählten Umgebung von s

$$f(z) = \frac{1}{(z-s)^k}\cdot\frac{1}{\mathfrak{P}(z-s)} = \frac{1}{(z-s)^k}\cdot\mathfrak{P}_1(z-s)$$

oder, ausführlich geschrieben,

$$(2)\qquad f(z) = \frac{1}{(z-s)^k}\left(a_0 + a_1(z-s) + \ldots\right),\quad \left(a_0 = \frac{1}{c_k}\right)$$

ist. Daraus geht hervor, daß $k>0$ ist. Denn sonst würde $f(z)$ nach Potenzen von $z-s$ entwickelbar sein, also s entgegen der Voraussetzung nicht zu den singulären Punkten gehören.

Die Zahl k nennen wir die *Ordnung des Poles.* Lassen wir den Punkt z des Stetigkeitsbereiches in den Punkt s übergehen, so wird nach Gleichung (2) $f(z)$ unendlich groß und zwar derart, daß

$$\lim_{z=s}\left\{(z-s)^k f(z)\right\} = a_0$$

einen endlichen, von Null verschiedenen Wert erhält. Wir drücken diese Tatsache dadurch aus, daß wir sagen, $f(z)$ werde für $z=s$ von der *„k^{ten} Ordnung unendlich"*.

Setzen wir die Gleichung (2) in die Form

$$(3)\qquad f(z) = \frac{a_0}{(z-s)^k} + \frac{a_1}{(z-s)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{z-s} + a_k + \cdots,$$

so sehen wir, daß

$$f(z) - \left(\frac{a_0}{(z-s)^k} + \frac{a_1}{(z-s)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{z-s}\right) = a_k + a_{k+1}(z-s) + \cdots$$

in der Umgebung von s in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/s)$ entwickelbar ist und für $z = s$ endlich bleibt. Wir sagen deshalb, $f(z)$ werde an der Stelle s unendlich wie

$$(4) \qquad g\left(\frac{1}{z-s}\right) = \frac{a_0}{(z-s)^k} + \frac{a_1}{(z-s)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{k-1}}{z-s}.$$

Diese ganze Funktion von $\frac{1}{z-s}$ nennen wir den *„meromorphen"* Teil (oder *Hauptteil*) von $f(z)$ für den Pol s.

Die Definition der singulären Stelle läßt sich nun auch ohne weiteres auf den Fall übertragen, daß die Eindeutigkeit von $f(z)$ nicht für ihren ganzen Stetigkeitsbereich vorausgesetzt wird, sondern daß nur ein eindeutiger Zweig betrachtet wird.

Es sei F ein Stück der Zahlenebene, begrenzt von einer oder mehreren einfach geschlossenen Linien $L, L_1, L_2, \dots,$ die sämtlich einer Domäne D angehören. Im Innern von F mögen die isolierten Begrenzungspunkte $a_1, a_2, \dots, a_r$ der Domäne D liegen. Dagegen sollen alle übrigen inneren Punkte von F der Domäne D angehören. Wenn nun $f(z)$ eine in der Domäne D reguläre Funktion ist, so wollen wir sagen, *$f(z)$ sei auf der Fläche F regulär, abgesehen eventuell von den Punkten $a_1, a_2, \dots, a_r$.* Die letzteren Punkte nennen wir, falls in ihnen die Funktion $f(z)$ nicht auch noch regulär ist, *singuläre* Punkte von $f(z)$. Ist a ein beliebiger dieser singulären Punkte, so heißt er ein Pol, wenn $\frac{1}{f(z)}$ auch noch im Punkte $z = a$ regulär ist, im andern Fall heißt er wesentlich singulär. Ordnung und meromorpher Teil eines Poles werden genau wie oben definiert.

Aus der Gleichung (2) folgern wir endlich noch den wichtigen Satz:

Ein Pol ist stets eine isolierte singuläre Stelle.

In der Tat, betrachten wir irgendeine Stelle z_0 in derjenigen Umgebung von s, in welcher die Gleichung

$$f(z) = \frac{1}{(z-s)^k}(a_0 + a_1(z-s) + \dots) = \frac{\mathfrak{P}(z/s)}{(z-s)^k}$$

gilt, so können wir für eine geeignet gewählte Umgebung von z_0 die rechte Seite dieser Gleichung als Potenzreihe von $z - z_0$ darstellen. Folglich ist z_0 keine singuläre Stelle von $f(z)$.

Wir werden später (Kap. 5, § 7) den wichtigen Satz beweisen:

Ist in der Umgebung einer isolierten singulären Stelle die Funktion $f(z)$ eindeutig, so nimmt ihr absoluter Betrag dort beliebig große Werte an.

Im Gegensatz zu den singulären Stellen werden wir in der Folge jede Stelle des Stetigkeitsbereiches einer eindeutigen analytischen Funktion auch eine *„reguläre"* Stelle nennen.

§ 8. Die singulären Stellen der rationalen und der ganzen Funktionen.

Eine Funktion $f(z)$, die durch eine beständig konvergierende Reihe darstellbar ist, also eine sogenannte *„ganze Funktion"*, besitzt im Endlichen keine singuläre Stelle. Dieser Satz läßt sich auch umkehren:

Eine eindeutige analytische Funktion, die im Endlichen keine singuläre Stelle besitzt, ist eine ganze Funktion.

Denn der Konvergenzkreis jedes Funktionselementes muß sich ins Unendliche ausdehnen.

Für die Stelle ∞ kann, wie wir wissen, eine Entwicklung $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ nur dann existieren, wenn die beständig konvergierende Reihe sich auf eine Konstante reduziert. Also gilt:

Eine eindeutige Funktion[1], *die überhaupt keine singuläre Stelle besitzt, ist eine Konstante.*

Ist eine ganze Funktion $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ für alle endlichen z *beschränkt*, d. h. gibt es eine Konstante M derart, daß für alle endlichen z

$$|f(z)| \leqq M$$

ist, so gilt nach dem Hilfssatz von Kap. 2 § 9 die Ungleichung

$$|c_n| \varrho^n \leqq M \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

für beliebig große Werte von ϱ; dies ist aber nur möglich, wenn $c_n = 0$ ist:

Jede beschränkte ganze Funktion ist eine Konstante (*Satz von Liouville.*)

Betrachten wir nun weiter eine ganze Funktion $f(z)$, für die $z = \infty$ eine *außerwesentlich* singuläre Stelle ist.

Wenn $a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_{k-1} z$ der meromorphe Teil von $f(z)$ an der Stelle $z = \infty$ ist, so hat die Differenz

$$f(z) - (a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_{k-1} z)$$

den Punkt ∞ nicht mehr zum singulären Punkte, und da sie ebensowenig im Endlichen eine singuläre Stelle besitzt, so ist sie eine Konstante a_k, also

$$f(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_{k-1} z + a_k.$$

---

[1]) Den Zusatz *„analytisch"* unterdrücken wir, weil es sich hier und im folgenden immer nur um „analytische" Funktionen handelt.

Eine eindeutige Funktion, die nur die außerwesentlich singuläre Stelle $z = \infty$ besitzt, ist eine ganze rationale Funktion.

Und hieran knüpft sich sofort der Satz:

Eine eindeutige Funktion, welche die eine wesentlich singuläre Stelle $z = \infty$ besitzt, ist eine ganze transzendente Funktion und umgekehrt: jede ganze transzendente Funktion besitzt die eine wesentlich singuläre Stelle $z = \infty$.

Betrachten wir nun weiter eine *rationale* Funktion

$$w = \frac{h(z)}{g(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + \ldots + b_r z^r}{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}.$$

Die singulären Stellen derselben sind die Nullstellen des Nenners und, falls $r > n$ ist, die Stelle ∞.

Ist $z = z_0$ eine Nullstelle des Nenners $g(z)$ und ist $(z - z_0)^k$ die höchste Potenz von $z - z_0$, durch die $g(z)$ teilbar ist, so wird

$$w = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot \frac{h(z)}{g_1(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot \mathfrak{P}_1(z - z_0),$$

wo $\mathfrak{P}_1$ eine Potenzreihe mit nicht verschwindendem Anfangsglied ist, weil wir $h(z)$ und $g(z)$ ohne gemeinsamen Faktor voraussetzen, so daß für $z = z_0$ der Bruch $\frac{h(z)}{g_1(z)}$ nicht Null sein kann.

Es ist also $z = z_0$ ein Pol von der Ordnung k. Ebenso sieht man leicht ein, daß, für $r > n$, der Punkt $z = \infty$ ein Pol von der Ordnung $r - n$ ist. Also:

„*Eine rationale Funktion besitzt nur außerwesentlich singuläre Stellen.*"

Wir beweisen nun die Umkehrung dieses Satzes:

Eine eindeutige analytische Funktion $f(z)$, die nur außerwesentlich singuläre Stellen besitzt, ist notwendig eine rationale Funktion.

Wenn die singulären Stellen von $f(z)$ sämtlich *außerwesentlich* sind, so ist ihre Anzahl *endlich*. Im anderen Falle würden sie nämlich mindestens eine Häufungsstelle haben, die wesentlich singulär sein würde. Seien nun

$$z_1, z_2, \ldots, z_r$$

die singulären Stellen von $f(z)$ und

$$g_i\left(\frac{1}{z - z_i}\right) = \frac{a_1^{(i)}}{z - z_i} + \frac{a_2}{(z - z_i)^2} + \cdots + \frac{a_{k_i}^{(i)}}{(z - z_i)^{k_i}}$$

der der Stelle $z = z_i$ entsprechende meromorphe Teil von $f(z)$ (wobei,

wie immer, falls $z_i = \infty$ ist, $\frac{1}{z}$ an Stelle von $z - z_i$ zu setzen ist).
Dann wird die Funktion

$$f(z) - g_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right) - g_2\left(\frac{1}{z-z_2}\right) - \cdots - g_r\left(\frac{1}{z-z_r}\right)$$

eine eindeutige analytische Funktion sein, die überhaupt keine singuläre Stelle mehr besitzt und folglich eine *Konstante* C ist. Hieraus folgt

$$f(z) = C + g_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right) + g_2\left(\frac{1}{z-z_2}\right) + \cdots + g_r\left(\frac{1}{z-z_r}\right),$$

eine Gleichung, die nicht nur unseren Satz enthält, sondern zugleich zeigt, daß jede rationale Funktion in „*Partialbrüche*“ zerlegt werden kann.

§ 9. Einige allgemeine Sätze über analytische Funktionen.

Wenn die Funktion $f(z)$ oder ein Zweig von $f(z)$ in der Domäne D eindeutig ist und in der Umgebung jeder Stelle a der Domäne D durch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/a)$ darstellbar ist, so wollen wir sagen, $f(z)$ sei „*regulär*“ in der Domäne D. Aus den Gesetzen der Rechnung mit Potenzreihen gehen nun unmittelbar folgende Sätze hervor:

1. *Sind $f_1(z)$ und $f_2(z)$ in der Domäne D regulär, so gilt gleiches von den Funktionen $f_1(z) + f_2(z)$, $f_1(z) - f_2(z)$ und $f_1(z) \cdot f_2(z)$.*

2. Allgemein: *Jede ganze rationale Funktion mit konstanten Koeffizienten von $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_k(z)$ ist in der Domäne D regulär, wenn $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_k(z)$ es sind.*

3. *Es sei P_a ein aus unendlich vielen verschiedenen Punkten der Domäne D gebildetes Punktsystem, welches den Punkt a der Domäne zur Häufungsstelle hat.* (Z. B. werden die Punkte einer beliebig kleinen Linie, die in der Domäne D liegt, ein solches Punktsystem bilden.) *Wenn nun die Funktion $f(z)$ in der Domäne D regulär ist und für die Punkte von P_a Null ist, so ist sie identisch Null.*

Denn die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z/a)$, welche $f(z)$ in der Umgebung der Stelle a darstellt, muß identisch verschwinden und folglich auch alle ihre Fortsetzungen.

4. *Wenn $f_1(z)$ und $f_2(z)$ in der Domäne D regulär sind und die Gleichung $f_1(z) = f_2(z)$ für alle Punkte eines Punktsystems P_a gilt, so gilt dieselbe Gleichung in der ganzen Domäne D.*

Denn $f_1(z) - f_2(z)$ ist dann notwendig identisch Null.

Ein spezieller Fall des Satzes 4 ist der folgende:

Ist $f(z)$ in der Domäne D regulär, so gilt die Gleichung

$$f(z) = \mathfrak{P}(z/a)$$

in jedem Kreise mit dem Mittelpunkt a, der ganz ins Innere von D fällt.

5. *Bedeuten $f_1, f_2, \ldots, f_k$ Funktionen, die in der Domäne D regulär sind, und $G(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ eine ganze rationale Funktion derselben mit konstanten Koeffizienten, so gilt die Gleichung*

$$G(f_1, f_2, \ldots, f_k) = 0$$

für alle Punkte der Domäne D, wenn sie für die Punkte eines Punktsystems P_a gilt.

Betrachten wir eine in der Domäne D reguläre Funktion $f(z)$, so ist in einer geeigneten Umgebung einer beliebig gewählten Stelle a von D

$$f(z) = \mathfrak{P}(z/a)$$

und daher für einen Punkt z dieser Umgebung

$$\lim_{h=0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \mathfrak{P}'(z/a).$$

Also gilt der Satz:

6. *Eine in der Domäne D reguläre Funktion $f(z)$ besitzt einen Differentialquotienten $f(z)$, welcher in der Umgebung einer Stelle a der Domäne durch die abgeleitete Reihe derjenigen Reihe dargestellt wird, welche in der Umgebung der Stelle a die Funktion $f(z)$ darstellt. Der Differentialquotient $f'(z)$ ist daher wieder eine in der Domäne D reguläre Funktion.*

Wenden wir diesen Satz wiederholt an, so erhalten wir den allgemeineren Satz:

7. *Eine in der Domäne D reguläre Funktion $f(z)$ besitzt Differentialquotienten aller Ordnungen $f'(z), f''(z), f'''(z), \ldots$, welche in D ebenfalls reguläre Funktionen sind.*

In der Umgebung der Stelle a sei

$$f(z) = \mathfrak{P}(z/a) = c_0 + c_1 \frac{z-a}{1!} + c_2 \frac{(z-a)^2}{2!} + \cdots + c_n \frac{(z-a)^n}{n!} + \cdots.$$

Dann ist

$$f^{(n)}(z) = \mathfrak{P}^{(n)}(z/a) = c_n + c_{n+1} \frac{(z-a)}{1!} + \cdots.$$

Also gilt $f^{(n)}(a) = c_n$, und daher ist

$$f(z) = \mathfrak{P}(z/a) = f(a) + f'(a)(z-a) + f''(a)\frac{(z-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(z-a)^n}{n!} + \cdots$$

die Reihe, welche $f(z)$ in der Umgebung von a darstellt.

Die Kombination der Sätze 5 und 7 ergibt:

8. *Befriedigen die in der Domäne D regulären Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_k$ eine algebraische Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten*

$$G(f_1, f_2, \ldots, f_k, f_1', f_2', \ldots, f_k', f_1'', \ldots, f_k'', \ldots) = 0$$

für alle Punkte eines Punktsystems P_a, so gilt diese Differentialgleichung für alle Punkte der Domäne D.

Wir wollen aus diesen Sätzen noch einige Folgerungen ziehen.

Es sei $f(z)$ in der Domäne D regulär, ferner a ein Punkt der Domäne. Dann wissen wir, daß für eine geeignete Umgebung von a

$$f(z) = \mathfrak{P}(z/a)$$

ist, unter $\mathfrak{P}(z/a)$ eine Potenzreihe von $z - a$ verstanden.

Betrachten wir nun diejenigen Kreise mit dem Mittelpunkt a, deren Inneres ganz in der Domäne D liegt, so wird unter ihnen ein größter vorhanden sein. Dieser größte Kreis ist dadurch charakterisiert, daß seine Peripherie mindestens einen Punkt enthält, der an der Grenze der Domäne D liegt. Sein Radius ist der kürzeste Abstand des Punktes a von den Punkten an der Grenze von D.

Bezeichnen wir mit $D(a)$ das Innere des Kreises, so ist $D(a)$ eine Domäne, die ganz in der Domäne D liegt. Nun gilt der Satz:

Die Gleichung

$$f(z) = \mathfrak{P}(z/a)$$

besteht für die Domäne $D(a)$.

Es sei, um dies zu beweisen, K ein Kreis mit dem Mittelpunkt a, innerhalb dessen $\mathfrak{P}(z/a)$ konvergiert und dessen Inneres der Domäne D angehört. Da $f(z)$ ebenso wie $\mathfrak{P}(z/a)$ im Innern von K regulär sind und in einer geeigneten Umgebung von a übereinstimmen, so ist nach Satz 4

$$f(z) = \mathfrak{P}(z/a)$$

überall im Innern von K.

Nun konvergiert aber $\mathfrak{P}(z/a)$ in dem Kreise $D(a)$, denn andernfalls würde die Peripherie des Konvergenzkreises C von $\mathfrak{P}(z/a)$ ganz in $D(a)$, verlaufen und im Innern des Konvergenzkreises C wäre $f(z) = \mathfrak{P}(z/a)$. Hieraus würde folgen, daß zu jedem Punkte der Peripherie des Konvergenzkreises eine unmittelbare Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z/a)$ existiert, was dem Satze von § 5 widerspricht.

Die Reihe $\mathfrak{P}(z/a)$ konvergiert also überall in $D(a)$, und folglich ist

$$f(z) = \mathfrak{P}(z/a)$$

überall in $D(a)$, w. z. b. w.

Es seien D und D_1 zwei Domänen, die einen Punkt a und folglich auch eine gewisse Umgebung des Punktes a gemeinsam haben. Wenn nun

$$(\Sigma) \qquad f(z),\ g(z),\ h(z), \ldots$$

ein System von in D regulären Funktionen sind, und ebenso

$$(\Sigma_1) \qquad f_1(z),\ g_1(z),\ h_1(z), \ldots$$

ein System von in D_1 regulären Funktionen, so soll letzteres „*unmittelbare Fortsetzung*“ des ersteren heißen, wenn die Gleichungen

$$f(z) = f_1(z), \quad g(z) = g_1(z), \quad h(z) = h_1(z), \ldots$$

für die Umgebung eines den Domänen D und D_1 gemeinsamen Punktes a gelten.

Sind ferner $D, D_1, D_2, \ldots, D_r$ Domänen und $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_r$ Systeme von Funktionen, die in ihnen bzw. regulär sind, so wollen wir, wenn jedes System eine unmittelbare Fortsetzung des vorhergehenden ist, auch jedes System schlechthin eine *Fortsetzung* des Systems Σ nennen.

Bei diesen Definitionen soll natürlich auch der Fall nicht ausgeschlossen sein, in welchem jedes der betrachteten Systeme nur aus einer einzigen Funktion besteht.

Ist das System $(f_r(z), g_r(z), \ldots)$ eine Fortsetzung des Systems $(f(z), g(z), \ldots)$, so gilt das gleiche offenbar noch, wenn wir die Systeme durch Aufnahme von Differentialquotienten der in ihnen enthaltenen Funktionen erweitern. Also beispielsweise wird dann auch das System $(f_r'(z), f_r(z), g_r(z), \ldots)$ eine Fortsetzung von $(f'(z), f(z), g(z), \ldots)$ sein.

Betrachten wir nun ein System von Funktionen

$$f(z), \quad g(z), \quad h(z), \ldots,$$

die in einer Domäne D regulär sind, und nehmen wir an, daß zwischen denselben eine algebraische Gleichung mit konstanten Koeffizienten der Gestalt

$$G(f(z), g(z), h(z), \ldots, f'(z), g'(z), h'(z), \ldots, f''(z), \ldots) = 0$$

besteht, so gilt dieselbe Gleichung auch für jede Fortsetzung jenes Systems von Funktionen.

Dies ist der sogenannte *Satz von der Permanenz einer Funktionalgleichung.*

§ 10. Der *Weierstraß*sche Summensatz.

Es seien

$$\mathfrak{P}_1(z), \quad \mathfrak{P}_2(z), \quad \ldots, \quad \mathfrak{P}_n(z), \quad \ldots$$

Potenzreihen, deren Konvergenzradien sämtlich größer sind als eine positive Zahl ϱ, so daß der Kreis K mit dem Mittelpunkt Null und dem Radius ϱ ganz im Innern des Konvergenzkreises jeder einzelnen der betrachteten Potenzreihen liegt (Fig. 26). Für die Punkte der Peripherie dieses Kreises K möge ferner

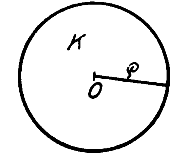


Fig. 26.

$$\mathfrak{P}_1(z) + \mathfrak{P}_2(z) + \cdots + \mathfrak{P}_n(z) + \cdots$$

gleichmäßig konvergieren.

Dann ist für jeden Punkt z im Innern von K

$$\mathfrak{P}_1(z) + \mathfrak{P}_2(z) + \dots + \mathfrak{P}_n(z) + \dots = \mathfrak{P}(z),$$

wo $\mathfrak{P}(z)$ dadurch entsteht, daß man auf der linken Seite der vorstehender Gleichung immer die Glieder zusammenfaßt, welche mit derselben Potenz von z multipliziert sind.

Wir setzen

$$\mathfrak{P}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)} z^k.$$

Dann ist die Behauptung des Satzes die, daß

$$c_k = c_k^{(1)} + c_k^{(2)} + \dots + c_k^{(n)} + \dots$$

einen endlichen Wert hat, daß ferner

$$\mathfrak{P}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

für jeden Punkt z im Innern des Kreises K konvergiert und gleich

$$\mathfrak{P}_1(z) + \mathfrak{P}_2(z) + \dots + \mathfrak{P}_n(z) + \dots$$

ist.

Da die unendliche Reihe, deren allgemeines Glied $\mathfrak{P}_n(z)$ ist, für die Punkte der Peripherie von K gleichmäßig konvergiert, so kann man zu der beliebig klein vorgeschriebenen positiven Größe ε die ganze Zahl N so bestimmen, daß die Ungleichung

$$(1) \qquad |\mathfrak{P}_{n+1}(z) + \mathfrak{P}_{n+2}(z) + \dots + \mathfrak{P}_{n+m}(z)| \leqq \varepsilon$$

gilt für jeden Punkt z der Peripherie von K, sobald $n > N$, m aber ganz beliebig gewählt wird. Aus dieser Ungleichung folgt (nach dem Hilfssatz in § 9 des vorigen Kapitels)

$$(2) \qquad |c_k^{(n+1)} + c_k^{(n+2)} + \dots + c_k^{(n+m)}| \leqq \frac{\varepsilon}{\varrho^k}.$$

Daher wird

$$c_k = c_k^{(1)} + c_k^{(2)} + c_k^{(3)} + \dots$$

ein endlicher bestimmter Wert, und wenn man

$$(3) \qquad c_k = c_k^{(1)} + c_k^{(2)} + \dots + c_k^{(n)} + r_k^{(n)}$$

setzt, so ist nach (2)

$$(4) \qquad |r_k^{(n)}| \leqq \frac{\varepsilon}{\varrho^k}, \quad \text{für } n > N.$$

Sei nun z ein Punkt im Innern des Kreises K und ϱ_1 der absolute Betrag von z. Dann ist

$$(5) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (c_k^{(1)} + c_k^{(2)} + \dots + c_k^{(n)}) z^k = \mathfrak{P}_1(z) + \mathfrak{P}_2(z) + \dots + \mathfrak{P}_n(z)$$

konvergent. Ebenso konvergiert auch

$$(6) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} r_k^{(n)} z^k = \mathfrak{Q}(z),$$

da diese Reihe nach (4) eine Minorante von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon \cdot \left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)^k = \frac{\varepsilon}{1-\frac{\varrho_1}{\varrho}}$$

ist. Zugleich hat man

$$|\mathfrak{Q}(z)| \leqq \frac{\varepsilon}{1-\frac{\varrho_1}{\varrho}}. \tag{7}$$

Die Reihe

$$\mathfrak{P}_1(z) + \mathfrak{P}_2(z) + \cdots + \mathfrak{P}_n(z) + \mathfrak{Q}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \mathfrak{P}(z)$$

konvergiert daher ebenfalls für den betrachteten Wert von z, und es ist

$$|\mathfrak{P}(z) - (\mathfrak{P}_1(z) + \mathfrak{P}_2(z) + \cdots + \mathfrak{P}_n(z))| = |\mathfrak{Q}(z)| \leqq \frac{\varepsilon}{1-\frac{\varrho_1}{\varrho}},$$

sobald $n > N$ ist. Hieraus folgt endlich

$$\mathfrak{P}(z) = \mathfrak{P}_1(z) + \mathfrak{P}_2(z) + \cdots + \mathfrak{P}_n(z) + \cdots,$$

womit nun unser Satz in allen Stücken bewiesen ist.

Der Satz bleibt offenbar auch gültig, wenn alle in Betracht kommenden Potenzreihen nach Potenzen von $z - a$ fortschreiten, nur daß dann der Kreis K nicht den Mittelpunkt 0, sondern den Mittelpunkt a besitzt.

Es seien jetzt

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

Funktionen, die sämtlich in der Domäne D regulär sind. Die Reihe

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots \tag{8}$$

konvergiere für jeden Punkt z der Domäne D, und es werde vorausgesetzt, daß um jeden Punkt a der Domäne D ein ganz in der Domäne liegender Kreis existiert, auf dessen Peripherie die Reihe (8) *gleichmäßig* konvergiert.

Dann ist die Summe

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots = F(z)$$

eine in der Domäne D reguläre Funktion, deren Ableitungen durch gliedweise Differentiation jener Summe entstehen, so daß die Gleichung

$$F^{(k)}(z) = f_1^{(k)}(z) + f_2^{(k)}(z) + \cdots + f_n^{(k)}(z) + \cdots$$

in der Domäne D gilt, unter k eine beliebige positive ganze Zahl verstanden.

Wir betrachten einen beliebigen Punkt a der Domäne D. Es sei K der Kreis mit dem Mittelpunkt a, längs dessen Peripherie die

Reihe (8) gleichmäßig konvergiert. Da in einer Umgebung $D(a)$ des Punktes a, welche den Kreis K in sich enthält,

$$\mathfrak{P}_n(z) = \mathfrak{P}_n(z/a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f_n^{(k)}(a) \cdot (z-a)^k$$

ist, so ist im Innern des Kreises K die Summe

$$F(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

der Reihe (8) dargestellt durch die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c_k (z-a)^k, \tag{9}$$

wobei

$$c_k = f_1^{(k)}(a) + f_2^{(k)}(a) + \cdots + f_n^{(k)}(a) + \cdots \tag{10}$$

ist. Folglich ist $F(z)$ *regulär* in der Domäne D.

Vergleichen wir ferner die *Taylor*sche Entwicklung von $F(z)$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^{(k)}(a)(z-a)^k$$

mit der Entwicklung (9), so kommt

$$F^{(k)}(a) = f_1^{(k)}(a) + f_2^{(k)}(a) + \cdots + f_n^{(k)}(a) + \cdots.$$

Da hier nun a jeder beliebige Punkt der Domäne D sein kann, so ist unser Satz in allen Stücken bewiesen.

Diesen Satz werden wir in der Folge als den *Weierstraß*schen *Summensatz* bezeichnen. Als Beispiel seiner Anwendung wollen wir den folgenden Satz beweisen:

Ist $\mathfrak{P}(z) = \sum_0^{\infty} c_k z^k$ *eine Potenzreihe und* $f(z)$ *in der Domäne* D *regulär, ist ferner für jeden Punkt* a *in der Domäne* D *der zugehörige Punkt* $f(a)$ *in dem Konvergenzkreise von* $\mathfrak{P}(z)$ *gelegen, so ist auch* $F(z) = \sum_0^{\infty} c_k [f(z)]^k$ *in der Domäne* D *regulär, und die letztere Gleichung bleibt richtig, wenn man sie beliebig oft nach* z *differentiiert.*

Es sei a ein Punkt der Domäne D: dann liegt nach Voraussetzung der Punkt $f(a)$ im Innern des Konvergenzkreises C der Reihe $\mathfrak{P}(z)$. Wir beschreiben einen mit C konzentrischen Kreis C', der kleiner ist als der Kreis C, aber den Punkt $f(a)$ in seinem Innern enthält (Fig. 27). Ferner beschreiben wir in der Domäne D einen Kreis K um a mit einem so kleinen Radius, daß für jeden Punkt z auf der Peripherie dieses Kreises K der Punkt $f(z)$ ins Innere des Kreises C' fällt. Dies ist wegen der Stetigkeit von $f(z)$ möglich.

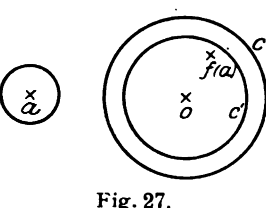


Fig. 27.

Da nun für die Punkte im Innern des Kreises C' die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ *gleichmäßig* konvergiert, so ist

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k [f(z)]^k$$

für die Punkte z der Peripherie des Kreises K *gleichmäßig* konvergent. Der *Weierstraß*sche Summensatz findet also hier Anwendung und zeigt die Richtigkeit unseres Satzes.

Ein spezieller Fall dieses Satzes ist der folgende Satz:

Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *beständig konvergiert, so ist* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k [f(z)]^k$ *in der Domäne D regulär und beliebig oft gliedweise differentiierbar, wenn* $f(z)$ *in der Domäne D regulär ist.*

4. Kapitel.

Untersuchung einiger spezieller analytischer Funktionen.

§ 1. Die Exponentialfunktion.

Wir wollen untersuchen, ob es eine analytische Funktion $f(z)$ gibt, welche die Eigenschaft besitzt, ihrem Differentialquotienten $f'(z)$ gleich zu sein.

Sei

$$\mathfrak{P}(z/a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z-a)^n}{n!}$$

ein Funktionselement von $f(z)$. Dann muß die abgeleitete Reihe

$$\mathfrak{P}'(z/a) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{(z-a)^n}{n!}$$

mit $\mathfrak{P}(z/a)$ zusammenfallen. Hierfür ist erforderlich und hinreichend, daß

$$c_{n+1} = c_n, \quad \text{d. i.} \quad c_1 = c_0, \quad c_2 = c_1, \quad c_3 = c_2 \quad \text{usf.}$$

ist, oder also, daß sämtliche Koeffizienten c_n untereinander gleich sind. Wird ihr gemeinsamer Wert mit c bezeichnet, so ist

$$\mathfrak{P}(z/a) = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n!}. \tag{1}$$

Die hier auftretende Potenzreihe ist nun *beständig* konvergent und definiert daher eine *ganze transzendente* Funktion. Also:

Es gibt eine, bis auf einen konstanten Faktor c bestimmte ganze transzendente Funktion, welche mit ihrem Differentialquotienten identisch ist. Das der Stelle a entsprechende Funktionselement dieser Funktion hat die Gestalt (1).

Wir wollen nun über den konstanten Faktor so verfügen, daß das zur Stelle $z = 0$ gehörige Funktionselement

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

wird. Bezeichnen wir mit $f(z)$ die hierdurch *völlig bestimmte* ganze transzendente Funktion, so ist nach (1) auch

$$f(z) = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n!}$$

oder

$$f(z + a) = c \cdot f(z).$$

Setzen wir hier $z = 0$, so kommt, da $f(0) = 1$ ist, $f(a) = c$ und folglich

$$f(z + a) = f(a) f(z).$$

In dieser Gleichung bedeuten z und a zwei beliebige endliche Werte, so daß wir auch

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2) \tag{2}$$

schreiben können. Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung entsteht

$$f(z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n) = f(z_1) f(z_2) f(z_3) \cdots f(z_n). \tag{2'}$$

Indem wir $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 1$ setzen, ergibt sich

$$f(n) = [f(1)]^n.$$

Definieren wir nun die Zahl e durch die Gleichung

$$e = f(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots,$$

so sehen wir, daß für jedes ganzzahlige z

$$f(z) = e^z$$

ist. Wir werden dadurch darauf geführt, unsere Funktion $f(z)$ überhaupt für *jeden* Argumentwert z durch das Symbol

$$e^z$$

zu bezeichnen.

Die sich unmittelbar darbietenden Eigenschaften dieser Funktion e^z sind die folgenden:

1. Es ist in der ganzen Zahlenebene

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots.$$

Die Funktion e^z ist also eine *ganze transzendente* Funktion; sie hat die eine wesentlich singuläre Stelle $z = \infty$.

2. Es ist

$$\frac{d(e^z)}{dz} = e^z.$$

3. Es ist für je zwei Argumente z_1 und z_2

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

Die hierin ausgesprochene Eigenschaft der Exponentialfunktion heißt ihr „*Additionstheorem*".

4. Insbesondere ist

$$e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1 \quad \text{oder} \quad e^z = \frac{1}{e^{-z}}.$$

Die Funktion e^z hat daher stets einen von Null verschiedenen Wert, *besitzt also keine Nullstelle.*

§ 2. Die trigonometrischen Funktionen.

Betrachten wir, unter z einen beliebigen endlichen Wert verstehend, die Gleichung

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots, \tag{1}$$

so läßt sich die rechte Seite derselben in der Form

$$\cos z + i \sin z$$

schreiben, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\left\{\begin{aligned} \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots, \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Da diese Potenzreihen beständig konvergieren, so folgt:

Die Funktionen $\sin z$ und $\cos z$ sind ganze transzendente Funktionen.

Da

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{3}$$

ist, so lassen sich die Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen aus denen der Exponentialfunktion ablesen.

Wir stellen hier die hauptsächlichsten Eigenschaften zusammen:

1. Es ist

$$\frac{d \sin z}{dz} = \cos z, \quad \frac{d \cos z}{dz} = -\sin z \tag{4}$$

und $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$. Die Funktion $\sin z$ ist eine *ungerade*, die Funktion $\cos z$ eine *gerade* Funktion, d. h.

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z.$$

Dies alles folgt auch sofort aus den Definitionsgleichungen (2).

2. Es ist

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1. \tag{5}$$

Die Multiplikation der beiden Gleichungen

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

ergibt die Gleichung (5).

3. Für die trigonometrischen Funktionen gelten die *Additionstheoreme*

$$(6) \qquad \begin{cases} \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\ \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \end{cases}$$

deren Beweis unmittelbar aus

$$e^{i(z_1+z_2)} = e^{iz_1} \cdot e^{iz_2}, \text{ d. i.}$$

$$\cos(z_1 + z_2) + i \sin(z_1 + z_2) = (\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2)$$

folgt.

Wir wollen nun zeigen, daß die Funktionen $\sin z$ und $\cos z$ für reelle Werte von z mit den in der Elementarmathematik so bezeichneten Funktionen identisch sind.

Zu dem Zwecke betrachten wir die Gleichungen

$$(7) \qquad x = \cos z, \quad y = \sin z,$$

in welchen z alle reellen Werte annehmen soll und x und y als rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene gedeutet werden mögen.

Die durch (7) dargestellten Punkte (x, y) befinden sich nach (5) auf dem Kreise

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Für $z = 0$ befinden wir uns im Punkt S $(x = 1, y = 0)$; für kleine positive Werte von z liegen $\cos z$ und $\frac{\sin z}{z}$ nach (2) dicht bei dem Wert 1, so daß der Punkt $P(x, y)$ dann positive Koordinaten besitzt (Fig. 28). Aus den Gleichungen (4) folgt nun weiter, daß $x = \cos z$ zunächst *abnimmt*, $y = \sin z$ zunächst *wächst*, wenn z von Null ausgehend anwächst. Aber $\sin z$ muß schließlich notwendig einmal vom Wachsen ins Abnehmen übergehen, mit anderen Worten $\frac{d \sin z}{dz} = \cos z$ muß, wenn z von Null aus wächst, einmal von positiven zu negativen Werten übergehen. In der Tat ist

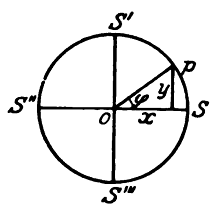


Fig. 28.

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2}\left(1 - \frac{z^2}{3 \cdot 4}\right) - \frac{z^6}{6!}\left(1 - \frac{z^2}{7 \cdot 8}\right) - \cdots.$$

Nehmen wir $z = 2$, so werden die Klammern

$$1 - \frac{z^2}{3 \cdot 4}, \quad 1 - \frac{z^2}{7 \cdot 8}, \quad \ldots,$$

sämtlich positiv, und daher

$$\cos 2 < 1 - \frac{4}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3},$$

d. h. $\cos 2$ ist ***negativ***. Zwischen $z = 0$ und $z = 2$ gibt es daher einen kleinsten Wert, für welchen $\cos z$ durch Null hindurchgehend von positiven zu negativen Werten übergeht, während bis zu diesem Werte hin $\cos z$ das Vorzeichen nicht wechselt. Den betreffenden Wert von z bezeichnen wir mit $\frac{\pi}{2}$.

Wenn z von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, wächst $\sin z$ beständig (mit Rücksicht auf (4)) und zwar von 0 bis 1, weil $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ und daher, wegen (5), $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ sein muß. Zugleich nimmt $\cos z$ von 1 bis 0 ab (wieder mit Rücksicht auf (4)). Der Punkt $x = \cos z$, $y = \sin z$ durchläuft also den Quadranten SS', wenn z von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst.

Nach den Additionstheoremen (6) ist nun

$$(8) \quad \begin{cases} \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \sin z \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \cos z \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \cos z, \\ \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \sin z \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -\sin z. \end{cases}$$

Lassen wir hierin z von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen, so erkennen wir, daß der Punkt (7) den Quadranten $S'S''$ durchläuft, wenn z von $\frac{\pi}{2}$ bis π wächst.

Endlich folgt aus den Gleichungen

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z,$$

daß der Punkt (7) den Halbkreis $S''S'''S$ durchläuft, während z von $-\pi$ bis 0 wächst. Zusammenfassend können wir sagen:

Der Punkt

$$x = \cos z, \quad y = \sin z$$

durchläuft die Peripherie des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ gerade einmal, wenn z von $-\pi$ bis *$+\pi$ wächst.*

Bezeichnen wir nun mit φ den Bogen SP, den wir zugleich als Maß für den Zentriwinkel POS nehmen, so ist

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = (-\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$$

und folglich, da für $z = 0$ auch $\varphi = 0$ ist,

$$\varphi = z.$$

Es ist also z nichts anderes wie der von S aus gerechnete Kreisbogen. Insbesondere ist $\frac{\pi}{2}$ der vierte Teil des Kreisumfangs oder 2π der Gesamtumfang des Kreises.

Aus den Gleichungen (8) folgt, indem man z durch $z + \frac{\pi}{2}$ ersetzt,

$$(9) \quad \begin{cases} \sin(z + \pi) = -\sin z, \\ \cos(z + \pi) = -\cos z \end{cases}$$

und hieraus, indem man z durch $z + \pi$ ersetzt,

$$(10) \quad \begin{cases} \sin(z + 2\pi) = \sin z, \\ \cos(z + 2\pi) = \cos z. \end{cases}$$

Die Gleichungen (8), (9), (10) übertragen sich auf die Exponentialfunktion in dieser Weise:

$$e^{i\left(z+\frac{\pi}{2}\right)} = i\,e^{iz}, \quad e^{i(z+\pi)} = -e^{iz}, \quad e^{i(z+2\pi)} = e^{iz},$$

Gleichungen, die offenbar auf die einfacheren

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = +1$$

führen.

Diese Gleichungen zeigen:

Die Exponentialfunktion besitzt die Periode $2i\pi$, *d. h. es ist*

$$e^{z+2i\pi} = e^{z},$$

und die trigonometrischen Funktionen $\sin z$ *und* $\cos z$ *besitzen die Periode* 2π, *d. h. es ist*

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z.$$

Betrachten wir den Punkt $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, so durchläuft derselbe gerade den Kreis mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius 1, wenn φ von $-\pi$ bis $+\pi$ variiert. Der Punkt $\varrho e^{i\varphi}$, wo ϱ eine reelle positive Zahl ist, durchläuft also den Kreis mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius ϱ. Hieraus schließen wir:

Jede von Null verschiedene komplexe Zahl z *läßt sich, und zwar nur auf eine Weise, in die Form setzen*

$$z = \varrho \cdot e^{i\varphi} \qquad (-\pi < \varphi \leqq \pi).$$

Der Faktor ϱ *ist der absolute Betrag von* z*; den Winkel* φ *nennen wir die „Amplitude" von* z.

§ 3. Der Logarithmus.

Unter dem Zeichen $\log z$ verstehen wir diejenigen Werte w, welche die Gleichung

$$(1) \qquad e^{w} = z$$

befriedigen. Da die Exponentialfunktion nur endliche von Null verschiedene Werte annimmt, so bleiben die Werte $z = 0$ und $z = \infty$ außer Betracht.

Ist nun z ein gegebener von Null verschiedener Wert, so sei

$$z = \varrho \cdot e^{i\varphi} \qquad (-\pi < \varphi \leqq \pi).$$

Die Gleichung (1) lautet dann, wenn wir $w = u + iv$ setzen,

(1') $$e^u \cdot e^{iv} = \varrho \cdot e^{i\varphi},$$

und folglich muß

(2) $$e^u = \varrho, \quad e^{i(v-\varphi)} = 1$$

sein.

Lassen wir u die Werte 0 bis ∞ durchlaufen, so wird

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots$$

von 1 bis ∞ variieren, und da $e^{-u} = \frac{1}{e^u}$ ist, so wird e^u von 1 bis 0 abnehmen, wenn u von 0 ausgehend alle negativen Werte durchläuft. Daher hat die Gleichung

$$e^u = \varrho$$

eine *einzige* reelle Lösung u, die wir mit $l(\varrho)$ bezeichnen wollen.

Um alle Lösungen der Gleichung

$$e^{i(v-\varphi)} = 1$$

zu bestimmen, setzen wir für einen Augenblick

$$v = \varphi + t;$$

dann haben wir die allgemeinste Lösung der Gleichung

$$e^{it} = 1$$

zu suchen. Durchläuft t das Intervall $0 \ldots 2\pi$, so durchläuft der Punkt e^{it} den Einheitskreis. Folglich ist $t = 2\pi$ die *kleinste* positive Lösung unserer Gleichung. Ist t nun eine beliebige Lösung, so können wir

$$t = 2n\pi + r$$

setzen, wo $0 \leqq r < 2\pi$ und n eine ganze Zahl ist. Dann wird

$$e^{ir} = e^{it - i2n\pi} = e^{it} \cdot (e^{2i\pi})^{-n} = 1$$

und folglich $r = 0$. Die allgemeinste Lösung von $e^{it} = 1$ ist also

$$t = 2n\pi,$$

unter n eine beliebige ganze Zahl verstanden, und

$$v = \varphi + 2n\pi$$

ist also die allgemeinste Lösung der Gleichung $e^{i(v-\varphi)} = 1$.

Damit sind wir zu folgendem Resultat gelangt:

Ist

$$z = \varrho \cdot e^{i\varphi} \quad (-\pi < \varphi \leqq \pi)$$

ein gegebener von Null verschiedener Wert, so ist die allgemeinste Lösung der Gleichung

$$e^w = z$$

die folgende:

$$w = l(\varrho) + i\varphi + 2n\pi i.$$

Dabei bedeutet $l(\varrho)$ die einzige reelle Lösung u der Gleichung

$$e^u = \varrho$$

und n eine beliebige ganze Zahl.

Da die ganze Zahl n beliebig bleibt, so ist $\log z$ eine ***unendlich vieldeutige*** Funktion von z. Den der Annahme $n = 0$ entsprechenden Wert nennen wir den ***Hauptwert*** der Funktion $\log z$ und bezeichnen ihn mit $l(z)$. Es ist also

$$l(z) = l(\varrho) + i\varphi,$$

wo ϱ den absoluten Betrag von z und φ die der Bedingung $-\pi < \varphi \leqq \pi$ genügende Amplitude von z bedeutet. Ferner drücken sich durch den Hauptwert $l(z)$ alle Werte von $\log z$ vermöge der Formel

$$\log z = l(z) + 2n\pi i$$

aus.

§ 4. Der Logarithmus als analytische Funktion.

Wir wollen diejenige Domäne D betrachten, die von allen Punkten der komplexen Zahlenebene mit Ausschluß der negativen Achse der reellen Zahlen[1]) gebildet wird. Auf der Zahlenkugel entsteht diese Domäne, wenn wir die Hälfte desjenigen Meridians der Kugel ausscheiden, welcher die reellen Zahlen repräsentiert.

×a

0

Fig. 29.

In der Domäne D ist der ***Hauptwert*** $l(z)$ des Logarithmus eine ***eindeutige*** und ***stetige*** Funktion. Wir werden jetzt zeigen, daß diese Funktion in der Domäne D ***regulär*** ist. Es sei a ein Punkt der Domäne D (Fig. 29). Dann haben wir zu zeigen, daß in einer gewissen Umgebung von a eine Gleichung der Form

$$(1) \qquad l(z) = l(a) + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots = l(a) + \mathfrak{P}$$

gilt. Soll diese Gleichung gelten, so muß

$$e^{l(a)+\mathfrak{P}} = z, \quad \text{oder} \quad e^{\mathfrak{P}} = \frac{z}{a}$$

sein, für genügend kleine Werte des absoluten Betrages von $z - a$. Es muß dann auch

$$1 + \mathfrak{P} + \frac{\mathfrak{P}^2}{2!} + \frac{\mathfrak{P}^3}{3!} + \cdots = \frac{z}{a}$$

und, da wir nach z differentiieren dürfen (nach § 10 des vorigen Kapitels), auch

$$\mathfrak{P}'\left(1 + \mathfrak{P} + \frac{\mathfrak{P}^2}{2!} + \cdots\right) = \mathfrak{P}' \cdot \frac{z}{a} = \frac{1}{a},$$

[1]) Hierbei ist der Nullpunkt mit auszuschließen.

d. h.

$$(2) \qquad \mathfrak{P}' = c_1 + 2c_2(z-a) + 3c_3(z-a)^2 + \cdots = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+(z-a)}$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{z-a}{a} + \frac{(z-a)^2}{a^2} - + \cdots$$

sein. Demnach muß die Reihe $\mathfrak{P}$ folgendermaßen lauten:

$$(3) \qquad \mathfrak{P} = \frac{z-a}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{z-a}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z-a}{a}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{z-a}{a}\right)^4 + - \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert nun in demselben Kreise wie ihre abgeleitete Reihe $\mathfrak{P}'$, also in dem durch die Bedingung

$$\left|\frac{z-a}{a}\right| < 1$$

bestimmten Kreise. Dieser Kreis, den wir mit K_a bezeichnen wollen, hat den Mittelpunkt a, und seine Peripherie geht durch den Nullpunkt.

Für jeden Punkt z, der im Innern des Kreises K_a liegt, ist aber wirklich

$$(4) \qquad e^{l(a)+\mathfrak{P}} = z\,.$$

Denn zunächst kommt

$$e^{l(a)+\mathfrak{P}} = a\left(1 + \mathfrak{P} + \frac{\mathfrak{P}^2}{2!} + \frac{\mathfrak{P}^3}{3!} + \cdots\right) = \mathfrak{P}_1(z-a),$$

und, indem wir die Ableitung nehmen,

$$a\cdot\mathfrak{P}'\left(1 + \mathfrak{P} + \frac{\mathfrak{P}^2}{2!} + \frac{\mathfrak{P}^3}{3!} + \cdots\right) = \mathfrak{P}_1'(z-a),$$

oder, weil $\mathfrak{P}' = \frac{1}{z}$ ist,

$$\mathfrak{P}_1(z-a) = z\,\mathfrak{P}_1'(z-a)\,.$$

Setzen wir nun

$$\mathfrak{P}_1(z-a) = a + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots,$$

so kommt

$$a + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots = [a + (z-a)]$$
$$\cdot[b_1 + 2b_2(z-a) + 3b_3(z-a)^2 + \cdots]$$

und durch Koeffizientenvergleichung

$$b_1 = 1\,, \quad b_2 = 0\,, \quad b_3 = 0\,, \ldots.$$

Daher ist $\mathfrak{P}_1(z-a) = a + (z-a) = z$ und damit die Gleichung (4) bewiesen. Aus dieser Gleichung geht hervor, daß für jeden Punkt z im Innern des Kreises K_a

$$l(a) + \mathfrak{P} = l(z) + 2n\pi i$$

ist, wo n eine ganze Zahl bezeichnet.

Es bedeute nun $D(a)$ wieder den größten Kreis mit dem Mittelpunkte a, dessen Inneres ganz der Domäne D angehört. Dieser Kreis $D(a)$ fällt mit K_a zusammen, wenn der Punkt a eine nicht negative Abszisse hat. Im andern Falle dagegen wird der Kreis $D(a)$

kleiner sein als der Kreis K_a; nämlich $D(a)$ wird derjenige Kreis sein, der a zum Mittelpunkt hat und die Achse der negativen reellen Zahlen berührt.

Nun sehen wir leicht ein, daß im Innern von $D(a)$ die Zahl n beständig Null ist. Denn es ist

$$n = \frac{1}{2\pi i}[l(a) + \mathfrak{P} - l(z)]$$

im Innern von $D(a)$ *stetig*, und da n für $z = a$ Null ist, so muß n als ganze Zahl *beständig* Null sein.

Hiermit sind wir zu folgendem Resultate gelangt:

Der Hauptwert des Logarithmus $l(z)$ ist in der Domäne D eine reguläre Funktion. Es gilt nämlich in der Umgebung $D(a)$ eines beliebigen Punktes a der Domäne D die Gleichung

$$l(z) = l(a) + \frac{z-a}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{z-a}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z-a}{a}\right)^3 - + \ldots .$$

Zugleich zeigt diese Gleichung (vgl. (2)), daß $l(z)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d\,l(z)}{dz} = \frac{1}{z}$$

befriedigt.

Wir bemerken noch, daß, wenn z sich in einen Punkt $-\varrho$ der Achse der negativen reellen Zahlen hineinbewegt, $l(z)$ stetig in den Wert $l(\varrho) + \pi i$ oder in den Wert $l(\varrho) - \pi i$ übergeht, je nachdem sich z von der Seite der *positiven* oder von der Seite der *negativen* Ordinaten nach dem Punkt $-\varrho$ bewegt.

Betrachten wir nun die Werte

$$l(z) + 2n\pi i,$$

so bilden dieselben für jedes bestimmt gewählte n ebenfalls eine reguläre Funktion in der Domäne D. Diese Funktion heiße für einen Augenblick f_n (so daß also f_0 der Hauptwert $l(z)$ ist).

Fig. 30.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Funktionen $f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots$ *eindeutige Zweige einer und derselben analytischen Funktion sind.*

Offenbar genügt hierfür der Nachweis, daß ein Funktionselement $\mathfrak{P}(z|a)$ von f_n zur Fortsetzung ein Funktionselement $\mathfrak{P}(z|b)$ von f_{n+1} besitzt, unter n eine beliebige ganze Zahl verstanden.

Wir wählen a und b als Spiegelpunkte bezüglich der Achse der reellen Zahlen und so, daß die gemeinsame Abszisse von a und b negativ ist (Fig. 30). Die Konvergenzkreise von $\mathfrak{P}(z|a)$ und $\mathfrak{P}(z|b)$ haben ein Stück der Achse der negativen reellen Zahlen gemein.

Ist $-\varrho$ irgendein Punkt dieses gemeinsamen Stückes, so ist für $z = -\varrho$

$$\mathfrak{P}(z/a) = l(\varrho) + \pi i + 2n\pi i,$$
$$\mathfrak{P}(z/b) = l(\varrho) - \pi i + 2(n+1)\pi i,$$

folglich $\mathfrak{P}(z/a) = \mathfrak{P}(z/b)$, und daher ist $\mathfrak{P}(z/b)$ eine unmittelbare Fortsetzung von $\mathfrak{P}(z/a)$.

Der Logarithmus ist hiernach eine unendlich vieldeutige Funktion, die sich aus den in der Domäne D eindeutigen Zweigen $l(z) + 2n\pi i$ zusammensetzt. Die Eigenschaften des Logarithmus gehen im übrigen aus denen der Exponentialfunktion hervor.

Z. B. folgt aus

$$e^{\log z_1 + \log z_2} = e^{\log z_1} \cdot e^{\log z_2} = z_1 z_2,$$

daß $\log z_1 + \log z_2$ einen Wert von $\log(z_1 z_2)$ vorstellt.

Die Gleichung

$$\log z_1 + \log z_2 = \log z_1 z_2 \tag{5}$$

ist demnach so aufzufassen: versteht man unter $\log z_1$ und $\log z_2$ irgend zwei bestimmte unter den unendlichen vielen Werten, die diese Zeichen vorstellen, so ist $\log z_1 + \log z_2$ einer der unendlich vielen Werte, welche $\log(z_1 z_2)$ besitzt.

Für die Hauptwerte des Logarithmus stellt sich die Gleichung (5) so dar: Es sei

$$z_1 = \varrho_1 e^{\varphi_1 i}, \quad z_2 = \varrho_2 e^{\varphi_2 i} \quad (-\pi < \varphi_1 \leqq \pi, \quad -\pi < \varphi_2 \leqq \pi).$$

Dann ist

$$l(z_1) + l(z_2) = l(z_1 z_2) + 2n\pi i,$$

wobei $n = 0$ oder $+1$ oder -1 ist, je nachdem die Summe $\varphi_1 + \varphi_2$ der Amplituden von z_1 und z_2 der Ungleichung

$$-\pi < \varphi_1 + \varphi_2 \leqq \pi \quad \text{oder} \quad +\pi < \varphi_1 + \varphi_2 \leqq 2\pi$$
$$\text{oder} \quad -2\pi < \varphi_1 + \varphi_2 \leqq -\pi$$

genügt.

§ 5. Die allgemeine Potenz.

Bedeutet m eine positive ganze Zahl, so versteht man unter der Potenz z^m das Produkt aus m Faktoren, von welchen jeder gleich z ist. Will man diesen Begriff der Potenz z^m ausdehnen auf beliebige Exponenten m, so erreicht man dies am einfachsten mit Hilfe des Logarithmus. Wir setzen

$$z^m = e^{m \log z} = 1 + m \log z + \frac{(m \log z)^2}{2!} + \cdots. \tag{1}$$

Nach dieser Definition wird die Funktion z^m im allgemeinen unendlich viele Werte haben, nämlich die Werte

$$e^{m[l(z) + 2n\pi i]} = e^{m l(z)} \cdot e^{m \cdot 2n\pi i} \quad (n = 0, +1, -1, +2, -2, \ldots). \tag{2}$$

Nur wenn unter den Zahlen

(3) $$e^{m \cdot 2n\pi i} \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

bloß endlich viele verschiedene sind, wird auch z^m nur eine endliche Zahl verschiedener Werte haben. Soll nun

$$e^{m \cdot 2n\pi i} = e^{m \cdot 2n'\pi i} \qquad (n \neq n')$$

sein, so muß

$$e^{m(n-n')\cdot 2\pi i} = 1,$$

folglich $m(n-n')$ eine ganze Zahl und also m eine rationale Zahl sein. Wenn umgekehrt $m = \frac{r}{s}$ (r und s teilerfremd; $s \geqq 1$) eine rationale Zahl ist, so sind unter den Zahlen (3) nur die s Zahlen

$$e^{\frac{r}{s} 2n\pi i} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, s-1)$$

voneinander verschieden, und $z^m = z^{\frac{r}{s}}$ ist dann eine s-deutige Funktion.

Denjenigen Wert von z^m, der dem Hauptwert von $\log z$ entspricht, der also durch

$$z^m = e^{m\,l(z)}$$

definiert ist, wollen wir den „*Hauptwert*" von z^m nennen und mit (z^m) bezeichnen. *In der Domäne D, die durch Ausscheidung der Achse der negativen reellen Zahlen aus der Zahlenebene entsteht, ist* (z^m) *eine reguläre Funktion.*

In der Tat gilt in der Umgebung $D(a)$ irgendeiner Stelle a der Domäne D die Gleichung

$$l(z) = l(a) + \frac{z-a}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{z-a}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z-a}{a}\right)^3 - + \ldots = \mathfrak{P}$$

und daher auch

$$(z^m) = e^{m\,l(z)} = 1 + m\,\mathfrak{P} + m^2 \frac{\mathfrak{P}^2}{2!} + \ldots = \mathfrak{P}_1,$$

wo

(4) $$\mathfrak{P}_1 = c_0 + c_1\left(\frac{z-a}{a}\right) + c_2\left(\frac{z-a}{a}\right)^2 + \ldots$$

wieder eine Potenzreihe von $z - a$ bedeutet.

Nun folgt durch Differentiation

$$\frac{m}{z} e^{m\,l(z)} = \mathfrak{P}_1',$$

oder

$$m\,\mathfrak{P}_1 = [a + (z-a)]\,\mathfrak{P}_1' = a\left[1 + \frac{z-a}{a}\right]\mathfrak{P}_1'.$$

Berücksichtigen wir (4), so kommt

$$m \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{z-a}{a}\right)^n = a\left(1 + \frac{z-a}{a}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,c_n}{a}\left(\frac{z-a}{a}\right)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,c_{n+1}\left(\frac{z-a}{a}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} n\,c_n\left(\frac{z-a}{a}\right)^n$$

und durch Koeffizientenvergleichung

$$(n+1)c_{n+1} = (m-n)c_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Hieraus finden wir sukzessive

$$c_1 = \frac{m}{1} c_0, \quad c_2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} c_0, \quad c_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c_0, \quad \ldots,$$

allgemein

$$c_n = m_n \cdot c_0,$$

wo

$$m_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n}$$

der n^{te} *Binomialkoeffizient* zur Basis m ist.

Für c_0 ergibt sich aus $e^{m l(z)} = \mathfrak{P}_1$, indem wir $z = a$ setzen, $c_0 = e^{m l(a)} = (a^m)$. Daher wird also in der Umgebung $D(a)$ des Punktes a die Darstellung gelten:

$$(5) \quad (z^m) = (a^m)\left\{1 + m_1 \frac{z-a}{a} + m_2 \left(\frac{z-a}{a}\right)^2 + m_3 \left(\frac{z-a}{a}\right)^3 + \ldots\right\}.$$

Die übrigen Werte von z^m entstehen aus dem Hauptwerte (z^m) durch Multiplikation mit den konstanten Faktoren (3).

Hieraus schließen wir, daß die Werte von z^m in eindeutige Zweige zerfallen, die in der Domäne D reguläre Funktionen sind und die, ebenso wie es beim Logarithmus der Fall war, zu ein und derselben analytischen Funktion gehören.

Aus der Definitionsgleichung (1) folgt noch

$$z_1^m \cdot z_2^m = e^{m \log z_1 + m \log z_2} = e^{m \log (z_1 z_2)},$$

also

$$(6) \quad z_1^m \cdot z_2^m = (z_1 z_2)^m.$$

Diese Gleichung ist so aufzufassen: Das Produkt aus einem beliebig gewählten der Werte von z_1^m und einem beliebig gewählten der Werte von z_2^m ist stets einer der Werte von $(z_1 z_2)^m$.

Ähnliches gilt von der aus (1) folgenden Gleichung

$$(7) \quad \log (z^m) = m \log z,$$

sowie der hieraus sich ergebenden Gleichung

$$[z^m]^{m_1} = e^{m_1 \log (z^m)} = e^{m_1 m \log z}, \quad \text{d. i.}$$

$$(8) \quad [z^m]^{m_1} = z^{m m_1}.$$

5. Kapitel.

Die Integration analytischer Funktionen.

§ 1. Gleichmäßige Stetigkeit und Differentiierbarkeit analytischer Funktionen.

Einen Bereich in der Zahlenebene oder auf der Zahlenkugel, der aus allen Punkten innerhalb und auf einer einfach geschlossenen[1]) stetigen Kurve besteht, wollen wir eine „*Elementarfläche*" nennen.

Beispielsweise bilden die Punkte im Innern und auf der Peripherie irgendeines Kreises eine Elementarfläche.

Liegt eine Elementarfläche E mit allen ihren Punkten in einer Domäne D, in welcher $f(z)$ regulär ist, so soll $f(z)$ auch ***auf der Elementarfläche E regulär*** heißen.

Bedeutet a einen beliebigen Punkt der Elementarfläche (gleichgültig ob er im Innern oder auf der Begrenzung liegt), so ist

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + (z-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \cdots \tag{1}$$

für alle Punkte z der Domäne D, welche der Umgebung $D(a)$ des Punktes a angehören. Diese Umgebung $D(a)$ ist das Innere des größten Kreises mit dem Mittelpunkt a, der noch mit allen seinen inneren Punkten der Domäne D angehört. Bezeichnen wir mit r_a den Radius dieses Kreises, so ist r_a eine stetige Funktion von a. Da die Elementarfläche E ein abgeschlossenes Punktsystem vorstellt, so besitzt auf ihr r_a ein *Minimum*, welches eine von Null verschiedene positive Zahl ist. Wir bezeichnen in der Folge mit ϱ eine positive Größe, die (um beliebig wenig) kleiner als jenes Minimum angenommen werden soll. Es ist dann für jeden Punkt a der Elementarfläche

$$r_a > \varrho.$$

Beschreiben wir um jeden Punkt der Elementarfläche E einen Kreis mit dem Radius ϱ, so bilden die innern Punkte und alle Punkte auf den Peripherien dieser Kreise einen Bereich E', der die Elementarfläche E ganz enthält. Dieser Bereich E' liegt ganz in der Domäne D und stellt ein abgeschlossenes Punktsystem vor. Da die Funktion $f(z)$ stetig ist, besitzt $|f(z)|$ im Bereiche E' ein Maximum M, so daß für jeden Punkt z von E'

$$|f(z)| \leqq M \tag{2}$$

ist. Insbesondere gilt diese Ungleichung für die Peripherie eines Kreises vom Radius ϱ, dessen Mittelpunkt ein beliebiger Punkt a der Elementarfläche E ist. In Rücksicht auf (1) folgt daraus

$$\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}(a)\right| \leqq \frac{M}{\varrho^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

[1]) Vgl. Anm. 1 auf S. 43.

Diese Ungleichungen, in welchen M und ϱ feste positive Zahlen sind, gelten also für jeden Punkt der Elementarfläche E. Wir können hieraus einige wichtige Folgerungen ziehen.

Es seien a und b zwei Punkte der Elementarfläche E, die der Bedingung genügen, daß ihr Abstand kleiner ist als eine unterhalb ϱ liegende positive Zahl δ, also:

$$|b-a| < \delta < \varrho. \tag{4}$$

Dann ist nach (1)

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(a) + (b-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \cdots, \tag{5}$$

und nach (3)

$$|f(b) - f(a)| < \delta \cdot \frac{M}{\varrho} + \delta^2 \frac{M}{\varrho^2} + \cdots = M \cdot \frac{\frac{\delta}{\varrho}}{1 - \frac{\delta}{\varrho}}.$$

Da wir δ nun so klein annehmen können, daß $M \cdot \frac{\frac{\delta}{\varrho}}{1-\frac{\delta}{\varrho}} < \varepsilon$ wird, wo $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben ist, so gilt der Satz:

*„Ist $f(z)$ auf der Elementarfläche E regulär, so **kann** man nach **Annahme** einer beliebig kleinen positiven Größe ε die positive Größe δ so bestimmen, daß*

$$|f(b) - f(a)| < \varepsilon$$

ist, sobald a und b irgend zwei Punkte der Elementarfläche E bezeichnen, die der Bedingung $|b-a| < \delta$ genügen."

Dieser Satz, welcher nichts anderes besagt, als daß $f(z)$ *„gleichmäßig"* stetig ist, hätte auch aus allgemeineren Prinzipien gefolgert werden können.

Schreiben wir die Gleichung (5) in der Form

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(a) = (b-a)\frac{f''(a)}{2!} + (b-a)^2 \frac{f'''(a)}{3!} + \cdots$$

und setzen zur Abkürzung

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(a) = \gamma, \tag{6}$$

so folgt

$$|\gamma| < \delta \cdot \frac{M}{\varrho^2} + \delta^2 \cdot \frac{M}{\varrho^3} + \cdots = \frac{M}{\varrho} \cdot \frac{\frac{\delta}{\varrho}}{1 - \frac{\delta}{\varrho}},$$

und hieraus schließen wir:

„*Ist $f(z)$ auf der Elementarfläche E regulär, so kann man nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe ε die positive Größe δ so bestimmen, daß die durch die Gleichung*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)+\gamma$$

definierte Größe γ der Bedingung $|\gamma|<\varepsilon$ genügt, sobald nur $|b-a|<\delta$ ist, wo auch immer die Punkte a, b auf der Elementarfläche E angenommen werden."

Da die Ableitung $f'(z)$ auf der Elementarfläche E regulär und folglich auch gleichmäßig stetig ist, so läßt sich der vorstehende Satz dahin verallgemeinern:

„*Ist $\varepsilon>0$ vorgeschrieben, so kann man $\delta>0$ so bestimmen, daß die durch die Gleichung*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)+\gamma$$

definierte Größe γ der Bedingung

$$|\gamma|<\varepsilon$$

genügt, sobald a, b, c auf der Elementarfläche E irgendwie, jedoch den Bedingungen

$$|b-a|<\delta, \quad |c-a|<\delta$$

entsprechend angenommen werden."

Die in den letzten beiden Sätzen ausgesprochene Eigenschaft von $f(z)$ deuten wir kurz dadurch an, daß wir sagen, $f(z)$ sei auf der Elementarfläche E *„gleichmäßig" differentiierbar.* Daß in den vorstehenden Sätzen a und b als voneinander verschiedene Punkte vorausgesetzt werden, braucht kaum besonders hervorgehoben zu werden.

§ 2. Integration der Potenzreihen.

Eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(z/a)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\dots \tag{1}$$

stellt im Innern ihres Konvergenzkreises C eine reguläre Funktion $f(z)$ dar. Bilden wir nun die Reihe

$$\mathfrak{P}_1(z/a)=c+c_0(z-a)+\frac{c_1}{2}(z-a)^2+\frac{c_2}{3}(z-a)^3+\dots, \tag{2}$$

unter c eine beliebig gewählte Konstante verstanden, so fällt die abgeleitete Reihe von $\mathfrak{P}_1(z/a)$ mit $\mathfrak{P}(z/a)$ zusammen. Daher hat $\mathfrak{P}_1(z/a)$ denselben Konvergenzkreis C, und die im Innern dieses Kreises durch $\mathfrak{P}_1(z/a)$ definierte reguläre Funktion $f_1(z)$ genügt der Gleichung

$$\frac{df_1(z)}{dz}=f(z). \tag{3}$$

Wir nennen $f_1(z)$ ein *unbestimmtes Integral* von $f(z)$.

§ 3. Integration der Ableitung einer regulären Funktion.

Wir beweisen nun einen allgemeinen Satz, der sich auf zwei in einer Domäne D reguläre Funktionen $f(z)$ und $f_1(z)$ bezieht, von denen die eine die Ableitung der anderen ist, zwischen denen also die Gleichung

$$\frac{d f_1(z)}{d z} = f(z)$$

besteht.

Es seien z_0 und z zwei beliebig im Innern von D fixierte Punkte. Wir verbinden dieselben durch eine im Innern von D verlaufende *stetige* Linie L, die *rektifizierbar* sein soll. Zwischen z_0 und z schalten wir auf dieser Linie L die Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ ein (Fig. 31) und bilden nun die Summe

$$(1) \quad \sum f(z)\Delta z = f(\zeta_1)(z_1 - z_0) + f(\zeta_2)(z_2 - z_1) + \cdots + f(\zeta_n)(z - z_{n-1}),$$

wobei $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ Punkte der Linie L bedeuten, die bzw. auf den Stücken $z_0 \ldots z_1$, $z_1 \ldots z_2$, $\ldots$, $z_{n-1} \ldots z$ beliebig angenommen sind.

Wir wollen nun zeigen, daß die Gleichung

$$(2) \qquad \lim \sum f(z)\Delta z = f_1(z) - f_1(z_0)$$

gilt, in welcher das Limeszeichen bedeutet, daß man die Anzahl der Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ ins Unendliche anwachsen lassen soll derart, daß die Stücke, in welche die Linie L durch die Punkte zerlegt wird, unendlich klein werden.

Fig. 31.

Wir schließen die Linie L in eine Elementarfläche ein, die ganz im Innern von D liegt. Auf dieser Elementarfläche sind $f_1(z)$ und $f_1'(z) = f(z)$ regulär. Ist daher $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so werden in den Gleichungen

$$\frac{f_1(z_1) - f_1(z_0)}{z_1 - z_0} = f(\zeta_1) + \gamma_1,$$

$$\frac{f_1(z_2) - f_1(z_1)}{z_2 - z_1} = f(\zeta_2) + \gamma_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

die Größen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ absolut genommen kleiner als ε sein, sobald die einzelnen Stücke $z_0 z_1$, $z_1 z_2$, $\ldots$ der Linie L genügend klein sind.

Nun folgt aus den vorstehenden Gleichungen

$$f_1(z) - f_1(z_0) = \sum f(z)\Delta z + \gamma_1(z_1 - z_0) + \gamma_2(z_2 - z_1) + \cdots + \gamma_n(z - z_{n-1})$$

oder

$$\sum f(z)\Delta z = f_1(z) - f_1(z_0) + R,$$

wo

$$|R| = |\gamma_1(z_1 - z_0) + \gamma_2(z_2 - z_1) + \cdots + \gamma_n(z - z_{n-1})|$$
$$< \varepsilon\{|z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + \cdots + |z - z_{n-1}|\}$$

ist.

Da $|z_1 - z_0|$, $|z_2 - z_1|$, ... die Längen der der Linie L einbeschriebenen Sehnen $z_0 z_1$, $z_1 z_2$, ... sind, so ist

$$|R| < \varepsilon \cdot l,$$

unter l die Länge der Linie L verstanden.

Hieraus folgt nun in der Tat, weil ε beliebig klein angenommen werden durfte,

$$\lim \sum f(z) \Delta z = f_1(z) - f_1(z_0).$$

Den hier betrachteten Limes bezeichnen wir mit

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$$

und nennen ihn *das durch die Linie L erstreckte Integral von* $f(z)\, dz$. Die Linie L heißt der „*Integrationsweg*". Die Gleichung (2) läßt sich demnach so schreiben:

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz = f_1(z) - f_1(z_0). \tag{3}$$

Sie lehrt, daß der Wert des Integrales unabhängig ist von der Wahl der die Punkte z_0 und z innerhalb der Domäne D verbindenden Linie L.

Lassen wir den Punkt z mit dem Punkte z_0 zusammenfallen, so zeigt die Gleichung (3):

Das durch eine geschlossene rektifizierbare ganz im Innern der Domäne D liegende Kurve erstreckte Integral $\int f(z)\, dz$ *hat den Wert Null.* Da nach der Bemerkung von § 2 im Konvergenzkreise C eine Funktion $f(z)$ stets als Ableitung einer Funktion $f_1(z)$ dargestellt werden kann, so schließen wir nun:

Im Innern eines Kreises, in welchem $f(z)$ *regulär ist, ist*

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$$

von dem Integrationswege unabhängig, und das durch eine geschlossene rektifizierbare Linie genommene Integral $\int f(z)\, dz$ *ist Null.*

Wir werden in § 5 diesen Satz wesentlich erweitern, indem wir zeigen, daß an Stelle von C eine beliebige Elementarfläche E treten kann.

§ 4. Beispiele.

Ein prinzipiell wichtiges Beispiel bildet das Integral

$$\int \frac{dz}{z}.$$

Es sei D die aus allen Punkten der Ebene mit Ausschluß der

negativen Achse der reellen Zahlen bestehende Domäne. In dieser Domäne ist $l(z)$ eine reguläre Funktion und

$$\frac{dl(z)}{dz} = \frac{1}{z}.$$

Daher gilt der Satz:

Das in der Domäne D von einem Punkte a nach irgendeinem anderen Punkte b genommene Integral

$$\int_a^b \frac{dz}{z}$$

hat den Wert $l(b) - l(a)$.

Dabei ist der *Integrationsweg*, d. h. die a mit b verbindende Linie L, längs welcher das Integral genommen wird, *ganz in der Domäne D liegend* vorausgesetzt. *Welchen Wert hat das Integral, wenn die Linie L nicht mit allen ihren Punkten in der Domäne D liegt?*

Wir wollen diese Frage zunächst für den einfachen Fall behandeln, daß die Linie L die Achse der negativen reellen Zahlen nur *einmal* durchschneidet, etwa im Punkt $-\varrho$. Durchläuft man die Linie L vom Anfangspunkt a bis zum Endpunkt b, so möge die Überschreitung der Achse der negativen reellen Zahlen von der Seite der positiven nach der Seite der negativen Ordinaten hin geschehen, wie das in der Figur 32 angedeutet ist. Es seien nun α und β zwei zu beiden Seiten des Durchschnittspunktes $-\varrho$ der Linie L mit der Achse der negativen reellen Zahlen angenommene Punkte der Linie L. Dann wird

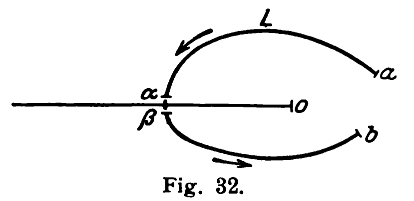


Fig. 32.

$$\int_a^\alpha \frac{dz}{z} + \int_\beta^b \frac{dz}{z} = l(\alpha) - l(a) + l(b) - l(\beta)$$

sein. Lassen wir α und β in den Punkt $-\varrho$ hineinrücken, so wird

$$l(\alpha) \text{ in } l(\varrho) + \pi i, \quad l(\beta) \text{ in } l(\varrho) - \pi i$$

übergehen. Daher kommt

$$(1) \qquad \int_a^b \frac{dz}{z} = l(b) - l(a) + 2\pi i.$$

Würde die Linie L von der Seite der negativen nach der Seite der positiven Ordinaten übertreten, so würde in vorstehender Gleichung an Stelle von $+2\pi i$ auf der rechten Seite $-2\pi i$ zu schreiben sein.

Betrachten wir nun einen Integrationsweg L, der die Punkte a und b verbindet und die Achse der negativen Zahlen in beliebig vielen Punkten $s_1, s_2, \ldots, s_r$ durchschneidet.

Wir wollen jedem einzelnen Punkte s_k die Einheit $\varepsilon_k = +1$ oder $\varepsilon_k = -1$ zuordnen, je nachdem die Linie L im Punkte s_k von der Seite der positiven auf die Seite der negativen Ordinaten oder umgekehrt von der Seite der negativen auf die Seite der positiven Ordinaten durch die Achse der negativen reellen Zahlen hindurchtritt. In der beigesetzten Figur 33 würden z. B. den Punkten s_1, s_2, s_3, s_4 der Reihe nach die Einheiten $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = +1$, $\varepsilon_4 = +1$ entsprechen.

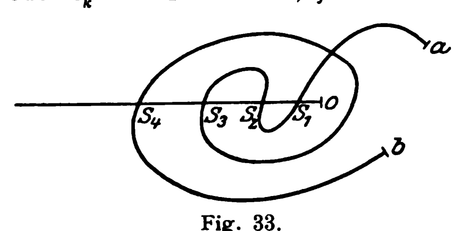


Fig. 33.

Nun gilt offenbar für das durch die Linie L erstreckte Integral $\int \frac{dz}{z}$ die Gleichung:

$$\int_a^b \frac{dz}{z} = l(b) - l(a) + 2\pi i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_r). \tag{2}$$

Die Summe $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_r$ heißt die ***Windungszahl*** der Linie L.

Lassen wir die Punkte a und b zusammenfallen, so ergibt die Gleichung (1) das Resultat: *Es ist*

$$\int \frac{dz}{z} = 2\pi i, \tag{3}$$

wenn das Integral in „positivem Sinne" um den Nullpunkt erstreckt wird.

Diese Ausdrucksweise soll bedeuten, daß das Integral durch eine einfach geschlossene Linie L, die den Nullpunkt einschließt, erstreckt werden soll, wobei L in demjenigen Sinne durchlaufen wird, welcher dem Sinne des Zeigers einer Uhr entgegengesetzt ist. Diesen Durchlaufungssinn werden wir stets den *positiven*, den entgegengesetzten den *negativen* nennen.

Betrachten wir nun das etwas allgemeinere Integral

$$J = \int_a^b \frac{dz}{z - z_0},$$

wo z_0 eine Konstante bedeutet und der Integrationsweg a mit b verbindet.

Setzen wir

$$z - z_0 = \zeta,$$

so durchläuft ζ eine Linie L', während z die Linie L durchläuft; und zwar entsteht L' aus L durch eine Parallelverschiebung der

komplexen Zahlenebene (Fig. 34). Bei dieser Parallelverschiebung geht die durch z_0 parallel zur Achse der negativen reellen Zahlen verlaufende Gerade in diese Achse über. Nun ist offenbar unser Integral J gleich dem Integral

$$\int_{a-z_0}^{b-z_0} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

letzteres erstreckt durch die Linie L'. Hieraus folgen nachstehende Sätze:

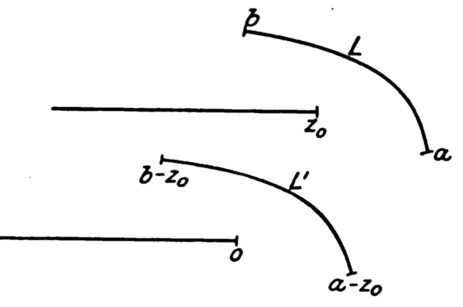


Fig. 34.

Es sei g die durch z_0 parallel zur Achse der negativen reellen Zahlen laufende Halbgerade. Dann ist

$$\int_a^b \frac{dz}{z - z_0} = l(b - z_0) - l(a - z_0),$$

wenn der Integrationsweg die Gerade g nicht trifft, dagegen

$$\int_a^b \frac{dz}{z - z_0} = l(b - z_0) - l(a - z_0) + 2\pi i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_r),$$

wenn der Integrationsweg die Gerade g in r Punkten trifft. Dabei sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ diesen Punkten einzeln zugeordnete positive oder negative Einheiten.

Ferner:

Das im positiven Sinne um den Punkt $z = z_0$ erstreckte Integral

$$\int \frac{dz}{z - z_0}$$

hat den Wert $2\pi i$.

Betrachten wir als zweites Beispiel, unter n eine von -1 verschiedene ganze Zahl verstanden, die Funktion

$$f_1(z) = \frac{1}{n+1}(z - z_0)^{n+1},$$

so ist

$$\frac{d f_1(z)}{dz} = f(z) = (z - z_0)^n.$$

Die beiden Funktionen $f(z)$ und $f_1(z)$ besitzen, wenn n positiv ist, die eine singuläre Stelle $z = \infty$, wenn n negativ ist, die eine singuläre Stelle $z = z_0$. Es sind also $f(z)$ und $f_1(z)$ jedenfalls regulär in der Domäne D, welche aus allen Punkten mit Ausschluß der Punkte $z = z_0$ und $z = \infty$ gebildet wird. Daher gilt

$$\int_a^b (z - z_0)^n dz = \frac{1}{n+1}\left[(b - z_0)^{n+1} - (a - z_0)^{n+1}\right]$$

für jeden Integrationsweg, welcher nicht durch den Punkt z_0 geht.

Insbesondere ist

$$\int (z - z_0)^n \, dz = 0$$

für jeden nicht durch z_0 hindurchgehenden geschlossenen Integrationsweg.

Das im positiven Sinne um $z = z_0$ erstreckte Integral

$$\int (z - z_0)^n \, dz$$

ist also immer Null mit Ausnahme des Falles $n = -1$, in welchem das Integral den Wert $2\pi i$ besitzt.

§ 5. Integration regulärer Funktionen.

Es sei wie im § 1 $f(z)$ regulär in der Domäne D, und E bezeichne eine in der Domäne D angenommene Elementarfläche. Ferner möge ϱ dieselbe Bedeutung haben wie im § 1, so daß also jeder Kreis vom Radius ϱ, dessen Mittelpunkt der Elementarfläche E angehört, ganz im Innern der Domäne D verläuft.

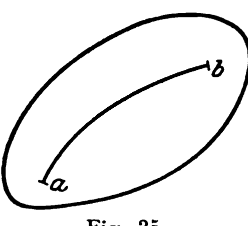


Fig. 35.

Wir verbinden zwei Punkte a und b, die im Innern der Elementarfläche E liegen, durch eine *rektifizierbare* Linie L, die ganz im Innern der Elementarfläche E verläuft (Fig. 35).

Es sei m kleiner als der kürzeste Abstand der Punkte von L von der Begrenzung von E, so daß jeder Kreis vom Radius m, dessen Mittelpunkt ein beliebiger Punkt der Linie L ist, ganz im Innern von E liegt.

Wir zerlegen nun die Linie L, indem wir zwischen a und b auf ihr die Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ einschalten, in Stücke $L_1, L_2, \ldots, L_n$, und zwar seien diese Stücke so klein, daß der Abstand zweier aufeinanderfolgender Punkte $a = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, b = z_n$ kleiner als ϱ und kleiner als m ist. Wir bezeichnen das durch die Linie L_k $(k = 1, \ldots, n)$ erstreckte in § 3 definierte Integral

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z) \, dz$$

kurz mit (L_k) und setzen

$$(L_1) + (L_2) + \cdots + (L_n) = \int_a^{z_1} + \int_{z_1}^{z_2} + \cdots + \int_{z_{n-1}}^{b} = \int_a^b f(z) \, dz = (L).$$

Es soll sich in diesem Paragraphen um den Nachweis handeln, daß der Wert dieses durch die Linie L erstreckten Integrals von der Wahl der Linie L unabhängig ist und daß dieser Wert, angesehen als Funktion der oberen Grenze b, im Innern der Elementarfläche E regulär ist.

Man kann die Linie L_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ersetzen durch die Verbindungsgerade G_k ihrer Endpunkte, ohne den Wert des Integrals $\int f(z)\,dz$ dadurch zu ändern. Dies folgt unmittelbar aus dem Satze von § 3. Die geraden Strecken G_k liegen dabei ganz im Innern von E. Es ist also

$$(L) = (G_1) + (G_2) + \cdots + (G_n) = (G),$$

wo G den aus den Geraden $G_1, G_2, \ldots, G_n$ zusammengesetzten gebrochenen Linienzug bedeutet.

Um die Unabhängigkeit des Integralwertes von der Wahl der Linie L darzutun, genügt es hiernach, die Gleichheit der beiden Integrale (G) und (G') zu beweisen, unter G und G' zwei von a nach b führende gebrochene Linienzüge verstanden, von denen jeder sich aus einer endlichen Zahl von geradlinigen Strecken zusammensetzt, die ganz im Innern von E liegen.

Durchlaufen wir den Linienzug von G' in umgekehrter Richtung, so ändern wir dadurch nur das Vorzeichen des betreffenden Integrals (G'). Folglich kommt der Nachweis der Gleichung $(G) = (G')$ auf den Nachweis des folgenden Satzes hinaus:

Das Integral $\int f(z)\,dz$, erstreckt durch den Umfang eines Polygons, dessen Seiten sämtlich im Innern von E liegen, ist gleich Null. Betrachten wir ein solches Polygon, so können möglicherweise zwei nicht aneinanderstoßende Seiten desselben sich schneiden, so daß der Umfang des Polygons sich selber durchsetzt. In diesem Falle zerlegen wir den Umfang in einzelne Stücke, von denen jedes für sich einen knotenlosen, in sich zurücklaufenden Linienzug bildet. Offenbar genügt es, für jedes solche Stück das Verschwinden des Integrals $\int f(z)\,dz$ zu beweisen.

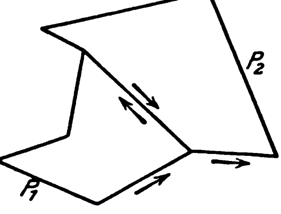


Fig. 36.

Sei nun P ein Polygon, dessen Umfang sich nicht selbst durchsetzt und im Innern von E liegt. Den Umfang des Polygons P bezeichnen wir der Kürze halber ebenfalls mit P. Dann handelt es sich um den Nachweis, daß $(P) = 0$ ist.

Zunächst bemerken wir, daß, wenn die Polygone P_1 und P_2 eine Seite gemeinsam haben (Fig. 36) und $P_1 + P_2$ das Polygon bedeutet, welches von den Seiten von P_1 und P_2 mit Ausschluß der gemeinsamen Seite gebildet wird,

$$(P_1) + (P_2) = (P_1 + P_2)$$

ist. Denn die auf die gemeinsame Seite von P_1 und P_2 sich beziehenden Integralteile zerstören sich, weil diese gemeinsame Seite bei dem Integral (P_1) in entgegengesetzter Richtung zu durchlaufen ist, wie bei dem Integral (P_2). Hieraus folgt nun:

Können wir das Polygon P in Polygone $P_1, P_2, \ldots, P_r$ zerlegen, für welche die Integrale $(P_1), (P_2), \ldots, (P_r)$ sämtlich Null sind, so ist auch $(P) = (P_1) + (P_2) + \ldots + (P_r) = 0$.

Dies ist nun tatsächlich für jedes Polygon P, dessen Umfang sich nicht selbst durchsetzt und ganz im Innern von E liegt, möglich.

Man zerlege nämlich die Ebene durch äquidistante Parallelen zur Achse der reellen und imaginären Zahlen in Quadrate, deren Diagonalen kleiner als ϱ sind (Fig. 37). Durch diese Parallelen wird die Polygonfläche P in Stücke $P_1, P_2, \ldots$ zerlegt, von welchen jedes einzelne ganz in einem Kreise mit dem Radius ϱ, dessen Mittelpunkt ein Punkt von E ist, liegt. Jedes einzelne Integral $(P_1), (P_2), \ldots$ ist daher nach dem vorigen Paragraphen Null und folglich auch das Integral P. Hierbei haben wir stillschweigend angenommen, daß die Fläche des Polygons P ganz im Innern von E liegt. ***Es ist aber in der Tat leicht zu zeigen, daß kein Punkt im Innern von P auf der Grenze oder außerhalb von E liegen kann.***

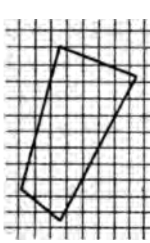


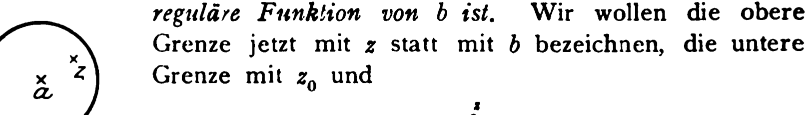
Fig. 37.

Denn ist p ein solcher Punkt, so gibt es, wenn er nicht selbst außerhalb, sondern an der Grenze von E liegt, doch in seiner Nähe Punkte im Innern von P, die außerhalb E liegen. Sei p' ein solcher Punkt. Da E ganz im Endlichen liegt, so gibt es auch außerhalb von P Punkte, die außerhalb E liegen. Sei p'' ein solcher Punkt. Dann gibt es keine p' mit p'' verbindende Linie, die nicht Punkte von E enthielte, da jede solche Linie den Umfang von P trifft. Dies widerstreitet aber der Annahme, daß E Elementarfläche ist.

Nachdem wir gezeigt haben, daß der Wert des Integrals

$$\int_a^b f(z)\,dz$$

von der Wahl der a mit b innerhalb E verbindenden Linie L unabhängig ist, ***beweisen wir nun, daß dieser Wert innerhalb E eine reguläre Funktion von b ist.*** Wir wollen die obere Grenze jetzt mit z statt mit b bezeichnen, die untere Grenze mit z_0 und



$$f_1(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

Fig. 38.

setzen, wobei der Integrationsweg ganz in E liegt.

Sei nun a ein beliebiger Punkt in E (Fig. 38). Liegt dann z in einer Umgebung von a, die ganz in D hineinfällt, so ist

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \ldots$$

und nach § 3

$$\int_a^z f(z)\,dz = c_0(z-a) + \frac{c_1}{2}(z-a)^2 + \frac{c_2}{3}(z-a)^3 + \cdots.$$

Nun können wir die z_0 und z verbindende Linie so wählen, daß sie den Punkt a enthält. Dann ist

$$(2)\qquad f_1(z) = \int_{z_0}^z f(z)\,dz = \int_{z_0}^a f(z)\,dz + \int_a^z f(z)\,dz$$

$$= c + c_0(z-a) + \frac{c_1}{2}(z-a)^2 + \cdots,$$

wo $c = \int_{z_0}^a f(z)\,dz$ von z unabhängig ist.

Die Gleichung (2) zeigt, daß $f_1(z)$ innerhalb E regulär ist und daß $\frac{df_1(z)}{dz} = f(z)$ ist.

Jede andere innerhalb E reguläre Funktion $\bar{f}(z)$, welche ebenfalls der Gleichung $\frac{d\bar{f}(z)}{dz} = f(z)$ genügt, unterscheidet sich von $f_1(z)$ nur um eine Konstante. Denn ist in der Umgebung einer Stelle a von E

$$\bar{f}(z) - f_1(z) = k + k_1(z-a) + k_2(z-a)^2 + \cdots,$$

so folgt, da die Ableitung von $\bar{f}(z) - f_1(z)$ verschwindet, daß $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = 0$ sein muß. Folglich ist

$$\bar{f}(z) = f_1(z) + k,$$

und diese in der Umgebung der Stelle a gültige Gleichung gilt nach früheren Sätzen für das ganze Innere von E.

§ 6. Der *Cauchy*sche Satz.

Es sei E eine Elementarfläche, auf welcher $f(z)$ regulär ist. Betrachten wir nun eine geschlossene rektifizierbare Linie L, die ganz im Innern von E liegt, so wird dieselbe durch zwei beliebig auf ihr angenommene Punkte a, b in zwei Stücke L_1 und L_2 zerlegt (Fig. 39).

Nach dem vorigen Paragraphen ist nun

$$^{(L_1)}\int_a^b f(z)\,dz = {}^{(L_2)}\int_a^b f(z)\,dz$$

oder

$$^{(L_1)}\int_a^b f(z)\,dz + {}^{(L_2)}\int_b^a f(z)\,dz = 0.$$

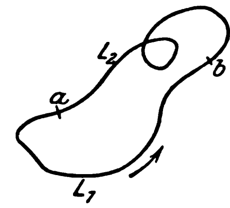


Fig. 39.

Die Summe der Integrale linker Hand ist aber gerade das durch die geschlossene Linie L genommene Integral $\int f(z)\,dz$. Es gilt also der Satz:

Liegt die geschlossene rektifizierbare Linie L ganz in einer Elementarfläche, auf welcher $f(z)$ regulär ist, so ist

$$\int f(z)\,dz = 0,$$

wenn das Integral durch die Linie L erstreckt wird.

Dieser von *Cauchy* entdeckte Satz gehört wegen seiner mannigfaltigen Anwendungen zu den wichtigsten Sätzen der Analysis.

Wir wollen, ehe wir zu solchen Anwendungen übergehen, noch einige Bemerkungen an den *Cauchy*schen Satz knüpfen.

Es sei L eine einfach geschlossene rektifizierbare Linie, welche eine Elementarfläche E begrenzt, die mit allen ihren Punkten der Domäne D angehört. Wir können dann die Elementarfläche E in eine geschlossene Linie L' einschließen, welche eine ebenfalls ganz in der Domäne D liegende Elementarfläche E' begrenzt (Fig. 40). Wenn nun $f(z)$ in der Domäne D regulär ist, so folgt nach dem *Cauchy*schen Satze

$$\int f(z)\,dz = 0,$$

das Integral erstreckt durch die Linie L.

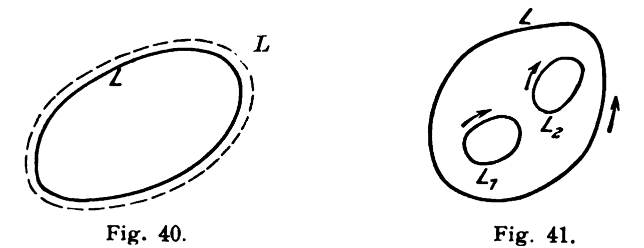


Fig. 40. Fig. 41.

Es gilt also die Gleichung $\int f(z)\,dz = 0$ für jede einfach geschlossene rektifizierbare Linie, die eine Elementarfläche begrenzt, auf welcher $f(z)$ regulär ist. Wir betrachten nun ein Flächenstück G der komplexen Zahlenebene, begrenzt von einer endlichen Zahl einfach geschlossener rektifizierbarer Linien $L, L_1, L_2, \ldots$, die sich gegenseitig nicht treffen und von denen die eine, L, die übrigen einschließt. Das Flächenstück G möge einschließlich seiner Randlinien $L, L_1, L_2, \ldots$ ganz in einer Domäne D liegen, in welcher $f(z)$ regulär ist (Fig. 41). Wir wollen dann der Kürze halber sagen, $f(z)$ sei *auf der Fläche G regulär.*

Bei der einzelnen geschlossenen Linie wollen wir als *positiven* Durchlaufungssinn denjenigen nehmen, welcher dem Sinne des Uhrzeigers entgegengesetzt ist. Je nachdem das Integral $\int f(z)\,dz$ durch

eine geschlossene Linie L im *positiven* oder im *negativen* Sinne erstreckt wird, bezeichnen wir dasselbe mit $\int_{L^+} f(z)\,dz$ oder $\int_{L^-} f(z)\,dz$.

Endlich wollen wir unter dem durch die Begrenzung oder den Rand von G in positivem Sinne erstreckten Integrale $\int_{G^+} f(z)\,dz$ die Summe

$$\int_{L^+} f(z)\,dz + \int_{L_1^-} f(z)\,dz + \int_{L_2^-} f(z)\,dz + \ldots$$

verstehen[1]).

Es gilt nun folgender Satz:

Das Integral** $\int f(z)\,dz$, **in positivem Sinne durch den Rand einer Fläche** G **erstreckt, auf welcher** $f(z)$ **regulär ist, hat den Wert Null.

Zum Beweise (bei welchem wir drei Randlinien L, L_1, L_2 voraussetzen wollen) verbinden wir die Linie L mit den Linien L_1 und L_2, sowie L_1 mit L_2 durch rektifizierbare im Innern von G verlaufende Linien. Hierdurch zerfällt die Fläche G in zwei Elementarflächen E_1 und E_2 (Fig. 42). Die im positiven Sinne durch den Rand von E_1 bzw. E_2 erstreckten Integrale $\int f(z)\,dz$ sind nun gleich Null, folglich auch ihre Summe. Nun werden die Hilfslinien bei der Integration durch den Rand von E_1 gerade in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wie bei der Integration durch den Rand von E_2. Die betreffenden Integralteile heben sich daher bei der Addition auf, und die Summe jener beiden Integrale ist also identisch mit dem im positiven Sinne durch den Rand von G erstreckten Integrale $\int f(z)\,dz$.

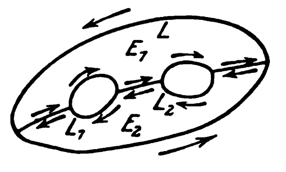


Fig. 42.

Betrachten wir den speziellen Fall des letzten Satzes, in welchem die Fläche G nur zwei Randlinien L und L_1 besitzt (Fig. 43), so haben wir dann die Gleichung

$$\int_{L^+} f(z)\,dz + \int_{L_1^-} f(z)\,dz = 0,$$

aus welcher

$$\int_{L^+} f(z)\,dz = \int_{L_1^+} f(z)\,dz$$

folgt. Also:

Fig. 43.

***Begrenzen** die Linien L **und** L_1 ein Flächenstück, auf welchem $f(z)$ **regulär** ist, so ändert sich der Wert des Integrales*

$$\int_{L^+} f(z)\,dz$$

***nicht, wenn** man die Linie L durch die Linie L_1 ersetzt.*

---

[1]) Man sagt: Der Rand eines Gebietes wird *positiv* umlaufen, wenn das Gebiet dabei zur Linken bleibt. Im obigen Falle wird dann die Kurve L im positiven, alle andern Kurven im negativen Sinne durchlaufen. (A. d. H).

§ 7. Folgerungen aus dem *Cauchy*schen Satz. Der *Laurent*sche Satz.

Es sei L eine einfach geschlossene rektifizierbare Linie, welche eine Elementarfläche E begrenzt, auf der die Funktion $f(z)$ regulär ist.

Bedeutet z_0 einen Punkt im Innern dieser Elementarfläche E, so ist auch $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ auf E regulär (Fig. 44).

Folglich ist

$$\int_{L^+} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz = \int_{L^+} \frac{f(z)\, dz}{z-z_0} - f(z_0)\int_{L^+} \frac{dz}{z-z_0} = 0.$$

Der Faktor von $f(z_0)$ hat, wie wir früher gesehen haben (§ 4), den Wert $2\pi i$. Also ist

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^+} \frac{f(z)\, dz}{z-z_0}.$$

Wir wollen die Bezeichnung ein wenig ändern. Den auf L veränderlichen Punkt bezeichnen wir mit ζ statt mit z und den im Innern von L beliebig angenommenen Punkt mit z statt mit z_0. Dann heißt unsere Formel:

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^+} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

Diese Formel zeigt, daß man die Werte von $f(z)$ im Innern von L berechnen kann, wenn man die Werte von $f(z)$ auf der Linie L kennt. Denn der Wert des Integrals hängt nur von den Werten $f(\zeta)$ ab.

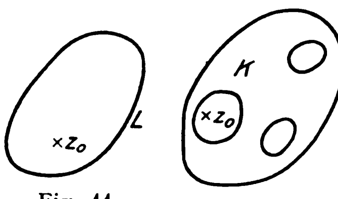


Fig. 44. Fig. 45.

Die Formel (1) läßt sich leicht verallgemeinern. Es sei G eine Fläche, begrenzt von einer endlichen Anzahl von Linien $L, L_1, L_2, \ldots, L_r$, von denen die erste, L, die übrigen einschließt. Auf G sei $f(z)$ regulär. Wir fixieren innerhalb G willkürlich einen Punkt z_0, legen um z_0 eine Linie K, die eine ganz in G liegende Elementarfläche einschließt, und scheiden diese Elementarfläche aus G aus (Fig. 45).

Dadurch erhalten wir eine von den Linien $L, L_1, L_2, \ldots, L_r$ und K begrenzte Fläche G', auf welcher $\frac{f(z)}{z-z_0}$ regulär ist.

Folglich ist das positiv durch den Rand von G' erstreckte Integral $\int \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$ gleich Null, woraus wir die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1^-} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz + \cdots$$

schließen. Die linke Seite stellt nach Formel (1) $f(z_0)$ dar.

Ersetzen wir wieder z_0 durch z und schreiben wir in den Integralen ζ statt z, so kommt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^+} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1^-} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \dots. \tag{2}$$

Diese Formel drückt wiederum den Wert von $f(z)$ im Innern der Fläche G durch die Werte dieser Funktion auf dem Rande von G aus.

Von der Formel (2) *wollen wir nun eine interessante Anwendung machen.* Es sei R ein Kreisring, begrenzt durch zwei Kreise mit dem Mittelpunkt a. Die Punkte dieses Kreisringes, zu welchen wir die Punkte auf den Peripherien der Begrenzungskreise *nicht* rechnen, bilden eine Domäne. Es möge $f(z)$ in dieser Domäne regulär sein. Fixieren wir einen beliebigen Punkt z in dem Kreisring, so können wir einen zweiten Kreisring mit demselben Mittelpunkt a konstruieren, der ganz in dem ursprünglichen Kreisring liegt und z in seinem Innern enthält. L_1 und L_2 seien die diesen zweiten Kreisring begrenzenden Kreise (Fig. 46). Dann ist nach der Formel (2)

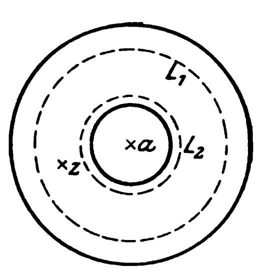


Fig. 46.

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \tag{3}$$

wobei

$$\begin{cases} f_1(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_1^+} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \\ f_2(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_2^-} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \end{cases} \tag{4}$$

ist. Wenn ζ auf L_1 liegt, so ist $|z - a| < |\zeta - a|$ und also

$$\left|\frac{z-a}{\zeta - a}\right| = k_1 < 1. \tag{5}$$

Der Wert k_1 ist unabhängig von der Lage des Punktes ζ auf L_1, weil $|\zeta - a|$ längs L_1 konstant bleibt, nämlich den Radius des Kreises L_1 vorstellt.

In dem Integrale $f_1(z)$ substituieren wir

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)} = \frac{1}{\zeta - a} + \frac{z-a}{(\zeta-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^3} + \dots + \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^n\,[\zeta-a-(z-a)]}$$

und integrieren dann gliedweise. Hierdurch kommt

$$f_1(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_{n-1}(z-a)^{n-1} + r_n, \tag{6}$$

wobei gesetzt ist

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1^+} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}}, \tag{7}$$

$$r_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1^+} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}. \tag{8}$$

Mit unendlich wachsendem n verschwindet r_n. Denn es ist

$$|r_n| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{L_1}\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|^n \cdot \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right| |d\zeta| = k_1^n \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{L_1}\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right| |d\zeta|,$$

und nach (5) ist $\lim_{n=\infty} k_1^n = 0$. Also ist

$$(9)\quad f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1^+}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots.$$

Bei dem Integrale, welches den Koeffizienten c_k definiert, darf statt des Kreises L_1 auch irgendein anderer Kreis mit dem Mittelpunkt a, der ganz im Kreisring R liegt, als Integrationsweg genommen werden. Denn die integrierte Funktion $\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}$ ist im Kreisring R regulär. Ja man darf statt L_1 allgemeiner einen beliebigen einfach geschlossenen Integrationsweg nehmen, der den Punkt a einschließt und ganz im Innern des Kreisringes R verläuft. Hieraus folgt beiläufig, daß c_n von der Wahl des Punktes z im Kreisring R unabhängig ist. Es stellt $f_1(z)$ nach (9) eine im Innern des größeren Begrenzungskreises des Ringes R reguläre Funktion vor.

Betrachten wir nun

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2^+}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta},$$

so bemerken wir zunächst, daß für jeden Punkt ζ der Kreisperipherie L_2 die Ungleichung

$$\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| = k_2 < 1$$

gilt. Daher werden wir in dem Integrale substituieren

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z-a} + \frac{\zeta-a}{(z-a)^2} + \frac{(\zeta-a)^2}{(z-a)^3} + \cdots + \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^n\,[z-\zeta]}.$$

Hierdurch kommt

$$(10)\qquad f_2(z) = c_{-1}\frac{1}{z-a} + c_{-2}\frac{1}{(z-a)^2} + \ldots c_{-n}\frac{1}{(z-a)^n} + r_n',$$

wobei gesetzt ist

$$(11)\qquad c_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2^+} f(\zeta)(\zeta-a)^{k-1}\,d\zeta,$$

$$(12)\qquad r_n' = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2^+}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta}.$$

Ebenso wie r_n verschwindet auch r_n' mit unendlich wachsendem n. Also ist

$$(13)\quad f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2^+}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta} = c_{-1}\frac{1}{z-a} + c_{-2}\frac{1}{(z-a)^2} + \cdots + c_{-n}\frac{1}{(z-a)^n} + \cdots.$$

Auch hier darf bei dem Integrale (11), welches c_{-k} definiert, die Kreisperipherie L_2 durch jede andere ganz im Kreisring liegende Kreisperipherie mit dem Mittelpunkt a ersetzt werden. Die Gleichung (13) zeigt, daß $f_2(z)$ eine außerhalb des inneren Begrenzungskreises unseres Kreisringes reguläre Funktion ist. Beachten wir noch, daß der Integrand in (11) aus dem in (7) hervorgeht, wenn wir in diesem $-k$ an Stelle von k schreiben, so können wir das Resultat unserer Untersuchung so aussprechen:

Ist die Funktion $f(z)$ regulär in einem Kreisringe mit dem Mittelpunkte a, so läßt sich $f(z)$ in diesem Ringe darstellen durch eine nach positiven und negativen Potenzen[1] *von $z-a$ fortschreitende Potenzreihe:*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n.$$

Die Glieder mit positiven Potenzen bilden eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(z-a)$, welche in dem größeren den Ring begrenzenden Kreise konvergiert, die Glieder mit negativen Potenzen bilden eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z-a}\right)$, welche außerhalb des kleineren den Ring begrenzenden Kreises konvergiert. Ist ferner L eine Kreisperipherie mit dem Mittelpunkt a, die ganz im Innern des Kreisringes liegt, so hat man

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^+} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}. \tag{14}$$

Insbesondere ist

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^+} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{15}$$

Der vorstehende Satz ist unter dem Namen des *Laurent*schen Satzes bekannt. Aus der Gleichung (14) lesen wir sehr leicht den Hilfssatz über Potenzreihen ab, welchen wir am Schluß des 2. Kapitels bewiesen haben.

Es folgt nämlich aus (14):

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{L^+} \frac{|f(\zeta)|\,|d\zeta|}{|\zeta-a|^{n+1}}.$$

Wenn nun längs der Kreisperipherie L beständig

$$|f(\zeta)| \leq M$$

ist, so hat man

$$|c_n| \leq \frac{M}{2\pi}\int_{L^+} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-a|^{n+1}}.$$

---

[1] Der Kürze halber nennen wir eine Potenz $(z-a)^n$ eine „*positive*" oder „*negative*" Potenz, je nachdem der Exponent $n \geq 0$ oder < 0 ist.

Es ist aber $|\zeta - a| = \varrho$, dem Radius des Kreises L; ferner $|d\zeta| = ds$, dem Bogenelement des Kreises L. Daher kommt

$$|c_n| \leqq \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{\varrho^{n+1}} \int_{L^+} ds = \frac{M}{\varrho^n},$$

eine Ungleichung, die den Inhalt jenes Hilfssatzes bildet.

Aus dieser Ungleichung wollen wir jetzt noch die Folgerung ziehen, *daß eine in einem Kreisringe mit dem Mittelpunkt a reguläre Funktion nur auf eine Weise nach positiven und negativen Potenzen von* $(z - a)$ *entwickelbar ist.* Angenommen nämlich, es wäre

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n^{(1)} (z - a)^n,$$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n^{(2)} (z - a)^n,$$

so folgte

$$0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} (c_n^{(1)} - c_n^{(2)}) (z - a)^n.$$

Die Potenzreihe rechts stellt also eine reguläre Funktion im Kreisringe vor, die den konstanten Wert 0 hat. Daher können wir $M = 0$ setzen. Dadurch erhalten wir $|c_n^{(1)} - c_n^{(2)}| \leqq 0$ und folglich $c_n^{(1)} = c_n^{(2)}$.

Mit Hilfe des *Laurent*schen Satzes können wir den schon in Kap. 3, § 7 angekündigten Satz beweisen:

Der absolute Betrag jeder in der Umgebung einer isolierten singulären Stelle eindeutigen analytischen Funktion nimmt dort beliebig große Werte an.

Anders formuliert: *Eine in der Umgebung eines Punktes a eindeutige reguläre Funktion* $f(z)$ *von beschränktem absoluten Betrag ist in diesem Punkte selbst regulär.*

Betrachten wir nämlich in der obigen *Laurent*schen Entwicklung den Koeffizienten c_n $(n = -1, -2, \ldots)$, und ist M eine Schranke für $|f(z)|$ in der Umgebung von a, so können wir, da der innere Kreis des Kreisringes beliebig klein genommen werden kann, in der Abschätzung $|c_n| \leqq \frac{M}{\varrho^n}$ die Zahl ϱ beliebig klein wählen, woraus sofort $c_{-1} = 0$, $c_{-2} = 0, \ldots$, also die Regularität von $f(z)$ in $z = a$ folgt.

Eine wichtige Folgerung des hiermit bewiesenen Satzes ist der *Satz von Weierstraß*:

Eine in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle a eindeutige Funktion kommt in beliebiger Nähe dieser Stelle jedem beliebigen Werte α *beliebig nahe.*

Wäre dies für einen Wert α nicht richtig, so würde die Funktion $\frac{1}{f(z)-\alpha}$ nach dem vorigen Satze im Punkte $z = a$ regulär bleiben; somit wäre $f(z) - \alpha$, also auch $f(z)$, in $z = a$ entweder regulär oder hätte dort einen Pol, also jedenfalls keine *wesentlich* singuläre Stelle.

§ 8. Die Residuen der analytischen Funktionen.

In der Domäne D sei die Funktion $f(z)$ regulär. Ferner sei a ein *isolierter* Begrenzungspunkt von D, so daß also in einem genügend kleinen um a beschriebenen Kreise der Mittelpunkt a der einzige nicht zur Domäne D gehörige Punkt ist. Betrachten wir nun einen Kreisring mit dem Mittelpunkt a, der ganz in der Domäne D liegt (Fig. 47), so haben wir innerhalb desselben nach dem *Laurent*schen Satze:

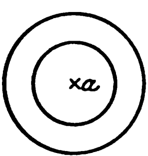


Fig. 47.

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \mathfrak{P}(z-a) + \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z-a}\right). \tag{1}$$

Der Radius des inneren Begrenzungskreises des Kreisringes kann nun so klein gewählt werden, wie man will. Daher wird $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z-a}\right)$ eine *beständig* konvergierende Potenzreihe sein.

Wir führen nun die folgende Definition ein:

Der Wert des positiv um den isolierten Begrenzungspunkt a genommenen Integrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz$$

soll das Residuum von $f(z)$ an der Stelle $z = a$ heißen.

Für dieses Residuum gebrauchen wir nach *Cauchy* die Bezeichnung

$$\underset{a}{r}\,[f(z)].$$

Nach Gleichung (15) *des vorigen Paragraphen ist dieses Residuum der Koeffizient von $\frac{1}{z-a}$ in der Entwickelung* (1) *von $f(z)$ in der Umgebung von $z = a$ nach positiven und negativen Potenzen von $z - a$.*

Hierbei haben wir a als endlich vorausgesetzt. Wir wollen indessen den Begriff des Residuums auf den Fall $a = \infty$ ausdehnen. Es sei also der Punkt ∞ ein isolierter Begrenzungspunkt einer Domäne D, in welcher $f(z)$ regulär ist. Wählen wir zwei Kreise mit dem Mittelpunkt 0 und mit genügend großen Radien, so wird in dem von diesen Kreisen begrenzten Kreisring $f(z)$ regulär und also in der Form

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n = \mathfrak{P}(z) + \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right) \tag{2}$$

darstellbar sein. Hier wird, beiläufig bemerkt, $\mathfrak{P}(z)$ eine beständig konvergierende Reihe sein, weil wir den Radius des äußeren Begrenzungskreises unseres Kreisringes beliebig groß nehmen dürfen.

Als Residuum von $f(z)$ für den Punkt ∞ bezeichnen wir nun den Wert von

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz,$$

wenn wir das Integral in negativem Sinne durch einen Kreis erstrecken, der ganz in der Domäne D liegt und dessen Äußeres, abgesehen vom Punkte ∞, ebenfalls ganz der Domäne D angehört.

Für dieses Residuum wenden wir die Bezeichnung

$$\underset{\infty}{r}\,[f(z)]$$

an. Nach dem vorigen Paragraphen ist sein Wert der negativ genommene Koeffizient von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung (2) der Funktion $f(z)$ in der Umgebung von $z=\infty$.

Wir wollen nun die „Cauchysche Residuenformel" ableiten.

Wir nehmen an, $f(z)$ sei auf einem Flächenstück F, abgesehen von den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_r$, regulär. Die Begrenzungslinien L, $L_1, L_2, \ldots$ von F setzen wir als *rektifizierbar* voraus (Fig. 48). Wir umgeben die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_r$ mit kleinen Kreisen $K_1, K_2, \ldots, K_r$, die sich gegenseitig ausschließen und ganz im Innern von F liegen. Schließen wir die Flächen dieser Kreise aus F aus, so erhalten wir eine Fläche F', begrenzt von den Linien

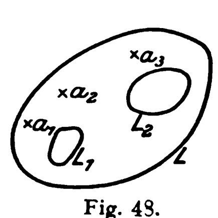


Fig. 48.

$$L, L_1, L_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots, K_r,$$

und auf der Fläche F' wird die Funktion $f(z)$ regulär sein.

Nach dem *Cauchy*schen Satz ist das positiv durch die Berandung von F' erstreckte Integral $\int f(z)\,dz$ gleich Null. Hieraus folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(F^+)} f(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_1^-} f(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_2^-} f(z)\,dz + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_r^-} f(z)\,dz = 0.$$

Die auf die Kreise $K_1, K_2, \ldots, K_r$ bezüglichen Glieder dieser Gleichung stellen die negativ genommenen Residuen der Funktion $f(z)$ an den Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ vor. Folglich ist

$$(3)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(F^+)} f(z)\,dz = \underset{a_1}{r}[f(z)] + \underset{a_2}{r}[f(z)] + \ldots + \underset{a_r}{r}[f(z)].$$

Als **Beispiel** der *Anwendung dieser* ***Residuenformel*** betrachten wir das Integral

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} R(z)\, dz,$$

wo $R(z)$ eine *rationale* Funktion bezeichnet, die für reelle Werte von z nicht unendlich wird und für $z = \infty$ mindestens von der zweiten Ordnung Null wird, worunter wir meinen, daß $z^2 R(z)$ für $z = \infty$ einen endlichen Grenzwert ergibt.

Wir verstehen unter p eine positive Größe, die später unendlich groß werden soll. Über dem Stück $-p \ldots +p$ der Achse der reellen Zahlen als Durchmesser beschreiben wir einen Halbkreis K und denken uns p schon so groß gewählt, daß die oberhalb der Achse der reellen Zahlen liegenden Pole der rationalen Funktion $R(z)$ sämtlich innerhalb des Halbkreises liegen (Fig. 49).

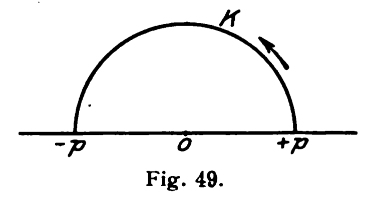


Fig. 49.

Die Gleichung (3), angewendet auf die Fläche dieses Halbkreises, liefert:

$$\int_{-p}^{+p} R(z)\, dz + \int_K R(z)\, dz = 2\pi i \sum_{a_k} r\,[R(z)], \tag{4}$$

wobei die Summe über alle Pole a_k von $R(z)$ zu erstrecken ist, die positive Ordinaten besitzen.

Nun verschwindet das über die Halbkreisperipherie K genommene Integral $\int R(z)\, dz$ für $p = \infty$. In der Tat ist für genügend große Werte von $|z|$, d. h. in der Umgebung von $z = \infty$,

$$R(z) = \frac{c}{z^2} + \frac{c'}{z^3} + \cdots = \frac{c}{z^2}(1 + \varepsilon),$$

wo ε mit $\frac{1}{z}$ verschwindet. Daher ist, wenn z auf K liegt,

$$|R(z)| = \frac{|c|}{p^2}\,|1 + \varepsilon| \leqq \frac{|c|}{p^2}\,(1 + |\varepsilon|) < \frac{2\,|c|}{p^2},$$

sobald $|z| = p$ so groß geworden ist, daß $|\varepsilon| < 1$ ausfällt. Aus vorstehender Ungleichung folgt

$$\left|\int_K R(z)\, dz\right| \leqq \int_K |R(z)|\,|dz| < \frac{2\,|c|}{p^2} \int_K |dz| = \frac{2\,|c|}{p}\,\pi,$$

weil $\int_K |dz|$ die Länge des Halbkreises K ist. Mit unendlich wachsendem p nähert sich $\frac{2\,|c|\,\pi}{p}$ und also auch $\int_K R(z)\, dz$ der Grenze Null.

Die Gleichung (4) geht daher für $p = \infty$ über in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a_k} r[R(z)], \tag{5}$$

wobei über alle Pole a_k von $R(z)$ mit positiv-imaginärem Teile zu summieren ist.

Beispielsweise wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+1)^n} = 2\pi i \, r_i \left[\frac{1}{(z^2+1)^n}\right].$$

Um das Residuum zu berechnen, haben wir nach Potenzen von

$$z - i = h$$

zu entwickeln. Nun ist

$$\frac{1}{(z^2+1)^n} = \frac{1}{[(i+h)^2+1]^n} = \frac{1}{[h(2i+h)]^n} = \frac{1}{(2i)^n h^n}\left[1 - \frac{ih}{2}\right]^{-n}$$

$$= \frac{1}{(2i)^n h^n}\left[1 + n\cdot\frac{ih}{2} + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{ih}{2}\right)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{ih}{2}\right)^3 + \cdots\right].$$

Der Koeffizient von $\frac{1}{h}$ in dieser Entwicklung lautet

$$\frac{1}{(2i)^n}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)\dots(2n-2)}{(n-1)!}\cdot\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!},$$

und dieses ist also der Wert des in Betracht kommenden Residuums. Daher finden wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{\pi}{2^{2n-2}}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}.$$

§ 9. Bestimmung der Null- und Unendlichkeitsstellen einer Funktion.

Es sei F entweder eine Elementarfläche oder eine von einer endlichen Anzahl von einfach geschlossenen Linien begrenzte Fläche. Die Randlinien werden *rektifizierbar* vorausgesetzt. Nun möge $f(z)$ auf der Fläche F *regulär* sein, abgesehen von den Punkten $a_1, a_2, \dots, a_r$, welche *Pole* von $f(z)$ sein sollen. Auf dem Rande von F soll $f(z)$ weder verschwinden noch Pole haben. Die im Innern von F vorhandenen Nullstellen von $f(z)$ seien $b_1, b_2, \dots, b_s$. Ihre Anzahl ist notwendig endlich, da sie keine Häufungsstellen besitzen können.

Die Funktion $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ist nun offenbar auf F regulär, abgesehen von den Punkten $a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s$.

Besitzt $f(z)$ in der Umgebung einer Stelle a die Entwicklung

$$f(z) = c_0(z-a)^k + c_1(z-a)^{k+1} + \cdots \qquad (c_0 \neq 0), \tag{1}$$

wobei k eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, so ist

$$f'(z) = k\,c_0(z-a)^{k-1} + \cdots$$

und folglich

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-a} + \mathfrak{P}(z-a).$$

Der Punkt a ist dann also ein Pol von $\frac{f'(z)}{f(z)}$ und k das zugehörige Residuum. Wenn k eine positive Zahl ist, so ist a eine Nullstelle von $f(z)$, und zwar soll diese Nullstelle eine *k-fache* oder „von der *Multiplizität*" k heißen. Wenn dagegen k eine negative Zahl ist, so ist a ein Pol von $f(z)$ und $-k$ seine Ordnung oder — wie wir auch sagen werden — es ist a eine $-k$*-fache Unendlichkeitsstelle* der Funktion $f(z)$ oder auch eine Unendlichkeitsstelle von der „*Multiplizität*" $-k$. Der Residuensatz ergibt nun

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{F^+} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = k_1 + k_2 + \cdots + k_s - (h_1 + h_2 + \cdots + h_r), \tag{2}$$

wo $k_1, k_2, \ldots, k_s$ die Multiplizitäten der Nullstellen $b_1, b_2, \ldots, b_s$ und $h_1, h_2, \ldots, h_r$ die Multiplizitäten der Unendlichkeitsstellen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ bedeuten. Rechnen wir nun jede Nullstelle und jede Unendlichkeitsstelle so oft, wie ihre Multiplizität angibt, so ist $k_1 + k_2 + \cdots + k_s$ die Gesamtzahl der Nullstellen und $h_1 + h_2 + \cdots + h_r$ die Gesamtzahl der Unendlichkeitsstellen von $f(z)$ innerhalb der Fläche F. Also:

Bezeichnet N die Gesamtzahl der Nullstellen, U die Gesamtzahl der Unendlichkeitsstellen von $f(z)$ innerhalb der Fläche F, so ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{F^+} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - U. \tag{2'}$$

Hieraus ergibt sich beiläufig ein neuer Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra. Ist nämlich

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n,$$

so hat man für genügend große Werte von $|z|$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n z^{n-1} + \cdots}{z^n + \cdots} = \frac{n}{z} + \frac{k_1}{z^2} + \frac{k_2}{z^3} + \cdots.$$

Wählen wir für F eine Kreisfläche, begrenzt von einem Kreise mit dem Mittelpunkt 0, dessen Peripherie im Innern des Geltungsbereiches der vorstehenden Entwicklung liegt, so kommt (§ 7, Formel (15))

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{F^+} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = n$$

und folglich, da $f(z)$ nicht unendlich wird, also $U = 0$ ist,

$$N = n,$$

d. h. $f(z)$ verschwindet genau n-mal.

Das Integral $\int \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int \frac{df(z)}{f(z)} = \int d \log f(z)$ geht durch die Substitution

$$f(z) = \zeta$$

in das Integral $\int \frac{d\zeta}{\zeta}$ über. Hieraus ergibt sich eine neue Deutung der Formel (2'). Wenn nämlich z eine der Begrenzungslinien L der Fläche F durchläuft, so wird der Punkt $\zeta = f(z)$ eine geschlossene Linie $\bar{L}$ beschreiben. Das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\bar{L}} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

gibt daher nach Kap. 5, § 4 die *Windungszahl* der Linie $\bar{L}$ an. Also können wir den Inhalt der Gleichung (2') auch so aussprechen:

*Der Punkt z beschreibe die Randlinien $L, L_1, L_2, \ldots$ der **Fläche** F **und zwar** die äußere Randlinie L in positivem, die **inneren Randlinien in** negativem Sinne. Dann **wird** der Punkt $\zeta = f(z)$ **gewisse** geschlossene Linien $\bar{L}, \bar{L}_1, \bar{L}_2, \ldots$ durchlaufen. Die Summe **der** Windungszahlen der letzteren Linien gibt dann die **Anzahl** der **Nullstellen, vermindert** um die Anzahl der Unendlichkeitsstellen, **welche** $f(z)$ **innerhalb** der **Fläche** F besitzt.*

Zwei Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ seien auf der Fläche F regulär. Längs des Randes von F sei beständig $|\varphi(z)| < |f(z)|$. Da $|\varphi(z)| \geqq 0$ ist, so kann $f(z)$ auf dem Rande von F nicht verschwinden. Ebensowenig kann $f(z) + \varphi(z)$ in einem Punkte des Randes von F Null sein, weil $|f(z) + \varphi(z)| \geqq |f(z)| - |\varphi(z)| > 0$ ist.

Setzen wir nun

$$\frac{f(z) + \varphi(z)}{f(z)} = 1 + u = \psi(z), \tag{3}$$

so ist nach Voraussetzung $u = \frac{\varphi(z)}{f(z)}$ längs des Randes von F beständig absolut genommen kleiner als 1, und es ist daher auch das Maximum von $|u|$ längs des Randes von F eine positive Zahl $\varrho < 1$. Der Punkt $\psi(z) = 1 + u$ fällt also niemals außerhalb des Kreises mit dem Mittelpunkt 1 und dem Radius ϱ, welcher Kreis den Nullpunkt ausschließt.

Nun folgt aus (3)

$$\frac{f' + \varphi'}{f + \varphi} = \frac{f'}{f} + \frac{\psi'}{\psi},$$

folglich

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{F+}\frac{f'+\varphi'}{f+\varphi}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{F+}\frac{f'}{f}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{F+}\frac{\psi'}{\psi}\,dz.$$

Das letzte Integral ist aber Null, weil der Punkt $\psi(z)$, während z eine Randlinie von F durchläuft, eine den Nullpunkt ausschließende Kurve beschreibt, deren Windungszahl also Null ist.

Die vorstehende Gleichung lehrt also, daß die Funktion $f(z)+\varphi(z)$ genau dieselbe Anzahl von Nullstellen auf der Fläche F besitzt, wie die Funktion f. Also:

Sind die Funktionen f und φ auf der Fläche F regulär und ist längs des Randes von F beständig $|\varphi| < |f|$, so besitzt die Funktion $f+\varphi$ genau so viele Nullstellen innerhalb F wie die Funktion f.

Diesen Satz verallgemeinert man leicht auf den Fall, in welchem f und φ in der Fläche F eine endliche Zahl von Polen besitzen. Es tritt dann in dem Ausspruch des Satzes an die Stelle der Anzahl der Nullstellen nur die Differenz zwischen dieser Anzahl und der Anzahl der Unendlichkeitsstellen.

Als Anwendung des vorstehenden Satzes wollen wir beweisen, daß eine auf der Fläche F reguläre Funktion $f(z)$, die auf der Fläche nirgends verschwindet, die folgende Eigenschaft besitzt:

Sowohl das Maximum wie das Minimum des absoluten Betrages von $f(z)$ findet sich auf dem Rande der Fläche F.

Angenommen, das Minimum von $|f(z)|$ fände sich nicht auf dem Rande von F. Dann wäre längs des Randes

$$|f(z_0)| < |f(z)|,$$

wo z_0 derjenige Punkt innerhalb F ist, für welchen das Minimum von $|f(z)|$ stattfindet. Folglich würden $f(z)$ und $f(z)-f(z_0)$ innerhalb F dieselbe Zahl von Nullstellen haben. Diese Zahl ist aber 0 für $f(z)$ und mindestens 1 für $f(z)-f(z_0)$, da letztere Funktion die Nullstelle $z=z_0$ hat. Die Annahme, von der wir ausgingen, führt also zu einem Widerspruch.

Fände sich auf dem Rande von F nicht das Maximum von $|f(z)|$, so wäre für einen geeignet gewählten Punkt z_0 im Innern von F die Ungleichung $|f(z)| < |f(z_0)|$ längs des Randes erfüllt. Also hätte $f(z_0)-f(z)$ dieselbe Zahl von Nullstellen innerhalb F wie $f(z_0)$, was wiederum widersinnig ist.

Die Gleichung (2′) ist nur ein spezieller Fall der folgenden:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{F^+} z^\lambda \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \Sigma b^\lambda - \Sigma a^\lambda, \tag{4}$$

in welcher λ eine nichtnegative ganze Zahl bedeutet und die Summen über die Null- bzw. Unendlichkeitsstellen von $f(z)$ im Innern von F auszudehnen sind. Dabei ist jede Stelle so oft zu berücksichtigen, wie ihre Multiplizität angibt.

6. Kapitel.

Die meromorphen Funktionen.

§ 1. Begriff der meromorphen Funktion.

Unter einer *meromorphen* Funktion verstehen wir eine *eindeutige* Funktion, die im Endlichen keinen *wesentlich singulären* Punkt besitzt.

Zu diesen Funktionen gehören die *ganzen* Funktionen, welche im Endlichen überhaupt keinen singulären Punkt haben; ferner die *rationalen* Funktionen, welche nur Pole und zwar in endlicher Anzahl besitzen können.

Das charakteristische Merkmal einer meromorphen Funktion ist dieses:

Bedeutet a einen beliebigen Punkt im Endlichen, so ist für eine passend gewählte Umgebung von a entweder

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots, \tag{1}$$

wenn nämlich a ein regulärer Punkt ist, oder aber

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^r}(c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots), \tag{2}$$

wenn nämlich a ein Pol r^{ter} Ordnung ist. Es ist in (2) $c_0 \neq 0$. Schließen wir den Fall, wo $f(z)$ identisch Null ist, aus, so wird in (1) ein erster Koeffizient in der Reihe $c_0, c_1, c_2, \ldots$ vorhanden sein, der nicht Null ist. Die beiden Fälle (1) und (2) können daher so zusammengefaßt werden:

Eine Funktion $f(z)$, die nicht identisch Null ist, ist dann und nur dann meromorph, wenn für jede endliche Stelle a eine Darstellung der Gestalt

$$f(z) = (z-a)^k(c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots) \qquad (c_0 \neq 0) \tag{3}$$

gilt, unter k eine (positive, verschwindende oder negative) ganze Zahl verstanden. Die Zahl k möge Ordnung der Stelle a für $f(z)$ heißen.

Hieraus folgen nun nachstehende Sätze:

1. *Jede Konstante ist eine meromorphe Funktion.*

2. *Summe und Differenz zweier meromorpher Funktionen sind wieder meromorphe Funktionen.*

3. *Produkt und Quotient zweier meromorpher Funktionen sind wieder meromorphe Funktionen.*

Zusammenfassend können wir sagen:

4. *Eine rationale Funktion von meromorphen Funktionen*

$$R(f_1, f_2, \ldots, f_k)$$

mit konstanten Koeffizienten ist wieder eine meromorphe Funktion.

Z. B. ist der Quotient zweier ganzer Funktionen eine meromorphe Funktion. Da $\sin z$, $\cos z$ ganze Funktionen sind, sind also $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ meromorphe Funktionen. Überhaupt gehören die meisten in der Analysis auftretenden eindeutigen Funktionen zu den meromorphen.

Deshalb ist es gerechtfertigt, diese Funktionen näher zu untersuchen. Ehe wir dazu übergehen, wollen wir einige Betrachtungen über unendliche Reihen anstellen.

§ 2. Reguläre Konvergenz.

Wir betrachten die Reihe

$$(1) \qquad f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots \qquad (F),$$

deren Glieder $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... für ein endliches Gebiet G der Ebene gegebene Funktionen sind. Ferner sei für jedes z im Gebiete G (Fig. 50)

$$(2) \qquad |f_1(z)| \leqq \varepsilon_1, \quad |f_2(z)| \leqq \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad |f_n(z)| \leqq \varepsilon_n, \ldots,$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ positive Konstante sind, deren Summe

$$(3) \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_n + \cdots \qquad (\varepsilon)$$

konvergiert. Wir sagen dann: die Reihe (1) sei ***regulär konvergent***. Die Beziehung der beiden Reihen bezeichnen wir wie früher auf S. 21 durch $(F) \ll (\varepsilon)$.

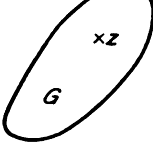


Fig. 50.

Eine regulär konvergente Reihe konvergiert *absolut und gleichmäßig* im Gebiete G. Es ist nämlich

$$|f_{n+1}(z) + \cdots| \leqq r_n = \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} + \cdots$$

und also für jedes z in G kleiner als eine fest vorgeschriebene Zahl $\delta > 0$, wenn n groß genug geworden ist.

Ist das Gebiet G eine Domäne, in der $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... regulär sind, so ist nach dem *Weierstraß*schen Summensatz die Summe $F(z)$ der Reihe (1) ebenfalls in G eine reguläre Funktion. Wenn wir für das Gebiet G einen Kreis mit dem Mittelpunkt a annehmen können, so sagen wir kurz, die Reihe (1) konvergiere regulär *„in der Umgebung der Stelle a“*. Falls die Reihe

$$f_{k+1}(z) + f_{k+2}(z) + \cdots$$

im Gebiete G regulär konvergiert, so sagen wir, der k^{te} Rest der Reihe (1) konvergiere regulär.

Wenn dieser Fall eintritt, können wir in der Domäne D die Summe $F(z)$ der Reihe (1) in die Form

$$F(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_k(z) + \Phi(z)$$

setzen, wo $\Phi(z)$ eine in der Domäne D reguläre Funktion ist, vorausgesetzt, daß $f_{k+1}(z), f_{k+2}(z), \ldots$ regulär in D sind.

Es gilt der Satz:

Sind $f_1(z), f_2(z), \ldots$ regulär in einer Umgebung der Stelle a und ist für diese Umgebung

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

regulär konvergent, so konvergiert auch die Reihe

$$f_1'(z) + f_2'(z) + \cdots + f_n'(z) + \cdots$$

regulär für die Umgebung von a.

Gelten nämlich die Ungleichungen

$$|f_1(z)| \leqq \varepsilon_1, \quad |f_2(z)| \leqq \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad |f_n(z)| \leqq \varepsilon_n, \ldots$$

für alle Punkte eines Kreises vom Radius ϱ und dem Mittelpunkt a, so ist dem Satz von Kap. 2, § 9 zufolge für alle Punkte des Kreises $|z-a| \leqq \frac{\varrho}{2}$

$$|f_1'(z)| \leqq \frac{\varepsilon_1}{\frac{\varrho}{2}}, \quad |f_2'(z)| \leqq \frac{\varepsilon_2}{\frac{\varrho}{2}}, \quad \ldots, \quad |f_n'(z)| \leqq \frac{\varepsilon_n}{\frac{\varrho}{2}}, \ldots$$

und aus der Konvergenz von

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots$$

folgt die von

$$\frac{\varepsilon_1}{\frac{\varrho}{2}} + \frac{\varepsilon_2}{\frac{\varrho}{2}} + \cdots.$$

§ 3. Die meromorphen Funktionen mit einer endlichen Anzahl von Polen.

Ist $f(z)$ eine meromorphe Funktion, die keinen Pol im Endlichen besitzt, so ist sie eine ganze Funktion. Sind nur endlich viele Pole vorhanden, so seien diese

$$a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_k$$

und

$$g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \quad g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right), \quad \ldots, \quad g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$$

die zugehörigen meromorphen Teile. *Dann ist*

$$f(z) = \sum_{i=1}^{k} g_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right) + G(z),$$

wo $G(z)$ eine ganze Funktion bedeutet.

§ 4. Die meromorphen Funktionen mit unendlich vielen Polen.

Hat eine meromorphe Funktion unendlich viele Pole, so können dieselben nur die eine Häufungsstelle ∞ haben. Denn jede *Häufungsstelle* von Polen ist eine *wesentlich* singuläre Stelle, und wir haben ausdrücklich vorausgesetzt, daß $f(z)$ nur die wesentlich singuläre Stelle ∞ hat. Da hiernach in jedem Kreise mit dem Mittelpunkt Null nur endlich viele Pole von $f(z)$ liegen können, so lassen sich die Pole nach wachsenden absoluten Beträgen anordnen. Die Pole bilden dann also eine Reihe

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

von der Beschaffenheit, daß

$$|a_0| \leqq |a_1| \leqq |a_2| \leqq |a_3| \leqq |a_4| \leqq \cdots$$

und

$$\lim_{n=\infty} a_n = \infty$$

ist. Wir bezeichnen die zugehörigen meromorphen Teile von $f(z)$ mit

$$F_0(z) = g_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right), \quad F_1(z) = g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \ldots, \quad F_n(z) = g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right), \ldots .$$

Ist die Stelle $z = 0$ ein Pol von $f(z)$, so ist notwendig $a_0 = 0$. Also jedenfalls sind $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von Null verschieden.

Es sei C_1 ein Kreis mit dem Mittelpunkt 0, dessen Radius kleiner als $|a_1|$ sei. Die Punkte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ liegen sämtlich außerhalb des Kreises C_1. Jetzt sei C_2 ein Kreis mit dem Mittelpunkt 0, dessen Radius größer als der Radius von C_1, aber kleiner als $|a_2|$ sei. Die Punkte $a_2, a_3, \ldots$ liegen sämtlich außerhalb des Kreises C_2. Nun sei wieder C_3 ein Kreis mit dem Mittelpunkt Null, dessen Radius größer als der Radius von C_2, aber kleiner als $|a_3|$ ist (Fig. 51). So fortfahrend erhalten wir eine Reihe von Kreisen $C_1, C_2, C_3, \ldots$ mit dem gemeinsamen Mittelpunkt 0 und beständig wachsenden Radien Diese Kreise sind so beschaffen, daß der Pol a_n von $F_n(z) = g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ außerhalb des Kreises C_n liegt. Da der Radius des Kreises C_n beliebig dicht unter $|a_n|$ angenommen werden darf, so können wir voraussetzen, daß der Radius von C_n mit n ins Unendliche wächst.

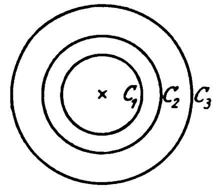


Fig. 51.

§ 5. Der Mittag-Lefflersche Satz.

Es sei eine Reihe von meromorphen Funktionen

$$F_0(z),\ F_1(z),\ F_2(z),\ \ldots,\ F_n(z), \ldots$$

gegeben.

Die Kreise

$$C_1,\ C_2,\ C_3, \ldots, C_n, \ldots$$

mögen den Mittelpunkt 0 haben, ihre Radien

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots,\ r_n, \ldots$$

mögen beständig und zwar ins Unendliche anwachsen.

Es werde vorausgesetzt, daß die singulären Stellen von $F_n(z)$ sämtlich außerhalb des Kreises C_n liegen.

Auf der durch den Kreis C_n vorgestellten Fläche ist $F_n(z)$ regulär und also

$$F_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots, \quad \text{für } |z| \leqq r_n. \tag{1}$$

Dabei konvergiert diese Potenzreihe *gleichmäßig* für alle diese Werte von z. Ist also ε_n eine beliebig vorgeschriebene positive Zahl, so kann man den Index N so wählen, daß die ganze Funktion

$$h_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_N z^N \tag{2}$$

der Bedingung

$$|F_n(z) - h_n(z)| < \varepsilon_n \tag{3}$$

genügt, sobald $|z| \leqq r_n$ ist.

Nun mögen $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3, \ldots$ positive Zahlen sein, die so angenommen sind, daß

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots \tag{4}$$

konvergiert. Dann können wir zeigen, daß

$$\begin{aligned} F(z) = F_0(z) &+ \{F_1(z) - h_1(z)\} + \{F_2(z) - h_2(z)\} + \ldots \\ &+ \{F_n(z) - h_n(z)\} + \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

in jedem endlichen Gebiete der Ebene einen *regulär* konvergierenden Rest besitzt.

In der Tat sei G ein solches Gebiet und C_k der *erste* Kreis der Reihe $C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots$, welcher G ganz in seinem Innern enthält. Betrachten wir dann

$$\Phi(z) = \{F_k(z) - h_k(z)\} + \{F_{k+1}(z) - h_{k+1}(z)\} + \ldots, \tag{6}$$

so konvergiert diese Reihe in G *regulär*, weil dieselbe nach (3) eine *Minorante* der Reihe

$$\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} + \ldots$$

ist. Nehmen wir für G einen Kreis K mit dem Mittelpunkt a, so ist $\Phi(z)$ regulär innerhalb K (Fig. 52).

Da nun

$$F(z) = F_0(z) + \{F_1(z) - h_1(z)\} + \dots + \{F_{k-1}(z) - h_{k-1}(z)\} + \Phi(z)$$

ist, so leuchtet ein, daß $F(z)$ sich in der Umgebung von $z = a$ ebenfalls regulär verhält, wenn der Punkt $z = a$ für keine der Funktionen $F_0(z)$, $F_1(z)$, ..., $F_{k-1}(z)$ ein Pol ist. Im andern Falle kann $z = a$ für $F(z)$ nur ein Pol sein, und zwar ist der zugehörige meromorphe Teil von $F(z)$ dann gleich der Summe der meromorphen Teile derjenigen Funktionen $F_0(z)$, $F_1(z)$, $F_2(z)$, ..., welche $z = a$ zum Pol haben. Da der Kreis K beliebig groß angenommen werden kann, so leuchtet ein, daß die Reihe $F(z)$ in jedem beliebig großen, aber ganz im Endlichen liegenden Bereiche der komplexen Zahlenebene, nach Abtrennung einer endlichen Zahl von Anfangsgliedern, absolut und gleichmäßig konvergiert.

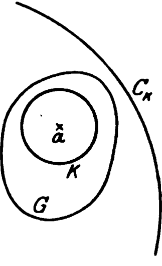


Fig. 52.

Wir wollen nun den folgenden speziellen Fall des eben bewiesenen Satzes besonders hervorheben:

Es sei gegeben eine nach wachsenden absoluten Beträgen geordnete Reihe von Zahlen

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

mit der Häufungsstelle $\lim_{n=\infty} a_n = \infty$. *Jeder Zahl* a_n *sei zugeordnet eine ganze rationale Funktion von* $\frac{1}{z - a_n}$:

$$F_n(z) = g_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right).$$

Dann lassen sich die ganzen rationalen Funktionen $h_1(z)$, $h_2(z)$, ... *so bestimmen, daß*

$$F(z) = g_0\left(\frac{1}{z - a_0}\right) + \left\{g_1\left(\frac{1}{z - a_1}\right) - h_1(z)\right\} + \left\{g_2\left(\frac{1}{z - a_2}\right) - h_2(z)\right\}$$
$$+ \dots + \left\{g_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) - h_n(z)\right\} + \dots$$

in einem beliebig angenommenen ganz im Endlichen liegenden Bereich nach Abtrennung einer endlichen Zahl von Anfangsgliedern regulär konvergiert.

Die Funktion $h_n(z)$ besteht aus geeignet gewählten Anfangsgliedern der Entwicklung von $g_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$ nach aufsteigenden Potenzen von z.

Der vorstehende Satz wird der *Mittag-Leffler*sche Satz genannt.

§ 6. Allgemeiner Ausdruck einer meromorphen Funktion mit unendlich vielen Polen.

Es sei nun $f(z)$ eine meromorphe Funktion mit den Polen

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

die wir nach steigenden absoluten Beträgen angeordnet denken. Die zugehörigen meromorphen Teile von $f(z)$ seien

$$g_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right), \quad g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \quad g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right), \ldots, g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right), \ldots .$$

Nach dem *Mittag-Leffler*schen Satze können wir jetzt

$$F(z) = g_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - h_n(z)\right]$$

bilden. Die Funktion $F(z)$ ist dann eine meromorphe Funktion, welche dieselben meromorphen Teile besitzt wie $f(z)$.

Folglich ist $f(z) - F(z) = G(z)$ eine *ganze* Funktion. Also gilt

$$f(z) = G(z) + g_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - h_n(z)\right].$$

Eine jede meromorphe Funktion läßt sich also darstellen als Summe einer ganzen Funktion und einer Reihe von rationalen Funktionen, von welchen jede einzelne im Endlichen nur einen der Pole von $f(z)$ zum Pol hat.

Eine solche Darstellung von $f(z)$ nennen wir eine „***Partialbruchzerlegung***“ von $f(z)$.

§ 7. Der Fall einfacher Pole.

Wir wollen hier den häufig auftretenden Fall besonders diskutieren, in welchem die den Punkten

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

zugeordneten meromorphen Teile die Gestalt

$$\frac{c_0}{z-a_0}, \quad \frac{c_1}{z-a_1}, \quad \frac{c_2}{z-a_2}, \ldots, \quad \frac{c_n}{z-a_n}, \ldots$$

besitzen, so daß es sich also ausschließlich um einfache Pole handelt. Da

$$\frac{c_n}{z-a_n} = -\frac{c_n}{a_n}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{a_n}} = -\frac{c_n}{a_n}\left(1 + \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{a_n^2} + \ldots\right),$$

so ist im vorliegenden Falle

$$(1) \qquad h_n(z) = -\frac{c_n}{a_n} - \frac{c_n}{a_n^2}z - \frac{c_n}{a_n^3}z^2 - \ldots - \frac{c_n}{a_n^{k_n}}z^{k_n-1}$$

und also

$$2)\qquad F(z) = \frac{c_0}{z-a_0} + \sum_1^\infty \left[\frac{c_n}{z-a_n} + \frac{c_n}{a_n} + \frac{c_n}{a_n^2} z + \cdots + \frac{c_n}{a_n^{k_n}} z^{k_n - 1}\right]$$

zu setzen. Die Gleichung (2) läßt sich auch so schreiben:

$$(2')\qquad F(z) = \frac{c_0}{z-a_0} + \sum_1^\infty \left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n} \cdot \frac{c_n}{z-a_n},$$

und die ganzen Zahlen k_n sind nun so zu wählen, daß in jedem endlichen Gebiet der z-Ebene die vorstehende Summe nach Abtrennung einer endlichen Zahl von Anfangsgliedern regulär konvergiert.

Betrachten wir nun irgendein endliches Gebiet der z-Ebene, so wird, sobald der Index n genügend groß geworden ist, $\frac{z}{a_n}$ absolut genommen unter einer beliebig klein gewählten Zahl und folglich $1 - \frac{z}{a_n}$ beliebig dicht bei 1 liegen, wo auch der Punkt z in jenem Gebiete angenommen werden möge. Wenn daher ε eine beliebig klein gewählte positive Zahl bedeutet, so kann der Index ν so angenommen werden, daß für $n \geqq \nu$

$$\left|1 - \frac{z}{a_n}\right|$$

zwischen $1 - \varepsilon$ und $1 + \varepsilon$ liegt, also

$$\left|\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n} \cdot \frac{c_n}{a_n\left(\frac{z}{a_n} - 1\right)}\right| \quad \text{zwischen}$$

$$\left|\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n} \cdot \frac{c_n}{a_n}\right| \cdot \frac{1}{1-\varepsilon} \quad \text{und} \quad \left|\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n} \cdot \frac{c_n}{a_n}\right| \cdot \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Folglich wird die Reihe $F(z)$ in jedem endlichen Gebiete nach Abtrennung von endlich vielen Gliedern dann und nur dann absolut konvergieren, wenn

$$\sum_1^\infty \left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n} \cdot \frac{c_n}{a_n}$$

absolut konvergiert für jeden Wert von z. Ist aber diese Bedingung erfüllt, so wird die Reihe $F(z)$ in jedem endlichen Gebiete *regulär* konvergent sein. Denn liegt irgendein Gebiet vor, so sei ϱ die obere Grenze des absoluten Betrages von z in diesem Gebiete. Ferner werde zu der positiven Zahl $\varepsilon < 1$ der Index ν wie oben bestimmt, dann ist in dem betrachteten Gebiete

$$(3)\qquad \sum_{n=\nu}^\infty \left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n} \cdot \frac{c_n}{z-a_n}$$

eine Minorante von

$$(4)\qquad \sum \left|\frac{\varrho}{a_n}\right|^{k_n} \cdot \left|\frac{c_n}{a_n}\right| \cdot \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Da letztere Reihe aus konstanten positiven Gliedern gebildet ist, so ist die Reihe (3) und folglich auch (2') in dem betrachteten Gebiete nach Abtrennung von endlich vielen Gliedern regulär konvergent.

Es gilt also der Satz:

In der Gleichung (2) bzw. (2') sind die Zahlen k_n so zu wählen, daß

$$\sum_1^\infty \left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n} \frac{c_n}{a_n}$$

für jeden Wert von z absolut konvergiert.

Wir fragen nun zunächst: Wann dürfen wir die Zahlen k_n sämtlich gleich ein und derselben Zahl m setzen?

Dies ist dann und nur dann erlaubt, wenn

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{z}{a_n}\right)^m \cdot \frac{c_n}{a_n} = z^m \cdot \sum_1^\infty \frac{c_n}{a_n^{m+1}}$$

für jedes z absolut konvergiert. Hieraus folgt:

In der Gleichung (2) bzw. (2') darf man die Zahlen k_n sämtlich gleich ein und derselben Zahl m setzen, wenn

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{|c_n|}{|a_n|^{m+1}}$$

konvergiert.

Wann kann ferner $k_n = n$ genommen werden?

Offenbar dann, wenn

$$\sum \frac{c_n}{a_n^{n+1}} z^n \quad \text{oder auch} \quad \sum \frac{c_n}{a_n^{n+1}} z^{n+1}$$

beständig konvergiert, also

$$\lim \frac{\sqrt[n+1]{|c_n|}}{|a_n|} = 0$$

ist. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn der obere Limes von $\sqrt[n+1]{|c_n|}$ endlich ist, oder wenn

$$\sum c_n z^n$$

einen nicht verschwindenden Konvergenzradius hat.

Also insbesondere:

Für den Fall, daß die absoluten Beträge der Zähler c_n der meromorphen Teile unter einer festen positiven Grenze bleiben, darf man

$$k_n = n$$

setzen.

§ 8. Beispiele.

Als Beispiele wollen wir die Funktionen

$$\frac{\pi}{\sin z\pi}, \quad \frac{\pi}{\cos z\pi}, \quad \pi \cot z\pi = \frac{\pi \cos z\pi}{\sin z\pi}, \quad \pi \operatorname{tg} z\pi = \frac{\pi \cdot \sin z\pi}{\cos z\pi}$$

betrachten.

Aus den Definitionsgleichungen

$$\sin z\pi = \frac{e^{iz\pi} - e^{-iz\pi}}{2i}, \qquad \cos z\pi = \frac{e^{iz\pi} + e^{-iz\pi}}{2}$$

folgt, daß die Nullstellen von $\sin z\pi$

$$0, \ 1, \ -1, \ 2, \ -2, \ 3, \ -3, \ \ldots$$

sind und die Nullstellen von $\cos z\pi$

$$\tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{3}{2}, \quad -\tfrac{3}{2}, \quad \ldots .$$

Betrachten wir nun zunächst die Funktion

$$f(z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}.$$

Ihre Pole sind in der Form

$$z = n$$

enthalten, wo n jede ganze Zahl bedeuten kann.

Um den meromorphen Teil, welcher dem Pole n entspricht, zu finden, setzen wir

$$z - n = h, \quad \text{also} \quad z = n + h.$$

Es wird dann

$$f(z) = \frac{\pi}{\sin(n+h)\pi} = \frac{(-1)^n \pi}{\sin h\pi} = \frac{(-1)^n \cdot \pi}{h\pi - \frac{h^3\pi^3}{3!} + \ldots}$$

oder

$$f(z) = \frac{(-1)^n}{h} + \mathfrak{P}(h) = \frac{(-1)^n}{z-n} + \mathfrak{P}(z-n),$$

wo $\mathfrak{P}$ wie immer eine gewöhnliche Potenzreihe andeutet. Der meromorphe Teil ist also $\frac{(-1)^n}{z-n}$.

Den Polen

$$0, \ 1, \ -1, \ 2, \ -2, \ 3, \ -3, \ \ldots$$

entsprechen also der Reihe nach die meromorphen Teile

$$\frac{1}{z}, \quad \frac{-1}{z-1}, \quad \frac{-1}{z+1}, \quad \frac{1}{z-2}, \quad \frac{1}{z+2}, \quad \frac{-1}{z-3}, \quad \frac{-1}{z+3}, \quad \ldots .$$

Es wird demnach

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{|a_n|^{m+1}} = \frac{1}{1^{m+1}} + \frac{1}{1^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} + \ldots$$

konvergent, wenn wir $m = 1$ wählen. *Daher stellt*

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right] + (-1)^n\left[\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}{}'(-1)^n\left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right]$$

eine meromorphe Funktion mit denselben meromorphen Teilen wie $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ *vor, und folglich ist*

$$(1) \qquad \frac{\pi}{\sin \pi z} = G(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'(-1)^n\left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right].$$

Dabei deutet das *Komma* an dem Summenzeichen an, daß in der Summe das $n = 0$ entsprechende Glied auszulassen ist. $G(z)$ bedeutet eine ganze Funktion, auf deren Bestimmung wir später eingehen wollen.

Bei der Funktion

$$f(z) = \frac{\pi}{\cos z\pi}$$

entspricht dem Pole $z = \frac{2n-1}{2}$ der meromorphe Teil

$$\frac{(-1)^n}{z - \frac{2n-1}{2}},$$

und es ist daher

$$(2) \qquad \frac{\pi}{\cos z\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{z - \frac{2n-1}{2}} + \frac{1}{\frac{2n-1}{2}}\right] + G_1(z),$$

unter $G_1(z)$ eine gewisse ganze Funktion verstanden.

Die Funktion

$$f(z) = \pi \cot z\pi$$

hat die Nullstellen von $\sin z\pi$ zu Polen. Dem Pole

$$z = n$$

entspricht die Entwicklung

$$f(n+h) = \frac{\pi \cos \pi(n+h)}{\sin \pi(n+h)} = \frac{\pi \cos \pi h}{\sin \pi h} = \frac{1}{h} + \mathfrak{P}(h)$$

und folglich der meromorphe Teil

$$\frac{1}{z-n}.$$

Also ist

$$(3) \qquad \pi \cot z\pi = G_2(z) + \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right).$$

Die Funktion

$$f(z) = \pi \operatorname{tg} z\pi$$

hat die Nullstellen von $\cos z\pi$ zu Polen, und dem Pole

$$z = \frac{2n-1}{2}$$

entspricht die Entwicklung

$$f\left(\frac{2n-1}{2} + h\right) = \frac{\pi \sin((n-\frac{1}{2})\pi + h\pi)}{\cos((n-\frac{1}{2})\pi + h\pi)} = \frac{-\pi \cos h\pi}{\sin h\pi} = -\frac{1}{h} + \mathfrak{P}(h).$$

Daher wird

$$(4) \qquad \pi \operatorname{tg} z\pi = G_3(z) - \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{z - \frac{2n-1}{2}} + \frac{1}{\frac{2n-1}{2}} \right\}.$$

Die in den Partialbruchzerlegungen (1) bis (4) auftretenden ganzen Funktionen $G(z)$, $G_1(z)$, $G_2(z)$, $G_3(z)$ bleiben zu bestimmen. Ihre Bestimmung verursacht gewisse Schwierigkeiten, die aber auf dem von *Cauchy* eingeschlagenen Wege zur Herstellung der Partialbruchzerlegungen fortfallen. *Cauchy*s Verfahren wollen wir im folgenden Paragraphen auseinandersetzen.

§ 9. *Cauchys* Methode der Partialbruchzerlegung.

Es sei $f(z)$ eine meromorphe Funktion mit unendlich vielen Polen. Die von Null verschiedenen Pole seien $a_1, a_2, \ldots.$ Ferner sei $a_0 = 0$. Allgemein heiße $g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ der dem Pole a_n entsprechende meromorphe Teil von $f(z)$. Unter $g_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) = g_0\left(\frac{1}{z}\right)$ verstehen wir, wenn $a_0 = 0$ ein Pol von $f(z)$ ist, den meromorphen Teil von $f(z)$ für diesen Pol. Andernfalls sei $g_0\left(\frac{1}{z}\right)$ identisch Null.

Wir betrachten nun eine einfach geschlossene rektifizierbare Kurve C, welche durch keinen der Pole von $f(z)$ hindurchgeht und die Punkte $a_0 = 0$, a_1, a_2, $\ldots$, a_r in ihrem Innern enthält.

Für jede natürliche Zahl m ist das Integral

$$(1) \qquad J = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} - \frac{z}{\zeta^2} - \cdots - \frac{z^{m-1}}{\zeta^m} \right) d\zeta,$$

welches sich auch in die Form

$$(2) \qquad J = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{z^m}{\zeta^m} \cdot \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

setzen läßt, nach dem *Cauchy*schen Residuensatze leicht auszuwerten. In diesem Integrale wollen wir unter z einen im Innern der

Kurve C beliebig fixierten Punkt verstehen, der jedoch mit keinem der Punkte $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r$ zusammenfallen soll. Dann sind die Punkte

$$z, \quad a_0 = 0, \quad a_1, \quad a_2, \ldots, a_r$$

die Unendlichkeitspunkte der integrierten Funktion $\frac{z^m}{\zeta^m} \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ im Innern von C.

Dem Punkte $\zeta = z$ entspricht das Residuum

$$f(z).$$

Beim Punkt $\zeta = a_k$ haben wir folgende Entwicklungen:

$$f(\zeta) = g_k\left(\frac{1}{\zeta - a_k}\right) + \mathfrak{P}(\zeta - a_k),$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a_k - (z - a_k)} = -\left(\frac{1}{z - a_k} + \frac{\zeta - a_k}{(z - a_k)^2} + \frac{(\zeta - a_k)^2}{(z - a_k)^3} + \ldots\right).$$

Der Koeffizient von $\frac{1}{\zeta - a_k}$ in der Entwicklung von

$$f(\zeta) \cdot \frac{1}{\zeta - z}$$

lautet daher

$$-g_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right).$$

Bezeichnen wir den Koeffizienten von $\frac{1}{\zeta - a_k}$ in der Entwicklung von

$$-f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \cdots + \frac{z^{m-1}}{\zeta^m}\right]$$

nach steigenden Potenzen von $\zeta - a_k$ mit $h_k(z)$, so ist $h_k(z)$ eine ganze Funktion $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von z, und das dem Punkte a_k entsprechende Residuum im Integrale J lautet dann

$$(3) \qquad -\left(g_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) - h_k(z)\right).$$

Nach dem Residuensatze ist nun

$$J = f(z) - \sum_{k=0}^{r}\left(g_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) - h_k(z)\right)$$

oder

$$(4) \qquad f(z) = \sum_{k=0}^{r}\left(g_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) - h_k(z)\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{z^m}{\zeta^m} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

Wir lassen nun, unter z einen festliegenden Wert verstanden, die Kurve C sich immer mehr und mehr ausdehnen, so daß die Anzahl

der in ihr Inneres fallenden Punkte $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ über alle Grenzen wächst. *Wenn nun hierbei der Wert des Integrales*

$$R = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^m(\zeta - z)} \tag{5}$$

unter alle Grenzen sinkt, so gilt für den betrachteten Wert von z die Gleichung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - h_k(z)\right). \tag{6}$$

In bezug auf die ganzen Funktionen $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades $h_k(z)$ ist noch folgendes zu bemerken. Man hat

$$g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - h_k(z) = -\frac{z^m}{2\pi i}\int_{(a_k)} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^m(\zeta - z)},$$

wobei das Integral im positiven Sinne um den Punkt a_k zu erstrecken ist. Wenn nun $k > 0$, also a_k von Null verschieden ist, so dürfen wir in vorstehender Gleichung den Punkt z auf eine beliebig klein gewählte Umgebung der Stelle $z = 0$ einschränken. Da die Entwicklung der rechten Seite nach Potenzen von z mit dem Gliede z^m beginnt, so ist klar, daß $h_k(z)$ die Summe der ersten m Glieder in der Entwicklung von

$$g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$$

nach aufsteigenden Potenzen von z vorstellt.

Wenn $k = 0$ ist, so ist

$$h_0(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)} f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \cdots + \frac{z^{m-1}}{\zeta^m}\right]d\zeta,$$

wobei das Integral positiv um den Nullpunkt genommen ist.

Da in der Umgebung von $\zeta = 0$

$$f(\zeta) = g_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \cdots$$

ist, so wird

$$h_0(z) = -(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_{m-1}z^{m-1}).$$

Was den Wert des Integrals R angeht, so ist jedenfalls

$$|R| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_C \left|\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{m+1}}\right| \cdot \frac{1}{\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right|}.$$

Wenn nun die Kurve C sich so ausdehnt, daß ihre Punkte immer weiter hinausrücken, so wird $1 - \frac{z}{\zeta}$ immer dichter bei 1 liegen. Es

wird also, wenn ε eine beliebig gewählte positive Größe < 1 bezeichnet, schließlich

$$|R| \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon} \int_C \left| \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{m+1}} \right|$$

sein. Hieraus folgt:

Die Entwicklung (6) *von* $f(z)$ *ist sicher gültig, und zwar für jeden Wert von* z, *falls bei unendlicher Ausdehnung der Kurve* C *das Integral*

$$\int_C \left| \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{m+1}} \right|$$

den Grenzwert Null annimmt.

§ 10. Beispiele.

Als erstes Beispiel betrachten wir

$$f(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{1}$$

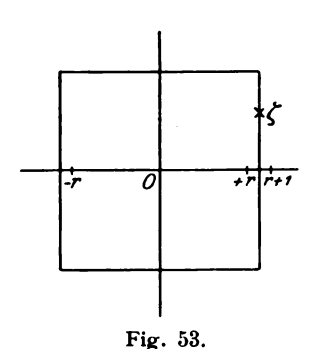


Fig. 53.

Die Kurve C setzen wir zusammen aus den 4 Seiten des Quadrats

$$x = \pm \lambda, \quad y = \pm \lambda,$$

wobei $\lambda = r + \frac{1}{2}$ sein soll, unter r eine positive ganze Zahl verstanden (Fig. 53). Ist ζ ein Punkt auf einer der vertikalen Seiten dieses Quadrats, so ist

$$\zeta = \pm (r + \tfrac{1}{2}) + i y, \qquad (-\lambda \leqq y \leqq +\lambda)$$

und folglich

$$f(\zeta) = \frac{\pm \pi}{\cos \pi i y} = \frac{\pm 2\pi}{e^{-\pi y} + e^{\pi y}} = \frac{\pm \pi}{1 + \frac{\pi^2 y^2}{2!} + \frac{\pi^4 y^4}{4!} + \cdots}.$$

Auf diesen vertikalen Seiten ist daher beständig

$$|f(\zeta)| \leqq \pi. \tag{2}$$

Auf einer der horizontalen Seiten des Quadrats ist

$$\zeta = \pm i\lambda + x \qquad (-\lambda \leqq x \leqq +\lambda),$$

also

$$f(\zeta) = \frac{2 i \pi}{e^{i\pi\zeta} - e^{-i\pi\zeta}} = \frac{2 i \pi}{e^{i\pi x} \cdot e^{\mp\pi\lambda} - e^{-i\pi x} \cdot e^{\pm\pi\lambda}} = \frac{\mp 2 i \pi}{e^{\pi\lambda} e^{\mp i\pi x} - e^{-\pi\lambda} e^{\pm i\pi x}}.$$

Der absolute Betrag des Nenners ist mindestens gleich

$$e^{\pi\lambda} - e^{-\pi\lambda}$$

und nimmt also mit wachsendem λ unbegrenzt zu.

Daher besteht die Ungleichung (2) auch auf den horizontalen Seiten des Quadrats, sobald $\lambda = r + \frac{1}{2}$ eine gewisse Grenze überschritten hat. Es ist also dann

$$\int\limits_C \left| \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{m+1}} \right| \leqq \pi \int\limits_C \left| \frac{d\zeta}{\zeta^{m+1}} \right|.$$

Längs der Seiten des Quadrats ist nun $|\zeta| \geqq r + \frac{1}{2}$. Daher gilt

$$\pi \int\limits_C \left| \frac{d\zeta}{\zeta^{m+1}} \right| \leqq \frac{\pi}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^{m+1}} \cdot \int\limits_C |d\zeta| = \frac{\pi}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^{m+1}} \cdot 8\left(r+\frac{1}{2}\right),$$

da $\int\limits_C |d\zeta|$ den Umfang des Quadrats vorstellt. Es liegt demnach

$$\int\limits_C \left| \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{m+1}} \right|$$

unterhalb $\frac{8\pi}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^m}$ und verschwindet daher mit unendlich wachsendem r, wenn wir $m = 1$ nehmen.

Die Gleichung (6) *des vorigen Paragraphen ergibt nun*

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' (-1)^n \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right), \tag{3}$$

womit nicht nur ein neuer Beweis der Gleichung (1) in § 8 erbracht ist, sondern zugleich die in letzterer Gleichung auftretende ganze Funktion $G(z)$ als identisch Null erkannt worden ist.

Als zweites Beispiel betrachten wir

$$f(z) = \pi \cot \pi z = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}. \tag{4}$$

Die Kurve C identifizieren wir, wie beim vorigen Beispiel, mit dem Umfang des Quadrats $x = \pm \lambda$, $y = \pm \lambda$, wo $\lambda = r + \frac{1}{2}$ ist. Auf den vertikalen Seiten des Quadrats ist $\zeta = \pm (r + \frac{1}{2}) + i y$, also

$$f(\zeta) = \pm \frac{\pi \sin \pi i y}{\cos \pi i y} = \pm \frac{\pi}{i} \cdot \frac{e^{-\pi y} - e^{\pi y}}{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}.$$

Dieser Bruch ändert seinen absoluten Betrag nicht, wenn y durch $-y$ ersetzt wird. Für ein positives y ist aber

$$\frac{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}$$

positiv und kleiner als 1. Daher hat man

$$|f(\zeta)| \leqq \pi \tag{5}$$

auf den vertikalen Seiten des Quadrats.

Auf den horizontalen Seiten des Quadrats ist $\zeta = \pm i\lambda + x$, also

$$f(\zeta) = i\pi \cdot \frac{e^{i\pi x} e^{+\lambda\pi} + e^{-i\pi x} \cdot e^{\pm\lambda\pi}}{e^{i\pi x} e^{\mp\lambda\pi} - e^{-i\pi x} e^{\pm\lambda\pi}}.$$

Für sehr große Werte von λ liegt $f(\zeta)$ dicht bei $\mp i\pi$.

Folglich ist für genügend große Werte von λ längs aller Seiten des Quadrats

$$|f(\zeta)| < \pi + \varepsilon, \tag{6}$$

wo ε eine beliebig gewählte positive Größe bedeutet. Hieraus folgt nun weiter, daß das Integral

$$\int_C \left| \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{m+1}} \right|$$

für $m = 1$ mit unendlich wachsendem $\lambda = r + \frac{1}{2}$ verschwindet.

Daher gilt

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right). \tag{7}$$

In analoger Weise erhält man

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = \pi + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z - \frac{2n-1}{2}} + \frac{1}{\frac{2n-1}{2}} \right), \tag{8}$$

$$\pi \operatorname{tg} \pi z = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - \frac{2n-1}{2}} + \frac{1}{\frac{2n-1}{2}} \right). \tag{9}$$

Die letzteren Gleichungen lassen sich übrigens auch leicht aus den Gleichungen (3) und (7) ableiten, indem man in diesen z durch $z + \frac{1}{2}$ ersetzt und hierauf einige einfache Umformungen vornimmt.

Faßt man in (3) und (7) je zwei entgegengesetzten Werten von n entsprechende Terme zusammen, so kommt

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right), \tag{10}$$

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right). \tag{11}$$

§ 11. Ganze Funktionen mit vorgeschriebenen Nullstellen.

Für viele Untersuchungen ist es wichtig, den *allgemeinen Ausdruck* einer ganzen Funktion zu kennen, die an *vorgeschriebenen* Stellen und nur an diesen verschwindet.

Wir wollen zunächst den allgemeinen Ausdruck derjenigen ganzen Funktionen aufsuchen, die *überhaupt nicht* verschwinden.

Bezeichnet $G(z)$ eine derartige Funktion, so ist

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

eine ganze Funktion, weil $\frac{G'(z)}{G(z)}$ keinen Pol besitzt.

Hieraus folgt

$$\int_0^z \frac{G'(z)}{G(z)} dz = \log\left(\frac{G(z)}{G(0)}\right) = c_0 z + c_1 \frac{z^2}{2} + \cdots$$

oder

$$\log G(z) = \log G(0) + c_0 z + c_1 \frac{z^2}{2} + \cdots = H(z),$$

wo $H(z)$ wiederum eine ganze Funktion bedeutet.

Die vorstehende Gleichung ergibt nun:

$$(1) \qquad G(z) = e^{H(z)}.$$

Da umgekehrt die Funktion $e^{H(z)}$ eine ganze Funktion ohne Nullstellen ist, wenn $H(z)$ eine beliebige ganze Funktion bedeutet, so liefert (1) die allgemeine Form der ganzen Funktionen, die nirgends verschwinden.

Wir betrachten nun zweitens diejenigen ganzen Funktionen, welche nur an einer endlichen Zahl gegebener Stellen verschwinden, und zwar an jeder dieser Stellen mit einer beliebig vorgeschriebenen Multiplizität.

Wir schreiben uns zunächst die gegebenen Stellen auf, jede einzelne so oft, wie die Multiplizität derselben angibt. Dadurch erhalten wir etwa die Reihe

$$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_r.$$

Offenbar ist nun

$$(2) \qquad G(z) = (z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_r)\, e^{H(z)}$$

der allgemeine Ausdruck der in Rede stehenden ganzen Funktionen.

Wir betrachten endlich den interessantesten Fall, in welchem es sich um diejenigen ganzen Funktionen handelt, die eine unendliche Anzahl vorgeschriebener Nullstellen

$$(3) \qquad a_0, \ a_1, \ a_2, \ a_3, \ \ldots$$

besitzen. Zunächst sei vorausgesetzt, daß sämtliche Nullstellen einfach sein sollen und daß die Zahlen der Reihe (3) sämtlich von Null verschieden sind. Ist $G(z)$ eine ganze Funktion mit den vorgeschriebenen Nullstellen (3), so ist

$$\frac{G'(z)}{G(z)}$$

eine meromorphe Funktion, welche die Stellen (3) zu Polen besitzt, wobei der Stelle $z = a_n$ der meromorphe Teil

$$\frac{1}{z - a_n}$$

entspricht. Daher hat man

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = H(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \cdots + \frac{z^{k_n - 1}}{a_n^{k_n}} \right), \tag{4}$$

wobei $H(z)$ eine ganze Funktion bedeutet und die Zahlen $k_0, k_1, k_2, \ldots$ so zu wählen sind, daß die Summe für jedes endliche Gebiet regulär konvergent ist.

Integriert man nun die Gleichung (4) über einen Weg, welcher den Nullpunkt mit dem Punkte z verbindet, so darf man, wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Summe, rechts gliedweise integrieren [1]) und erhält so:

$$\log G(z) = H_1(z) \tag{5}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \log \left(\frac{z - a_n}{- a_n} \right) + \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{k_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{k_n} \right\} = H_1(z) + \Sigma.$$

Hier bedeutet $H_1(z)$ wieder eine ganze Funktion, nämlich

$$\log G(0) + \int_0^z H(z)\, dz.$$

Die hier auftretenden Logarithmen sind völlig bestimmt durch die Wahl des den Punkt 0 mit dem Punkte z verbindenden Integrationsweges. Da die Gleichung (4) nicht gestört wird durch eine beliebige Umstellung der Glieder in der unendlichen Summe auf der rechten Seite der Gleichung, so gilt das nämliche bei der Gleichung (5). Außerdem ist klar, daß die durch gliedweise Integration einer *regulär* konvergierenden Reihe entstehende Reihe wiederum *regulär* konvergent ist.

Die auf der rechten Seite der Gleichung (5) auftretende Summe Σ ist also wiederum regulär konvergent.

Aus (5) folgt nun

$$G(z) = e^{H_1(z)} \prod_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}} \right\} [2]). \tag{6}$$

[1]) Die Tatsache, daß man bei gleichmäßiger Konvergenz gliedweise integrieren darf, folgt genau wie das Entsprechende im Reellen. Vgl. etwa das Lehrbuch von *Knopp, Unendliche Reihen.* (A. d. H.)

[2]) Ein *Produkt*

$$c_1 c_2 c_3 \ldots c_n \ldots,$$

dessen Faktoren $c_1, c_2, \ldots$ alle von Null verschieden sind, heißt *konvergent*, wenn

$$\lim_{n=\infty} (c_1 c_2 c_3 \ldots c_n) = \Pi \tag{1}$$

existiert und endlich und von Null verschieden ist.

Das unendliche Produkt konvergiert unbedingt, d. h. sein Wert ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren, weil die Summe Σ unbedingt konvergiert. Aus der gleichmäßigen Konvergenz von Σ geht ferner hervor, daß das unendliche Produkt in der Umgebung jeder beliebigen Stelle in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickelbar ist, also eine ganze Funktion von z vorstellt.

Es stellt also das Produkt

$$(7)\qquad \Pi = \prod_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}} \right\}$$

eine ganze Funktion mit den vorgeschriebenen Nullstellen vor, und nach Gleichung (6) ist der allgemeine Ausdruck einer ganzen Funktion mit denselben Nullstellen der folgende:

$$(8)\qquad G(z) = e^{H(z)} \cdot \Pi,$$

wobei $H(z)$ eine beliebige ganze Funktion bezeichnet.

Diese Resultate bleiben auch für den Fall gültig, daß die vorgeschriebenen Nullstellen beliebig gegebene Multiplizitäten besitzen sollen. Es tritt an die Stelle des Produktes Π dann ein formal ganz gleich gebildetes Produkt; nur kommen unter den Zahlen a_0, a_1, a_2, a_3, ... einander gleiche vor; jede der Nullstellen tritt dann nämlich so oft unter jenen Zahlen auf, als ihre Multiplizität angibt. Soll

---

Π heißt der *Wert des Produktes*:

$$(2)\qquad \Pi = c_1 c_2 c_3 \ldots c_n \ldots = \prod_1^{\infty}(c_n).$$

Da sich aus (1) leicht folgern läßt, daß

$$(1')\qquad \log \Pi = \lim_{n=\infty} \{ \log c_1 + \log c_2 + \cdots + \log c_n \}$$

st, wo die Logarithmen rechts passend bestimmt sind, und umgekehrt aus (1') wieder (1) folgt, so ergibt sich:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz von

$$\prod_1^{\infty}(c_n)$$

ist die, daß die Reihe

$$(3)\qquad S = \log c_1 + \log c_2 + \cdots + \log c_n + \cdots$$

bei geeigneter Bestimmung der Logarithmen konvergiert. Es ist dann

$$(4)\qquad \Pi = e^S.$$

Man kann bemerken, daß die Logarithmen in der Reihe (3), wenn sie konvergiert, notwendig von einer gewissen Stelle ab die Hauptwerte der Logarithmen sind; denn es muß, $\log c_n = \log |c_n| + i\varphi_n$ gesetzt, $\lim \varphi_n = 0$ sein, also schließlich sicher φ_n wischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen.

Ein unendliches Produkt, in welchem einige Glieder Null sind, heißt konvergent, wenn das Produkt der von Null verschiedenen Glieder konvergiert.

„*Ein konvergentes unendliches Produkt wird dann und nur dann Null, wenn ein Faktor des Produktes Null ist.*"

endlich $z = 0$ eine k-fache Nullstelle der zu bildenden ganzen Funktion sein, so hat man beim Produkte Π noch den Faktor z^k zuzusetzen.

Als Beispiel betrachten wir diejenigen ganzen Funktionen, welche die Nullstellen

$$0, \ +1, \ -1, \ +2, \ -2, \ldots$$

besitzen. Eine dieser Funktionen wird durch das Produkt

$$z \Pi' \left\{ \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \right\}$$

vorgestellt, wobei n alle ganzen Zahlen mit Ausschluß der Null durchläuft. Der allgemeine Ausdruck dieser Funktionen ist also:

$$(9) \qquad e^{H(z)} \cdot z \Pi' \left\{ \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \right\}.$$

Insbesondere wird bei geeigneter Wahl der ganzen Funktion $H(z)$:

$$\sin \pi z = e^{H(z)} \cdot z \Pi' \left\{ \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \right\}.$$

Um $H(z)$ zu bestimmen, nehmen wir die logarithmische Ableitung der beiden Seiten vorstehender Gleichung, wodurch

$$\frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = H'(z) + \frac{1}{z} + \Sigma' \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right)$$

entsteht. Folglich ist $H'(z) = 0$ und daher $H(z)$, sowie $e^{H(z)}$ eine Konstante. Diese Konstante hat den Wert π, weil $\frac{\sin \pi z}{z}$ für $z = 0$ den Wert π erhält. Also ist:

$$(10) \qquad \sin \pi z = \pi z \Pi' \left\{ \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \right\}.$$

Faßt man die entgegengesetzt gleichen Werten von n entsprechenden Faktoren in dem Produkte zusammen, so kommt:

$$(10') \qquad \sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

§ 12. Darstellung der meromorphen Funktionen durch ganze Funktionen.

Es sei $f(z)$ eine beliebige meromorphe Funktion. Ihre Nullstellen können im Endlichen keine Häufungsstelle besitzen, lassen sich also in eine Reihe nach wachsenden absoluten Beträgen anordnen. Die Nullstellen seien

$$(1) \qquad a_0, \ a_1, \ a_2, \ \ldots,$$

wobei jede Nullstelle so oft in diese Reihe (1) aufgenommen werde, als ihre Multiplizität angibt. Entsprechend sei

(2) $$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,$$

die Reihe der Pole oder Unendlichkeitsstellen von $f(z)$.

Wir bilden nun zwei ganze Funktionen

$$G_1(z) \quad \text{und} \quad G(z),$$

von denen die erste die Nullstellen (1), die zweite die Unendlichkeitsstellen (2) von $f(z)$ zu ihren Nullstellen besitzt.

Die Funktion

$$\frac{f(z)\,G(z)}{G_1(z)}$$

hat dann keine Null- und keine Unendlichkeitsstelle und ist folglich eine ganze Funktion der Gestalt $e^{g(z)}$, wo $g(z)$ eine ganze Funktion bezeichnet.

Aus

$$\frac{f(z)\cdot G(z)}{G_1(z)} = e^{g(z)}$$

folgt

$$f(z) = \frac{e^{g(z)}\,G_1(z)}{G(z)}.$$

Es ist aber

$$e^{g(z)}\,G_1(z) = H(z)$$

eine ganze Funktion, welche wie $G_1(z)$ die Nullstellen von $f(z)$ zu Nullstellen hat. Daher besteht der Satz:

Eine jede meromorphe Funktion $f(z)$ läßt sich als Quotient zweier ganzer Funktionen darstellen:

$$f(z) = \frac{H(z)}{G(z)},$$

derart, daß der Zähler $H(z)$ ausschließlich die Nullstellen, der Nenner $G(z)$ ausschließlich die Unendlichkeitsstellen von $f(z)$ zu Nullstellen besitzt.

7. Kapitel.

Die Umkehrung der analytischen Funktionen.

§ 1. Umkehrung der Potenzreihen.

Setzen wir

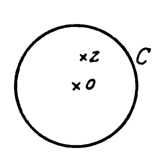
(1) $$w = c_1 z + c_2 z^2 + \ldots = \mathfrak{P}(z),$$

so entspricht jedem Werte von z, der im Innern des Konvergenzkreises der Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ liegt, ein bestimmter endlicher Wert w. Die Werte z repräsentieren wir geometrisch in einer Ebene, die

Werte w in einer zweiten Ebene. Vermöge (1) wird dann also jedem Punkte z der z-Ebene, der im Innern des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}(z)$ liegt, ein bestimmter Punkt w in der w-Ebene zugeordnet. Insbesondere entspricht dem Punkte $z = 0$ der Punkt $w = 0$.

Wir wollen nun annehmen, der Koeffizient c_1 sei nicht Null. Dann können wir zunächst folgenden Satz beweisen:

Es sei C ein um den Nullpunkt der z-Ebene beschriebener Kreis, so gewählt, daß $\mathfrak{P}(z)$ für die Punkte im Innern und auf der Peripherie von C konvergiert und daß $\mathfrak{P}(z)$ für alle diese Punkte, abgesehen vom Punkte $z=0$, einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Dann läßt sich um den Nullpunkt der w-Ebene der Kreis K so beschreiben, daß jedem Punkte w im Innern von K (Fig. 54) *ein einziger Punkt z im Innern von C entspricht, für welchen $\mathfrak{P}(z) = w$ ist. Der betreffende Wert z läßt sich als eine eindeutige Funktion von w innerhalb des Kreises K ansehen. Diese Funktion ist eine analytische Funktion von w, d. h. z ist als eine gewöhnliche Potenzreihe von w darstellbar.*



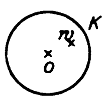


Fig. 54.

Wenn z die Peripherie des Kreises C durchläuft, so wird der absolute Betrag $|\mathfrak{P}(z)|$ ein Minimum M besitzen, welches von Null verschieden ist. Unter K verstehen wir nun einen Kreis mit dem Mittelpunkt $w = 0$, dessen Radius $\varrho < M$ ist. Es ist dann für jeden Punkt ζ auf der Peripherie von C

$$\varrho < |\mathfrak{P}(\zeta)|.$$

Sei w irgendein Punkt, der im Innern des Kreises K fixiert ist. Dann wird für jeden Punkt ζ der Kreisperipherie C

$$|w| < |\mathfrak{P}(\zeta)|$$

sein. Setzen wir also

$$\mathfrak{P}(\zeta) - w = \mathfrak{P}(\zeta)(1 - u), \tag{2}$$

so wird der absolute Betrag von

$$u = \frac{w}{\mathfrak{P}(\zeta)} \tag{3}$$

längs der Kreisperipherie C beständig kleiner als 1 sein.

Nun folgt aus (2)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C+} d\log(\mathfrak{P}(\zeta) - w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C+} d\log\mathfrak{P}(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C+} d\log(1 - u), \tag{4}$$

und das letzte Integral ist Null, weil der Punkt $1 - u$, während ζ die Peripherie C beschreibt, eine Kurve durchläuft, die ganz im Innern des Kreises mit dem Mittelpunkt 1 und dem Radius 1 liegt und folglich die Windungszahl 0 besitzt.

Im Innern von C hat also $\mathfrak{P}(z) - w$ dieselbe Anzahl von Nullstellen wie $\mathfrak{P}(z)$, d. h. eine einzige Nullstelle.

Hiermit ist der erste Teil unseres Satzes bewiesen.

Um den zweiten Teil zu beweisen, betrachten wir das Integral

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{C+} f(\zeta)\cdot\frac{\mathfrak{P}'(\zeta)\,d\zeta}{\mathfrak{P}(\zeta)-w}, \tag{5}$$

unter $f(z)$ eine auf der Kreisfläche C reguläre Funktion verstanden. (Das Integral J geht in das Integral (4) über, wenn wir speziell $f(\zeta)$ konstant $= 1$ nehmen.)

Nach dem Residuensatze ist

$$J = f(z),$$

wo z die eine im Innern von C befindliche Lösung der Gleichung $\mathfrak{P}(z) = w$ bedeutet. Andererseits haben wir, da $\left|\frac{w}{\mathfrak{P}(\zeta)}\right| < 1$ ist, längs der Peripherie von C:

$$f(\zeta)\cdot\frac{\mathfrak{P}'(\zeta)}{\mathfrak{P}(\zeta)}\cdot\frac{1}{1-\frac{w}{\mathfrak{P}(\zeta)}} = f(\zeta)\,\frac{\mathfrak{P}'(\zeta)}{\mathfrak{P}(\zeta)}\left(1+\frac{w}{\mathfrak{P}(\zeta)}+\frac{w^2}{\mathfrak{P}(\zeta)^2}+\cdots\right).$$

Daher ist

$$J = k_0 + k_1 w + k_2 w^2 + \cdots, \tag{6}$$

wobei

$$k_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C+} f(\zeta)\cdot\frac{\mathfrak{P}'(\zeta)}{[\mathfrak{P}(\zeta)]^{n+1}}\,d\zeta \tag{7}$$

gesetzt ist. Da $\mathfrak{P}(z)$ im Innern von C nur für $z = 0$ verschwindet, so ist

$$k_n = \underset{z=0}{r}\left[f(z)\cdot\frac{\mathfrak{P}'(z)}{[\mathfrak{P}(z)]^{n+1}}\right],$$

d. i.

$$k_n = \left[\frac{f(z)\,\mathfrak{P}'(z)}{[\mathfrak{P}(z)]^{n+1}}\right]_{\frac{1}{z}}, \tag{8}$$

wo das rechts stehende Symbol den Koeffizienten von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung der eingeklammerten Funktion nach aufsteigenden Potenzen von z bezeichnet.

Der Koeffizient k_n läßt sich noch in *anderer Weise* schreiben.

Da $\mathfrak{P}(z)$ für $z = 0$ von der ersten Ordnung Null wird, so läßt sich

$$\frac{f(z)\cdot z^{n+1}\,\mathfrak{P}'(z)}{[\mathfrak{P}(z)]^{n+1}}$$

in eine gewöhnliche Potenzreihe nach aufsteigenden Potenzen von z

entwickeln. Der Koeffizient von z^n in dieser Potenzreihe ist dann offenbar identisch mit k_n. Also gilt

$$(9) \qquad k_n = \frac{1}{n!} D_z^n \left\{ f(z) \cdot \mathfrak{P}'(z) \left[\frac{z}{\mathfrak{P}(z)}\right]^{n+1} \right\}_{z=0},$$

wo D_z^n für $\frac{d^n}{dz^n}$ steht. Wenn $n > 0$ ist, kann k_n noch einfacher dargestellt werden. Nach (7) ist

$$k_n = -\frac{1}{2\pi i n} \int_{C+} f(\zeta) \cdot d \frac{1}{[\mathfrak{P}(\zeta)]^n} = \frac{1}{2\pi i n} \int \frac{f'(\zeta)}{[\mathfrak{P}(\zeta)]^n} d\zeta,$$

wie durch partielle Integration ersichtlich wird[1]). Folglich gilt

$$(10) \quad k_n = \frac{1}{n} \left[\frac{f'(z)}{[\mathfrak{P}(z)]^n}\right]_{\frac{1}{z}} = \frac{1}{n!} D_z^{n-1} \left\{ f'(z) \left(\frac{z}{\mathfrak{P}(z)}\right)^n \right\}_{z=0} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Der Koeffizient k_0 ergibt sich aus (9) gleich $f(0)$.

Fassen wir zusammen, so können wir sagen:

Ist $f(z)$ auf der Kreisfläche C regulär, bezeichnet w einen Punkt im Innern des Kreises K und z den ihm vermöge

$$w = \mathfrak{P}(z)$$

entsprechenden Punkt im Innern von C, so ist

$$(11) \qquad f(z) = f(0) + k_1 w + k_2 w^2 + \ldots + k_n w^n + \ldots,$$

wobei k_n durch die Gleichung

$$(12) \qquad k_n = \frac{1}{n!} D_z^{n-1} \left[f'(z) \cdot \left(\frac{z}{\mathfrak{P}(z)}\right)^n \right]_{z=0}$$

bestimmt wird.

Durch (11) ist die Funktion $f(z)$ nach Potenzen von $\mathfrak{P}(z)$ entwickelt. Die Reihe (11) mit der Koeffizientenbestimmung (12) wird als *Bürmann-Lagrange*sche Reihe bezeichnet.

Wählen wir $f(z) = z$, so zeigt die Gleichung (11), daß z durch eine gewöhnliche Potenzreihe von w darstellbar, also z eine reguläre analytische Funktion von w innerhalb des Kreises K ist.

Als *Beispiel* nehmen wir die Funktion

$$w = z(1 - z).$$

Es wird

$$k_n = \frac{1}{n!} D_z^{n-1} \left\{ \frac{1}{(1-z)^n} \right\}_{z=0} = \frac{1}{n!} (n-1)! \, (-1)^{n-1} \binom{-n}{n-1} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1) \ldots (n+n-2)}{(n-1)!} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1},$$

[1]) Die formalen Regeln der Integralrechnung gelten im Komplexen genau so wie im Reellen. (A. d. H.)

also

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} w^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\{z(1-z)\}^n.$$

Dies kann man auch *direkt* aus

$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-4w)^{\frac{1}{2}}$$

bestätigen.

Wenn $c_1 = 0$ ist, so sei c_k der *erste* Koeffizient in der Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$, welcher von 0 verschieden ist. Die Gleichung (1) hat dann die Form

$$(13) \qquad w = \mathfrak{P}(z) = c_k z^k \cdot (1 + \mathfrak{P}_1(z)),$$

wo $\mathfrak{P}_1(z)$ eine mit z verschwindende Potenzreihe bedeutet.

Aus (13) folgt dann, wenn z auf das Innere eines Kreises beschränkt wird, in welchem $|\mathfrak{P}_1(z)| < 1$ ist,

$$w^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{c_k} \cdot z(1 + \mathfrak{P}_1(z))^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{c_k}\, z\left(1 + \frac{1}{k}\,\mathfrak{P}_1(z) + \cdots\right),$$

oder

$$(14) \qquad w' = w^{\frac{1}{k}} = z(c_1' + c_2' z + \ldots),$$

wo nun $c_1' = \sqrt[k]{c_k}$ von Null verschieden ist. Umgekehrt: wenn einer der k-Werte von $w' = w^{\frac{1}{k}}$ die Gleichung (14) befriedigt, so besteht auch die Gleichung (13). Für die betrachteten Werte von z kann also die Gleichung (13) durch die Gleichung (14) ersetzt werden.

Wenden wir nun den oben bewiesenen Satz auf die Gleichung (14) an, so ergibt sich:

Um die Nullpunkte der z- und der w'-Ebene kann man zwei Kreise C und K' so beschreiben, daß jedem Punkt w' im Innern von K' ein einziger Punkt z im Innern von C entspricht, welcher der Gleichung (14) genügt. Wenn nun w' alle Lagen im Innern von K' annimmt, so nimmt

$$w = w'^k$$

alle Lagen im Innern eines Kreises K an, der in der w-Ebene um den Nullpunkt als Mittelpunkt beschrieben ist. Und zwar entsprechen jeder Lage von w im Innern von K genau k Lagen

$$w' = w^{\frac{1}{k}}, \quad w' = e^{\frac{2\pi i}{k}} w^{\frac{1}{k}}, \quad w' = e^{2\cdot\frac{2\pi i}{k}} w^{\frac{1}{k}}, \quad \ldots, \quad w' = e^{(k-1)\frac{2\pi i}{k}} w^{\frac{1}{k}}$$

von w' im Innern von K'.

Also folgt:

Um die Nullpunkte der z- und der w-Ebene kann man zwei Kreise C und K so beschreiben, daß jedem Punkte w im Innern von K genau k Punkte z im Innern von C entsprechen, für welche die Gleichung (13) *erfüllt ist.*

Man beachte, daß aus unserer Untersuchung noch hervorgeht, daß man den Radius des Kreises C kleiner als eine beliebig klein vorgeschriebene Größe annehmen kann. Gleiches gilt offenbar auch vom Kreise K.

Die nach vorigem Satze dem einzelnen w entsprechenden k Werte von z sind nach Gleichung (14) analytisch darstellbar durch eine nach Potenzen von $w^{\frac{1}{k}}$ fortschreitende Potenzreihe

$$z = \mathfrak{P}\left(w^{\frac{1}{k}}\right). \tag{15}$$

Gibt man hier dem $w^{\frac{1}{k}}$ der Reihe nach seine k (durch k^{te} Einheitswurzeln als Faktoren voneinander verschiedenen) Werte, so erhält man aus (15) die k dem w entsprechenden Werte von z.

Die bewiesenen Sätze lassen sich leicht folgendermaßen verallgemeinern.

Es sei $\varphi(z)$ regulär an der Stelle $z = a$ und

$$\varphi(a) = b,$$

so daß die Entwicklung von $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z = a$ die Gestalt

$$\varphi(z) = b + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots \tag{16}$$

besitzt.

Durch die Gleichung

$$\begin{aligned} w - b &= c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots \\ &= \varphi'(a)(z-a) + \frac{\varphi''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots \end{aligned} \tag{17}$$

wird dann jedem Werte von z, der einer genügend kleinen Umgebung der Stelle a angehört, ein bestimmter Wert w zugeordnet. Schreibt man zur Abkürzung W für $w - b$ und Z für $z - a$, so erhält (17) die Form

$$W = c_1 Z + c_2 Z^2 + \dots$$

und man kann nun die oben bewiesenen Sätze anwenden. Dadurch gelangt man zu folgendem Satze:

Ist der Punkt a ein Punkt regulären Verhaltens der Funktion $\varphi(z)$ und

$$\varphi(a) = b,$$

so entspricht vermöge der Gleichung

$$w = \varphi(z) \tag{18}$$

jedem Punkte z einer gewissen Umgebung des Punktes a der z-Ebene ein bestimmter Punkt w in der w-Ebene. Man kann nun um a den Kreis C, der ganz in jener Umgebung liegt, und um den Punkt b in der w-Ebene den Kreis K so konstruieren, daß vermöge der Gleichung (18) *jedem Punkte w im Innern von K genau k Punkte z im Innern von C entsprechen. Die Zahl k ist* 1, *wenn $\varphi'(a)$ von Null verschieden ist; allgemein ist k der Index der ersten Ableitung in der Reihe $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, ..., welche nicht verschwindet. Die einem innerhalb K liegenden Punkte w entsprechenden k Werte von z sind analytisch durch eine Gleichung der Gestalt*

$$z - a = \mathfrak{P}\left((w-b)^{\frac{1}{k}}\right)$$

darstellbar, deren rechte Seite eine gewöhnliche Potenzreihe von $(w-b)^{\frac{1}{k}}$ vorstellt mit einem Anfangsglied der Gestalt $c\,(w-b)^{\frac{1}{k}}$, wo c eine nicht verschwindende Konstante bezeichnet.

Endlich ist noch zu bemerken, daß die Kreise C und K so gewählt werden können, daß ihre Radien kleiner sind als eine beliebig vorgeschriebene positive Zahl.

Zweiter Abschnitt.

Elliptische Funktionen.

1. Kapitel.

Die doppeltperiodischen meromorphen Funktionen.

Eine eindeutige Funktion $f(u)$ der komplexen Variablen u heißt gemäß Abschn. I, Kap. 6 *„meromorph“*, wenn sie im Endlichen keinen wesentlich singulären Punkt hat, so daß jeder im Endlichen liegende Punkt a entweder ein Punkt regulären Verhaltens oder ein Pol der Funktion ist.

Diese Funktionen $f(u)$ sind also dadurch charakterisiert, daß für die Umgebung jedes Punktes a, wo a einen endlichen Wert bedeutet, eine Entwicklung der Gestalt

$$f(u) = (u-a)^m (c_0 + c_1(u-a) + \dots) = (u-a)^m \mathfrak{P}(u-a)$$

besteht, unter m eine ganze Zahl verstanden, die positiv, Null oder negativ sein kann. Den Ausgangspunkt, welchen wir zur Begründung der Theorie der elliptischen Funktionen wählen, soll nun die Betrachtung *derjenigen meromorphen Funktionen bilden, welche periodisch sind.* Derartigen Funktionen begegnen wir schon unter den elementaren Funktionen. So besitzt die Exponentialfunktion e^u, der Gleichung $e^{u+2\pi i} = e^u$ zufolge, die Periode $2\pi i$, die Funktionen $\sin u$ und $\cos u$ die Periode 2π und $\operatorname{tg} u$ die Periode π. Es ist auch leicht, aus diesen Funktionen solche meromorphe Funktionen zu bilden, die eine beliebig vorgeschriebene, von Null verschiedene Zahl ω als Periode zulassen. Z. B. wird

$$f(u) = e^{\frac{2\pi i}{\omega} u}$$

eine solche Funktion sein, und allgemeiner wird jede rationale Funktion von $e^{\frac{2\pi i}{\omega} u}$ mit konstanten, d. h. von u unabhängigen Koeffizienten die Periode ω besitzen.

Ehe wir uns nun unserem eigentlichen Gegenstande zuwenden, wollen wir einige häufig zu gebrauchende einfache Sätze zusammen-

stellen, die an die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen durch die Punkte einer Ebene anknüpfen.

§ 1. Zur geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen.

Unter dem „Punkte“

$$a = a' + ia''$$

werden wir wie im 1. Abschnitt denjenigen Punkt der komplexen Zahlenebene verstehen, welcher die komplexe Zahl a repräsentiert, der also die Abszisse a' und die Ordinate a'' besitzt. Es besteht nun zunächst folgender

Satz 1. *Der Punkt $a + bt$ beschreibt die Gerade, welche die Punkte a und $a + b$ $(b \neq 0)$ miteinander verbindet, wenn t alle reellen Werte durchläuft. Insbesondere erhalten wir die Punkte der Strecke $a \ldots a + b$, wenn t die reellen Werte von 0 bis 1 annimmt.*

Setzen wir $a = a' + i a''$, $b = b' + ib''$, so sind die Koordinaten des Punktes $a + bt$

$$x = a' + b't, \quad y = a'' + b''t,$$

und hieraus folgt unmittelbar unser Satz nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie.

Nehmen wir $a = 0$, so erhalten wir den

Satz 2. *Der Punkt $c = bt$ $(b \neq 0)$ nimmt, wenn t die reellen Werte durchläuft, alle Lagen auf der Geraden an, welche den Nullpunkt mit dem Punkte b verbindet.*

Aus diesem Satze ergibt sich sofort

Satz 3. *Die Bedingung dafür, daß die Punkte b $(\neq 0)$ und c mit dem Nullpunkt in einer Geraden liegen, ist die, daß der Quotient $\frac{c}{b}$ reell ist.*

Ziehen wir zu irgendeiner Strecke $a \ldots b$ eine gleichgerichtete und gleichlange Strecke $0 \ldots d$ durch den Nullpunkt, so ist offenbar d der Repräsentant der Differenz $b - a$ (Fig. 55). Betrachten wir daher ein Parallelogramm, in welchem a und a_1, bezüglich b und b_1 gegenüberliegende Ecken sing, so wird

$$b - a = a_1 - b_1$$

oder

$$a + a_1 = b + b_1$$

sein (Fig. 56).

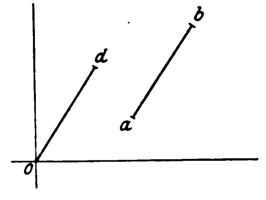


Fig. 55.

Satz 4. *Wenn a, a_1, b, b_1 die vier Ecken eines Parallelogramms bilden und zwar a, a_1, bzw. b, b_1 je gegenüberliegende Ecken, so ist*

$$a + a_1 = b + b_1.$$

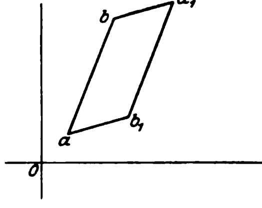


Fig. 56.

Der gemeinsame Wert von $\frac{1}{2}(a + a_1)$ und $\frac{1}{2}(b + b_1)$ wird, wie aus Satz 1 folgt, durch den Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogramms dargestellt.

§ 2. Sätze über die Perioden einer meromorphen Funktion.

Wenn ω eine Konstante bedeutet, $f(u)$ eine meromorphe Funktion und

$$f(u + \omega) = f(u)$$

für alle Werte der Variablen u ist, so heist ω eine Periode von $f(u)$. Hiernach ist $\omega = 0$ stets eine Periode jeder Funktion $f(u)$. Die Periode $\omega = 0$ können wir als triviale oder *uneigentliche* Periode bezeichnen und im Gegensatz dazu eine Periode ω, die nicht Null ist, als eine *eigentliche*. Wenn wir von einer periodischen Funktion sprechen, so meinen wir damit natürlich eine solche, die eine eigentliche Periode besitzt.

Wir wollen nun unter Ω das System aller Perioden einer Funktion $f(u)$ verstehen und einige Eigenschaften dieses Systems Ω beweisen. Das System der Punkte, welche die Perioden geometrisch darstellen und die wir „*Periodenpunkte*" nennen werden, bezeichnen wir als „Punktsystem" Ω.

Satz 1. *Das System Ω aller Perioden bildet einen Modul.*

Dabei ist unter einem „*Modul*" ein System von Zahlen zu verstehen, innerhalb dessen die Operationen der Addition und Subtraktion unbeschränkt ausführbar sind. D. h. mit ω_1 und ω_2 sollen dem System auch $\omega_1 + \omega_2$ und $\omega_1 - \omega_2$ angehören.

Die Behauptung des Satzes 1 ist also die, daß eine Funktion $f(u)$, welche die Perioden ω_1 und ω_2 besitzt, notwendig auch die Perioden $\omega_1 + \omega_2$ und $\omega_1 - \omega_2$ hat. Dies ist aber leicht zu zeigen. Aus

$$f(u + \omega_1) = f(u), \quad f(u + \omega_2) = f(u)$$

folgt nämlich

$$f((u + \omega_1) + \omega_2) = f(u + \omega_1) = f(u);$$

ferner aus

$$f(u + \omega_1) = f(u + \omega_2),$$

indem wir u durch $u - \omega_2$ ersetzen,

$$f(u + \omega_1 - \omega_2) = f(u).$$

Gehören irgendeinem Modul die Zahlen

$$(1) \qquad \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$$

an, so wird auch

$$(2) \qquad \omega = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \cdots + m_k \omega_k$$

demselben Modul angehören, wobei $m_1, m_2, \ldots, m_k$ irgendwelche ganzen Zahlen bezeichnen. Denn durch Anwendung der Operationen der Addition und Subtraktion können wir aus den Zahlen (1) die Zahl ω bilden. Es gilt demnach der

Satz 2. *Gleichzeitig mit den Perioden* (1) *besitzt eine Funktion* $f(u)$ *auch die Periode* (2).

Die Periode ω heißt aus den Perioden $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ *zusammengesetzt* oder *abgeleitet*. Die *äußersten* Fälle, die bei einem Modul vorliegen können, sind die, daß der Modul nur aus der einen Zahl Null oder aus der Gesamtheit aller Zahlen besteht. Der erste Fall tritt für den Modul Ω aller Perioden von $f(u)$ ein, wenn $f(u)$ nur die triviale Periode Null besitzt, also im eigentlichen Sinne des Wortes nicht periodisch ist. Der zweite Fall tritt offenbar ein, wenn $f(u)$ sich auf eine Konstante reduziert, da ja eine Konstante vom Argument u gar nicht abhängt und also jede beliebige Zahl als Periode besitzt. Den Modul, welcher nur aus der einen Zahl Null besteht, wollen wir als „Modul Null", denjenigen, welcher aus der Gesamtheit aller Zahlen besteht, als „Modul ∞" bezeichnen. Alle Moduln teilen wir nun in zwei Arten ein:

Ein Modul Ω heiße von der ersten Art, wenn das Punktsystem Ω keinen Häufungspunkt im Endlichen besitzt, von der zweiten Art, wenn ein solcher Häufungspunkt vorhanden ist.

Beispielsweise ist der Modul Null von der ersten, der Modul ∞ von der zweiten Art. Wir wollen von einem Systeme von Zahlen sagen, es enthalte *unendlich kleine* oder infinitesimale Zahlen, wenn unter den Zahlen des Systems solche vorhanden sind, die von Null verschieden sind und deren absoluter Betrag unter einer beliebig klein fixierten positiven Zahl liegt. Es gilt dann der

Satz 3. *Ein Modul Ω ist von der zweiten oder von der ersten Art, je nachdem er unendlich kleine Zahlen enthält oder nicht.*

Enthält nämlich Ω unendlich kleine Zahlen, so können wir offenbar die von Null verschiedenen Zahlen des Moduls

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$$

so wählen, daß sie den Limes Null besitzen. Ist dann weiter ω irgendeine dem Modul angehörende (endliche) Zahl, z. B. $\omega = 0$, so gehören ihm auch die Zahlen

$$\omega + \varepsilon_1, \omega + \varepsilon_2, \omega + \varepsilon_3, \ldots$$

mit dem Häufungswert ω an. Der Modul Ω ist also zweiter Art. Wir sehen zugleich, daß dann jede Zahl ω des Moduls einen Häufungswert ω des Punktsystems Ω liefert. Besitzt umgekehrt das Punktsystem Ω einen Häufungspunkt a im Endlichen, so können wir aus ihm eine Folge verschiedener Werte

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$$

mit dem Grenzpunkte a herausheben. Dann haben die dem Systeme Ω angehörenden, von Null verschiedenen Zahlen

$$\omega_2 - \omega_1 = \varepsilon_1, \; \omega_3 - \omega_2 = \varepsilon_2, \; \omega_4 - \omega_3 = \varepsilon_3, \ldots$$

den Limes Null. Daher enthält Ω unendlich kleine Zahlen.

Wir werden nun den für die Theorie der meromorphen periodischen Funktionen grundlegenden Satz beweisen:

Satz 4. *Die Perioden einer meromorphen Funktion $f(u)$, die sich nicht auf eine Konstante reduziert, bilden einen Modul Ω erster Art.*

Nach Satz 3 genügt es, zu zeigen, daß $f(u)$ keine unendlich kleinen Perioden besitzt. Zu dem Ende betrachten wir einen regulären Punkt a der Funktion $f(u)$. Für alle genügend kleinen Werte von $|\omega|$ gilt dann eine Entwicklung der Gestalt

$$f(a+\omega) = f(a) + \omega^r (c + c'\omega + \ldots),$$

wo r eine natürliche Zahl und c einen von Null verschiedenen Wert bezeichnet. Wir wählen nun die positive Zahl ε so klein, daß für $|\omega| < \varepsilon$ der Wert der Reihe

$$c + c'\omega + \ldots$$

von Null verschieden bleibt; dies ist wegen $c \neq 0$ möglich. Es wird dann

$$f(a+\omega) \neq f(a)$$

sein, solange $|\omega| < \varepsilon$ und von Null verschieden ist. Daher kann die Funktion $f(u)$ eine Periode ω von einem Betrage $< \varepsilon$ nicht besitzen, womit unser Satz bewiesen ist.

Wir wollen nun die *Konstitution der Moduln erster Art* näher studieren und unterscheiden dabei, indem wir den Modul Null beiseite lassen, zwei Fälle:

Fall 1. *Der Modul Ω ist so beschaffen, daß die Punkte des Punktsystems Ω sämtlich auf einer Geraden liegen.*

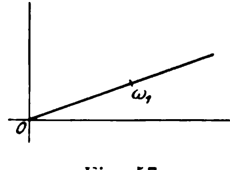


Fig. 57.

Da zu diesen Punkten auch der Nullpunkt gehört, so muß die Gerade durch den Nullpunkt hindurchgehen. Auf der einen der beiden Halbgeraden, in welche unsere Gerade durch den Nullpunkt zerlegt wird, betrachten wir denjenigen Punkt ω_1 des Systems Ω, der dem Nullpunkt zunächst liegt (Fig. 57). Ein solcher Punkt ω existiert, weil andernfalls der Nullpunkt ein Häufungspunkt von Ω wäre.

Ist nun w ein beliebiger Punkt von Ω, so haben wir

$$w = \omega_1 \cdot t$$

(Satz 2, § 1) oder, da wir die reelle Zahl t in die Form $t = m + r$ setzen können, wo m eine ganze Zahl und $0 \leqq r < 1$ ist,

$$w = \omega_1 (m + r), \quad w - m\,\omega_1 = r\,\omega_1.$$

Da nun $r\,\omega_1$ ein Punkt von Ω ist, der auf der Strecke $0 \ldots \omega_1$ näher zum Nullpunkt als ω_1 liegt, so muß $r\,\omega_1 = 0$ und also

$$w = m\,\omega_1 \tag{3}$$

sein. In dem jetzt betrachteten Falle sind also die Zahlen des Moduls Ω die Multipla einer Zahl ω_1.

Fall 2. *Die Punkte des Punktsystems Ω, wo Ω wieder einen Modul erster Art bezeichnet, liegen nicht sämtlich auf einer Geraden.*

In diesem Falle verbinden wir zunächst den Nullpunkt mit einem andern Punkte ω_1 von Ω und wählen einen dritten Punkt ω_2, der nicht auf der Geraden $0\ \omega_1$ liegt (Fig. 58). Im Innern und auf dem Rande des Dreiecks $0\,\omega_1\,\omega_2$ kann es nur endlich viele Punkte des Systems Ω geben, weil sonst ein im Endlichen liegender Häufungspunkt von Ω vorhanden wäre. Wenn nun ω_3 ein weiterer unserem Dreieck angehöriger Punkt von Ω ist, so wird das Dreieck $0\,\omega_1\,\omega_3$ weniger Punkte von Ω enthalten als das ursprüngliche Dreieck, weil der Punkt ω_2 dem letzteren angehörte. Hieraus folgt, daß wir ein Dreieck herstellen können, das außer seinen Ecken keinen Punkt von Ω enthält, und wir wollen annehmen, daß das Dreieck $0\,\omega_1\,\omega_2$ schon diese Beschaffenheit hat.

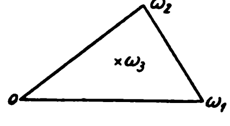


Fig. 58.

Bilden wir nun das Parallelogramm mit den Ecken 0, ω_1, ω_2, $\omega_1 + \omega_2$, so sehen wir leicht ein, daß im Innern und auf dem Rande dieses Parallelogramms, abgesehen von den Ecken, kein Punkt von Ω liegen kann. Von der durch das Dreieck $0\,\omega_1\,\omega_2$ gebildeten Hälfte des Parallelogramms ist es von vornherein klar, daß sie keinen Punkt von Ω enthält. Würde aber in der anderen Hälfte ein solcher Punkt ω vorhanden sein, so würde der Punkt

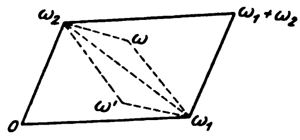


Fig. 59.

$$\omega' = \omega_1 + \omega_2 - \omega,$$

der ebenfalls zu Ω gehört, im Dreieck $0\,\omega_1\,\omega_2$ liegen. Außer den Ecken enthält also das Parallelogramm in der Tat keinen weiteren Punkt von Ω.

Sei jetzt w ein beliebiger Punkt von Ω. Wir konstruieren das Parallelogramm mit den Ecken $0, a, w, b$, indem wir durch w Parallelen zu $0\omega_1$ und $0\omega_2$ legen (Fig. 60). Nach den Sätzen von § 1 haben wir dann:

$$w = a + b = t_1\omega_1 + t_2\omega_2,$$

unter t_1 und t_2 reelle Zahlen verstanden, die wir in die Formen

$$t_1 = m_1 - r_1, \quad t_2 = m_2 + r_2,$$
$$0 \leqq r_1 < 1, \quad 0 \leqq r_2 < 1$$

Fig. 60.

setzen wollen, wo m_1, m_2 ganze Zahlen bezeichnen. Nun gehört der Punkt

$$w - m_1\omega_1 - m_2\omega_2 = r_1\omega_1 + r_2\omega_2$$

einerseits dem System Ω, andererseits, weil $r_1\omega_1$ auf der Strecke $0\ldots\omega_1$ und $r_2\omega_2$ auf der Strecke $0\ldots\omega_2$ liegt, dem Parallelogramme $0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2$ an. Daraus folgt aber, daß der Punkt $r_1\omega_1 + r_2\omega_2$ mit der Ecke 0 dieses Parallelogramms zusammenfallen und daher

$$w = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \tag{4}$$

sein muß. In dem jetzt betrachteten Falle 2 sind also alle Zahlen des Moduls Ω gemäß Gleichung (4) aus den beiden Zahlen ω_1 und ω_2 abzuleiten.

Wir wollen noch bemerken, daß die beiden Fälle auch dadurch charakterisiert werden können, daß im Falle 1 je zwei Zahlen des Moduls Ω einen reellen Quotienten besitzen (Satz 3, § 1), während im Falle 2 im Modul Ω zwei solche Zahlen (wie z. B. ω_1 und ω_2) vorhanden sind, deren Quotient nicht reell ist.

Aus den vorhergehenden Untersuchungen folgt nun für die meromorphen periodischen Funktionen:

Satz 5. *Die Perioden einer solchen Funktion $f(u)$, die sich nicht auf eine Konstante reduziert, lassen sich entweder sämtlich aus einer Periode ω_1 oder aber aus zwei Perioden ω_1 und ω_2, deren Quotient nicht reell ist, ableiten.*

Der erste Fall, in welchem die Funktion $f(u)$ *einfach* periodisch heißt, liegt z. B. bei der Funktion e^u vor, deren Perioden die sämtlichen Multipla von $2\pi i$ sind. Im zweiten Falle nennen wir $f(u)$ *doppelt*periodisch. Ein Periodenpaar ω_1, ω_2, aus welchen alle übrigen Perioden von $f(u)$ abgeleitet werden können, bezeichnen wir dann als ein Paar *primitiver* Perioden oder als Fundamentalperioden von $f(u)$. Die *Existenz* von doppeltperiodischen meromorphen Funktionen, die den Hauptgegenstand unserer Untersuchungen bilden werden, wird sich weiterhin ergeben.

§ 3. Das Periodenparallelogramm.

Es sei $\omega_1\ \omega_2$ ein Paar von Zahlen, deren Quotient nicht reell ist. Wenn nun zwischen irgend zwei komplexen Zahlen u und v die Beziehung

(1) $$v = u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 \quad \text{oder} \quad v - u = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$$

besteht, wo m_1 und m_2 ganze Zahlen bezeichnen, so wollen wir sagen, *v sei kongruent u modulis ω_1, ω_2*, und dies symbolisch durch die Schreibweise

(2) $$v \equiv u(\omega_1, \omega_2)$$

andeuten. Wenn ω_1 und ω_2 ein für allemal, wie in diesem Paragraphen, fest bleiben, schreiben wir auch kürzer unter Fortlassung der „Moduln" ω_1, ω_2

(2') $$v \equiv u.$$

Es gelten nun folgende Tatsachen, deren Beweise so einfach sind, daß wir sie übergehen können.

1. Es ist für jeden Wert von u
$$u \equiv u.$$
2. Aus $v \equiv u$ folgt $u \equiv v$.
3. Aus $u \equiv v$ und $v \equiv w$ folgt $u \equiv w$.
4. Aus $u \equiv v$ und $u_1 \equiv v_1$ folgt $u + u_1 \equiv v + v_1$.
5. Allgemeiner folgt aus $u \equiv v$ und $u_1 \equiv v_1$, daß $nu + n_1 u_1 \equiv nv + n_1 v_1$ ist, unter n und n_1 irgend zwei ganze Zahlen verstanden.

Zur Abkürzung werden wir auch von zwei *Punkten* u und v sagen, sie seien „kongruent", wenn die *Zahlen* u und v kongruent sind.

Wir nehmen nun einen beliebigen Punkt u_0 an und bilden das Parallelogramm mit den Ecken $u_0, u_0 + \omega_1, u_0 + \omega_1 + \omega_2, u_0 + \omega_2$ (Fig. 61). Dieses soll *das aus ω_1 und ω_2 gebildete Periodenparallelogramm (u_0) heißen.* Zu dem Periodenparallelogramm (u_0) rechnen wir jeden Punkt u, der im Innern oder auf einer der in u_0 zusammenstoßenden Seiten, exklusive der Endpunkte $u_0 + \omega_1$ bzw. $u_0 + \omega_2$ dieser Seiten, liegt. Da die Punkte des Parallelogramms, die auf den Seiten $u_0 \ldots u_0 + \omega_1$ bzw. $u_0 \ldots u_0 + \omega_2$ liegen, durch

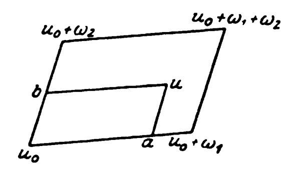


Fig. 61.

$$a = u_0 + r_1 \omega_1 \quad \text{bzw.} \quad b = u_0 + r_2 \omega_2 \qquad (0 \leqq r_1 < 1,\ 0 \leqq r_2 < 1)$$

dargestellt werden, so gilt

Satz 1. *Die Punkte des Periodenparallelogramms* (u_0) *sind die Punkte*

$$u = u_0 + r_1\omega_1 + r_2\omega_2 \qquad (0 \leqq r_1 < 1,\ 0 \leqq r_2 < 1). \tag{3}$$

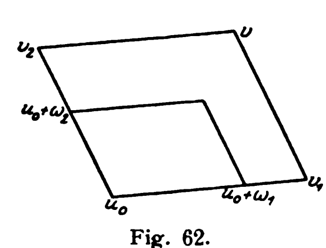


Fig. 62.

Sei jetzt v ein beliebiger Punkt der Zahlenebene und $u_0 v_1 v v_2$ das Parallelogramm, dessen Ecken v_1, v_2 auf den Seiten $u_0 \ldots u_0 + \omega_1$ bzw. $u_0 \ldots u_0 + \omega_2$ des Parallelogramms (u_0) liegen (Fig. 62). Es ist dann

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 - u_0 \\ &= (u_0 + t_1\omega_1) + (u_0 + t_2\omega_2) - u_0 \end{aligned}$$

oder

$$v = u_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + r_1\omega_1 + r_2\omega_2,$$

wenn die reellen Zahlen t_1, t_2 auf die Form $t_1 = m_1 + r_1$ bzw. $t_2 = m_2 + r_2$ gebracht werden, wo m_1, m_2 ganze Zahlen und r_1, r_2 echte Brüche bezeichnen. Hieraus folgt

Satz 2. *Jeder beliebige Punkt* v *ist einem und offenbar nur einem Punkte*

$$u = u_0 + r_1\omega_1 + r_2\omega_2$$

kongruent, der dem Parallelogramm (u_0) *angehört.*

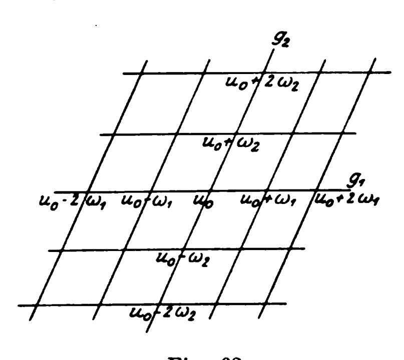


Fig. 63.

Wir betrachten jetzt die Punkte

$$u_0,\ u_0 + \omega_1,\ u_0 - \omega_1,\ u_0 + 2\,\omega_1,\ u_0 - 2\,\omega_1, \ldots,$$

welche ein System äquidistanter Punkte auf einer Geraden g_1, und die Punkte

$$u_0,\ u_0 + \omega_2,\ u_0 - \omega_2,\ u_0 + 2\,\omega_2,\ u_0 - 2\,\omega_2, \ldots,$$

welche ein ebensolches System auf einer Geraden g_2 bilden. Legen wir durch die ersteren Punkte Parallelen zur Geraden g_2, durch die letzteren Parallelen zur Geraden g_1, so erhalten wir durch diese Konstruktion die sämtlichen Parallelogramme $(u_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$, $m_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, und wir sehen, daß diese die u-Ebene einfach und lückenlos überdecken (Fig. 63).

Wir wollen nun mit

$$[u]$$

stets das System aller derjenigen Werte $u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ oder auch derjenigen Punkte, welche diese Werte geometrisch darstellen, be-

zeichnen, die einem bestimmten u kongruent sind. Dann können wir sagen: *Von einem Systeme* $[u]$ *fällt ein und nur ein Punkt in jedes Parallelogramm unseres parallelogrammatischen Netzes.*

§ 4. Definition der elliptischen Funktionen. Der Körper K.

Wir wenden uns nun zur Definition der elliptischen Funktionen:

Eine analytische Funktion $f(u)$ *heißt eine elliptische Funktion, wenn sie erstens meromorph ist und zweitens zwei Perioden* ω_1 *und* ω_2 *besitzt, deren Quotient* $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ *nicht reell ist.*

Wir wollen zunächst die beiden Werte ω_1 und ω_2 als fest gegeben annehmen und alle elliptischen Funktionen, die diese beiden Werte zu Perioden haben, zu einem System K zusammenfassen. Unter dem Zeichen $f(u)$ werden wir, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird, bis auf weiteres stets eine Funktion des Systems K verstehen. Das System K besitzt einige einfache, aber wichtige Eigenschaften, die wir hier zusammenstellen.

1. Zu dem System gehört jede Konstante, diese angesehen als Funktion von u. Denn jede Konstante besitzt jeden beliebigen Wert, also auch ω_1 und ω_2, als Periode.

2. Gleichzeitig mit $f_1(u)$ und $f_2(u)$ gehören auch $f_1(u)+f_2(u)$, $f_1(u)-f_2(u)$, $f_1(u)f_2(u)$ und, wenn $f_2(u)$ nicht die Konstante Null ist, $\frac{f_1(u)}{f_2(u)}$ zum System K.

Wir drücken dies kürzer aus, indem wir sagen: Die Funktionen des Systems K bilden einen „*Funktionenkörper*". Aus 1. und 2. folgt

3. Jede rationale Funktion von Funktionen $f_1(u), f_2(u), \ldots, f_k(u)$ mit konstanten Koeffizienten ist ebenfalls eine Funktion $f(u)$.

4. Gleichzeitig mit $f(u)$ gehört auch die Ableitung $f'(u)$ zum Körper K.

Denn ist $f(u)$ meromorph, so gilt gleiches von $f'(u)$, und aus

$$f(u+\omega_i)=f(u) \qquad (i=1,2)$$

folgt durch Differentiation

$$f'(u+\omega_i)=f'(u).$$

5. Es sei

$$a' \equiv a(\omega_1, \omega_2),$$

d. h. $a'=a+w$, wo $w=m_1\omega_1+m_2\omega_2$ gesetzt ist.

Wenn nun a ein Pol von $f(u)$ ist und $g\left(\frac{1}{u-a}\right)$ der zugehörige meromorphe Teil, so ist auch a' ein Pol und $g\left(\frac{1}{u-a'}\right)$ der ihm zugehörige meromorphe Teil.

In der Tat gilt nach Voraussetzung für die Umgebung des Punktes a die Entwicklung

$$f(u) = g\left(\frac{1}{u-a}\right) + \mathfrak{P}(u-a),$$

wo $\mathfrak{P}(u-a)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $u-a$ bedeutet. Liegt nun u in der Umgebung des Punktes a, so liegt $u' = u + w$ in der Umgebung des Punktes $a' = a + w$ und zugleich ist $u' - a' = u - a$ und

$$f(u') = f(u+w) = f(u) = g\left(\frac{1}{u'-a'}\right) + \mathfrak{P}(u'-a'),$$

woraus die Behauptung folgt.

6. *In jedem beliebigen Periodenparallelogramm (u_0) hat eine Funktion $f(u)$ nur endlich viele Pole.*

Würden nämlich unendlich viele Pole in (u_0) vorhanden sein, so hätten diese einen Häufungspunkt, der wesentlich singulär für $f(u)$ wäre; dies ist aber unmöglich, da $f(u)$ meromorph ist.

Wir wollen uns die Pole von $f(u)$, die im Parallelogramm (u_0) liegen, aufgeschrieben denken; und zwar jeden so oft, als seine Multiplizität beträgt. Die Anzahl r der so aufgeschriebenen Pole

$$a_1, a_2, \ldots, a_r$$

heißt der *Grad* der Funktion $f(u)$. Die Systeme

$$[a_1], [a_2], \ldots, [a_r]$$

umfassen dann die Gesamtheit aller Pole von $f(u)$ und zwar jeden Pol so oft, als seine Multiplizität angibt. Greifen wir aus jedem System eine Zahl heraus, so erhalten wir r Zahlen

$$a_1', a_2', \ldots, a_r',$$

von denen wir sagen wollen, daß sie ein *vollständiges System von Polen von $f(u)$* bilden.

§ 5. Allgemeine Sätze über die Funktionen $f(u)$.

Wir werden nun eine Reihe von allgemeinen Sätzen beweisen, welche die Grundlage für die Theorie der elliptischen Funktionen bilden.

Satz 1. *Eine Funktion $f(u)$ vom Grade $r = 0$ ist eine Konstante, oder, anders ausgedrückt, eine elliptische Funktion ohne Pole ist eine Konstante.*

Wenn $f(u)$ keinen Pol besitzt, so hat $|f(u)|$ ein endliches Maximum g, falls u alle Lagen im Periodenparallelogramm annimmt. Da $f(u)$ keine anderen Werte annimmt, als die, welche den Punkten u des Periodenparallelogramms entsprechen, so gilt also für *jedes* endliche Argument u die Ungleichung

$$|f(u)| \leqq g,$$

woraus nach dem *Liouville*schen Satze[1]) folgt, daß $f(u)$ sich auf eine Konstante reduziert.

Ehe wir zur Ableitung der weiteren Sätze schreiten, die alle aus dem *Cauchy*schen Integralsatze folgen werden, schicken wir folgendes voraus. Wir dürfen und wollen voraussetzen, daß das Parallelogramm (u_0) in positivem Sinne umlaufen wird, wenn wir seine Seiten in der Folge 2, 1′, 2′, 1 durchlaufen (vgl. Fig. 64). Denn falls dies nicht zutrifft, so können wir es durch Vertauschung von ω_1 mit ω_2 erreichen, also durch eine einfache Abänderung der Bezeichnung.

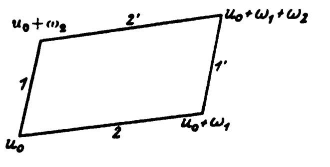


Fig. 64.

Es sei $\varphi(u)$ eine längs des Randes von (u_0) stetige Funktion; dann setzt sich das positiv um (u_0) erstreckte Integral von $\varphi(u)$ zusammen aus den durch die Seiten 2, 1′, 2′, 1 erstreckten Integralen. Nun durchläuft $u + \omega_1$ die Seite 1′, wenn u die Seite 1 durchläuft, und $u + \omega_2$ die Seite 2′, wenn u die Seite 2 durchläuft. Daher ist das erwähnte Integral durch die Formel

$$\text{(I)} \qquad \int\limits_{(u_0)} \varphi(u)\,du = \int\limits_{1} (\varphi(u+\omega_1) - \varphi(u))\,du - \int\limits_{2} (\varphi(u+\omega_2) - \varphi(u))\,du$$

darstellbar, wobei das Integral durch die Seite 1 in der Richtung von u_0 nach $u_0 + \omega_2$, durch die Seite 2 in der Richtung von u_0 nach $u_0 + \omega_1$ zu nehmen ist.

Wir identifizieren zunächst $\varphi(u)$ mit einer Funktion $f(u)$, wobei wir durch passende Wahl von u_0 dafür sorgen, daß kein Pol von $f(u)$ auf den Rand des Parallelogramms (u_0) fällt. Die Integrale der rechten Seite der Formel (I) verschwinden jetzt, da $f(u)$ die Perioden ω_1 und ω_2 hat. Das Integral der linken Seite ist, abgesehen vom Faktor $2\pi i$, die Summe der Residuen der verschiedenen Pole von $f(u)$, die im Innern des Parallelogramms (u_0) liegen. Man erkennt die Richtigkeit von

Satz 2. *Die Summe der Residuen für die irgendeinem Periodenparallelogramm angehörenden verschiedenen Pole einer Funktion $f(u)$ ist Null.*

---

[1]) Vgl. Erster Abschnitt, 3. Kapitel, § 8. (A. d. H.)

Hieraus folgt sofort

Satz 3. *Eine Funktion $f(u)$ vom Grade $r = 1$ kann nicht existieren.*

Denn würde $f(u)$ nur einen Pol erster Ordnung a im Parallelogramm (u_0) besitzen, so würde der zugehörige meromorphe Teil $\frac{C}{u-a}$ lauten, wo das Residuum $C \neq 0$ ist. Nach Satz 2 müßte aber, im Widerspruch dazu, $C = 0$ sein.

Satz 4. *Es sei $f(u)$ eine Funktion von einem Grade $r \geqq 2$ und c ein gegebener endlicher Wert. Dann gibt es in jedem Parallelogramm (u_0) genau r Stellen, an welchen $f(u)$ den Wert c annimmt.*

Eine Funktion $f(u)$ wird also nach diesem Satze in einem Periodenparallelogramm genau so oft gleich einem vorgeschriebenen endlichen Werte c, als sie den Wert ∞ annimmt. Der Satz 4 ist eigentlich ein spezieller Fall des Residuensatzes 2 und entsteht aus diesem, wenn wir ihn auf die Funktion

$$\frac{d}{du} \log [f(u) - c] = \frac{f'(u)}{f(u) - c}$$

anwenden. Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(u_0)} \frac{f'(u)\,du}{f(u) - c}$, welches nach Hilfsformel (I) verschwindet, stellt nämlich die Differenz zwischen der Anzahl der Nullstellen und der Anzahl r der Unendlichkeitsstellen (Pole) von $f(u) - c$ vor, die im Parallelogramme (u_0) liegen[1]).

Zu dem Satze 4 ist noch folgendes zu bemerken. Bezeichnet u_1 eine Lösung der Gleichung

$$(1) \qquad f(u) = c,$$

so ist für die Umgebung der Stelle u_1

$$(2) \qquad f(u) - c = A(u - u_1)^k + \cdots \qquad (A \neq 0),$$

wobei k eine natürliche Zahl bezeichnet. Die Stelle u_1 ist dann k-mal als Lösung der Gleichung (1) zu zählen, oder u_1 ist als Lösung von (1) mit der Vielfachheit k zu rechnen. Der Satz 4 besagt also, daß die Gleichung (1) r Lösungen

$$(3) \qquad u_1, u_2, \ldots, u_r$$

im einzelnen Periodenparallelogramm zuläßt, wenn wir in die Reihe (3) jede einzelne Lösung so oft aufnehmen, als ihre Vielfachheit beträgt.

Im allgemeinen werden die Stellen (3) untereinander verschieden, also jede Lösung u_i von der Vielfachheit 1 sein. Fragen wir nämlich nach denjenigen Werten c, für welche in der Gleichung (2) der Ex-

[1]) Vgl. Erster Abschnitt, 5. Kapitel, § 9. (A. d. H.)

ponent $k > 1$ ausfällt! Soll $k > 1$ sein, so ist hierfür notwendig und hinreichend, daß außer $f(u_1) = c$ auch noch

$$f'(u_1) = 0 \tag{4}$$

ist. Wir erhalten also die gesuchten Werte c, indem wir die voneinander verschiedenen Nullstellen der Funktion $f'(u)$ im Parallelogramme (u_0) aufsuchen. Sind dieselben die Stellen

$$v_1, v_2, \ldots, v_\lambda,$$

wobei ihre Anzahl λ höchstens so groß wie der Grad der Funktion $f'(u)$ sein wird, so sind die fraglichen Werte von c die Werte

$$f(v_1) = c_1, \quad f(v_2) = c_2, \quad \ldots, \quad f(v_\lambda) = c_\lambda.$$

Die Anzahl der Werte von c, für welche in der zugehörigen Reihe (3) ein und derselbe Wert mehr als einmal auftritt, beträgt also höchstens so viel, wie der Grad der Funktion $f'(u)$ angibt.

In dem speziellen Falle $c = 0$ besagt der Satz 4, daß eine Funktion $f(u)$ vom Grade r in jedem Parallelogramm (u_0) genau r Nullstellen besitzt, vorausgesetzt, daß jede Nullstelle mit ihrer Vielfachheit gezählt wird.

Wir wollen nun wieder unter $f(u)$ eine beliebige Funktion vom Grade $r \geqq 2$ verstehen. Es gilt dann der wichtige

Satz 5. *Bezeichnen $b_1, b_2, \ldots, b_r$ die Nullstellen, $a_1, a_2, \ldots, a_r$ die Pole von $f(u)$ in einem Periodenparallelogramm (u_0), so besteht die Kongruenz*

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_r \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_r \, (\omega_1, \omega_2). \tag{5}$$

Beim Beweise dürfen wir annehmen, daß keine der Nullstellen und Pole auf dem Rand des Parallelogramms (u_0) liegt, weil wir dies sonst durch eine kleine Verschiebung des Punktes u_0 erreichen können. Wenn wir

$$\varphi(u) = u \cdot \frac{f'(u)}{f(u)} \tag{6}$$

setzen, ist $\varphi(u)$ eine Funktion, die im Parallelogramm (u_0) nur die Punkte b_i und a_i zu Polen besitzt. Nach dem Residuensatz ist daher

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(u_0)} \varphi(u)\, du = \sum_{b_i} r(\varphi(u)) + \sum_{a_i} r(\varphi(u)), \tag{7}$$

wo die Summen über die voneinander verschiedenen Punkte b_i bzw. a_i zu erstrecken sind.

Ist nun b irgendeiner der Punkte b_i und k seine Multiplizität als Nullpunkt von $f(u)$, so ist für die Umgebung des Punktes b:

$$\varphi(u) = [b + (u - b)] \frac{k(u-b)^{k-1} \cdot c + \cdots}{(u-b)^k \cdot c + \cdots} = \frac{kb}{u-b} + \mathfrak{P}(u-b),$$

also kb das zugehörige Residuum. Ebenso findet sich für das Residuum von $\varphi(u)$ an einer der Stellen a der Wert $-k'a$, wenn k' die

Vielfachheit von a als Pol von $f(u)$ bedeutet. Demnach ist die rechte Seite der Gleichung (7)

(8) $\Sigma k b - \Sigma k' a = b_1 + b_2 + \dots + b_r - (a_1 + a_2 + \dots + a_r).$

Andererseits ist nach Hilfsformel (I), wegen

$$\varphi(u + \omega_i) - \varphi(u) = (u + \omega_i)\frac{f'(u+\omega_i)}{f(u+\omega_i)} - u\frac{f'(u)}{f(u)}$$

$$= \{(u + \omega_i) - u\}\frac{f'(u)}{f(u)} = \omega_i \frac{f'(u)}{f(u)},$$

das Integral (7) gleich

$$(9) \qquad \frac{1}{2\pi i}\omega_1 \int\limits_{u_0}^{u_0+\omega_2} \frac{f'(u)}{f(u)}\,du - \frac{1}{2\pi i}\omega_2 \int\limits_{u_0}^{u_0+\omega_1} \frac{f'(u)}{f(u)}\,du,$$

wobei die Integrale geradlinig zu nehmen sind. Die hier auftretenden Integrale sind nun Vielfache von $2\pi i$. Denn z. B. ist

$$\int\limits_{u_0}^{u_0+\omega_2} \frac{f'(u)}{f(u)}\,du = \int\limits_{u_0}^{u_0+\omega_2} d\log f(u)$$

der stetige Zuwachs, den $\log f(u)$ erfährt, wenn u geradlinig von u_0 bis $u_0 + \omega_2$ wandert. Dabei beschreibt aber, weil $f(u + \omega_2) = f(u)$ ist, der Punkt $f(u)$ einen geschlossenen Weg, auf welchem $\log f(u)$ also um ein Multiplum von $2\pi i$ wächst oder abnimmt.

Der Ausdruck (9) hat also die Gestalt

$$(9') \qquad m_1\omega_1 + m_2\omega_2,$$

wo m_1 und m_2 ganze Zahlen bedeuten. Der Vergleich von (8) und (9') gibt nun die Kongruenz (5).

Wir wollen den Satz 5 noch in eine andere Form bringen, indem wir ihn zugleich etwas verallgemeinern.

Zunächst setzen wir folgendes fest:

Sind $a_1, a_2, \dots, a_r$ die Pole der Funktion $f(u)$, die in einem Parallelogramme (u_0) liegen, oder auch ein vollständiges System von Polen der Funktion $f(u)$, so nennen wir jede Zahl s, welche die Kongruenz

$$(10) \qquad s \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_r \quad (\omega_1, \omega_2)$$

befriedigt, ***Polsumme*** *der Funktion $f(u)$.*

Die Polsumme einer Funktion $f(u)$ ist demnach nur bis auf eine additive Periode bestimmt.

Seien ferner $u_1, u_2, \dots, u_r$ die Nullstellen von $f(u) - c$, unter c einen gegebenen endlichen Wert verstanden, die in einem Periodenparallelogramm (u_0) liegen. Die Wertsysteme

$$[u_1], [u_2], \dots, [u_r]$$

umfassen dann alle Werte von u, welche der Gleichung

$$f(u) = c \tag{11}$$

genügen. Entnehmen wir diesen Wertsystemen je einen Wert, so erhalten wir r Werte

$$u_1', \; u_2', \; \ldots, \; u_r', \tag{12}$$

die wir ein *vollständiges System von Lösungen* der Gleichung (11) nennen wollen.

Wenden wir nun den Satz 5 auf die Funktion $f(u) - c$ an, so erhalten wir leicht den

Satz 6. *Ist $f(u)$ eine Funktion vom Grade r und bilden die Zahlen (12) ein vollständiges System von Lösungen der Gleichung (11), so gilt die Kongruenz*

$$u_1' + u_2' + \cdots + u_r' \equiv s \quad (\omega_1, \omega_2), \tag{13}$$

wo s die Polsumme von $f(u)$ bezeichnet.

§ 6. Die Funktion $\wp(u)$.

Wir wollen das Periodenparallelogramm (u_0) so wählen, daß der Nullpunkt in sein Inneres fällt. Unter den Funktionen $f(u)$ werden wir diejenigen von möglichst niedrigem Grade, also vom Grade $r = 2$, als die einfachsten zu betrachten haben. Wir wollen nun versuchen, *eine derartige Funktion zu bilden, die im Parallelogramm (u_0) nur den einen Doppelpol $u = 0$ mit dem zugehörigen meromorphen Teil $\frac{1}{u^2} + \frac{c}{u}$ besitzt.* Nach dem Residuensatze 2 des vorigen Paragraphen muß $c = 0$ sein, so daß die Entwicklung der herzustellenden Funktion für die Umgebung der Stelle $u = 0$ die Form

$$f(u) = \frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}(u) \tag{1}$$

besitzen muß. Hieraus folgt leicht, daß die Funktion $f(u)$, wenn sie überhaupt existiert, bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Denn ist $f_1(u)$ eine Funktion derselben Beschaffenheit wie $f(u)$, so hat die Differenz $f_1(u) - f(u)$ den Nullpunkt nicht mehr zum Pol und daher im Parallelogramm (u_0) überhaupt keinen Pol. Nach Satz 1 des vorigen Paragraphen ist daher in der Tat notwendig

$$f_1(u) = f(u) + C.$$

Die Konstante C kann, und zwar nur auf eine Weise, so gewählt werden, daß in der Potenzreihe, welche $f_1(u)$ an der Stelle $u = 0$ darstellt, das konstante Glied fehlt.

Es gibt also, wenn überhaupt, nur *eine* Funktion, sie heiße $\wp(u)$, vom Grade $r = 2$, die an der Stelle $u = 0$ eine Entwicklung der Gestalt

$$(2) \qquad \wp(u) = \frac{1}{u^2} + u\mathfrak{P}(u)$$

besitzt, wo $u\mathfrak{P}(u)$ eine mit u verschwindende Potenzreihe bezeichnet.

Die Gesamtheit der Pole von $\wp(u)$ wird durch das System [0] aller Periodenpunkte

$$(3) \qquad w = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

gebildet, und dem Pole w wird der meromorphe Teil $\frac{1}{(u-w)^2}$ entsprechen, da der zu w kongruenten Stelle 0 der meromorphe Teil $\frac{1}{u^2}$ zukommt.

Wir werden durch diese Bemerkung darauf geführt, zu versuchen, die Funktion $\wp(u)$ mit Hilfe des *Mittag-Leffler*schen Satzes herzustellen. Zuvor haben wir aber noch den folgenden Satz zu beweisen:

Die Summe

$$(4) \qquad S = \sum{}' \frac{1}{|w|^3}$$

konvergiert.

Dabei ist die Summe über alle Perioden (3) zu erstrecken, mit Ausnahme der Periode Null, was durch das an das Summenzeichen gesetzte Komma angedeutet werden soll.

Wir betrachten diejenigen Punkte w, für welche

$$(5) \qquad n \leqq |w| < n + 1$$

ist, unter n eine natürliche Zahl verstanden, und setzen

$$(6) \qquad S_n = \sum \frac{1}{|w|^3},$$

wobei die Summe über die betrachteten Punkte erstreckt wird. Nun schätzen wir die Anzahl dieser Punkte folgendermaßen ab. Es sei 2ε eine positive Zahl, die kleiner ist als der Abstand des Nullpunktes von jedem andern Periodenpunkt w. Dann ist auch

$$2\varepsilon < |w_1 - w_2|,$$

d. h. kleiner als der Abstand zweier verschiedener Periodenpunkte w_1 und w_2. Wenn wir also um jeden Periodenpunkt als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius ε beschreiben, so liegen diese Kreise ganz außereinander. Die Punkte w, welche der Bedingung (5) genügen und deren Anzahl A_n heißen mögen, gehören dem Kreisring an, der durch die Kreise mit dem Mittelpunkt Null und den Radien n und $n+1$ begrenzt wird. Die um die A_n Punkte w mit dem Radius ε beschriebenen Kreise liegen daher ganz in dem Kreisring

mit dem Mittelpunkt Null und den Radien $n - \varepsilon$ und $n + 1 + \varepsilon$ und bedecken also eine Fläche, die kleiner ist als die Fläche dieses Kreisringes. Daher ist

$$A_n \cdot \varepsilon^2 \pi < (n + 1 + \varepsilon)^2 \pi - (n - \varepsilon)^2 \pi$$

oder

$$A_n < \frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon^2}(2n + 1) \leqq \frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon^2} \cdot 3n = k \cdot n,$$

wo k zur Abkürzung für die feste Zahl $\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon^2} \cdot 3$ steht.

Bei dieser Deduktion ist $n > \varepsilon$ gedacht, da wir den Kreis mit dem Radius $n - \varepsilon$ betrachteten. Die Ungleichung für A_n gilt also von $n = 1$ ab, wenn, was offenbar statthaft ist, die Zahl $\varepsilon < 1$ fixiert wurde. Nun folgt für die Summe (6)

$$S_n \leqq A_n \cdot \frac{1}{n^3} < k \cdot n \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{k}{n^2},$$

und die Summe

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots \tag{7}$$

ist daher konvergent; folglich auch die Summe S, weil alle Glieder von S, abgesehen von denjenigen, für die etwa $|w| < 1$ sein sollte und die nur in endlicher Anzahl vorhanden sein können, in den Summen S_n auftreten.

Zufolge des eben bewiesenen Satzes stellt nun nach dem *Mittag-Leffler*schen Theorem

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum{}'\left(\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right) = \frac{1}{u} + \sum{}' \frac{u^2}{(u - w)\, w^2} \tag{8}$$

eine meromorphe Funktion mit den meromorphen Teilen $\frac{1}{u - w}$ vor. Wir sehen jetzt leicht ein, daß

$$\wp(u) = -\zeta'(u) = \frac{1}{u^2} + \sum{}'\left(\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right) \tag{9}$$

allen Bedingungen, die wir für die gesuchte Funktion gestellt haben, genügt.

Zunächst hat $\wp(u)$ die Punkte w zu Polen und die richtigen meromorphen Teile. Ferner ist $\wp(u) - \frac{1}{u^2}$ Null für $u = 0$, weil die Summe in (9) für $u = 0$ verschwindet. Es bleibt zu zeigen, daß $\wp(u)$ die Perioden ω_1 und ω_2 besitzt. Zu dem Ende bilden wir

$$\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} - 2\sum{}' \frac{1}{(u - w)^3} = -2\sum \frac{1}{(u - w)^3}, \tag{10}$$

wo die Summe ohne Komma über die Gesamtheit aller Perioden $w = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ $(m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ zu erstrecken ist. Nun kommt

$$\wp'(u+\omega_1) = -2\sum\frac{1}{[u-(w-\omega_1)]^3} = -2\sum\frac{1}{(u-w)^3},$$

weil

$$w - \omega_1 = (m_1 - 1)\omega_1 + m_2\omega_2$$

ebenfalls alle Perioden durchläuft. Es ist also

$$\wp'(u+\omega_1) = \wp'(u),$$

woraus durch Integration

$$\wp(u+\omega_1) = \wp(u) + c_1 \tag{11}$$

folgt, unter c_1 eine Konstante verstanden. Nun ist $\wp(u)$ eine gerade Funktion. Denn nach (9) ist

$$\wp(-u) = \frac{1}{u^2} + \sum{}'\left(\frac{1}{(u+w)^2} - \frac{1}{w^2}\right) = \frac{1}{u^2} + \sum{}'\left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right),$$

da $-w$ dieselben Werte wie $+w$ durchläuft. Setzen wir zur Bestimmung von c_1 in (11) $u = -\frac{\omega_1}{2}$, so kommt

$$\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \wp\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) + c_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) + c_1,$$

und also $c_1 = 0$, weil $\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$ ein endlicher Wert ist. Wir haben also

$$\wp(u+\omega_1) = \wp(u);$$

und ebenso folgt

$$\wp(u+\omega_2) = \wp(u).$$

Die Funktion $\wp(u)$, die also tatsächlich alle geforderten Eigenschaften besitzt, wollen wir die *Weierstraßsche $\wp$-Funktion* nennen, weil sie von *Weierstraß* der Theorie der elliptischen Funktionen zugrunde gelegt wurde.

Aus dem vorhergehenden Paragraphen folgen sogleich eine Reihe von Sätzen über die Funktion $\wp(u)$, die wir hier zusammenstellen.

Satz 1. *Als Polsumme von $\wp(u)$ kann $s = 0$ genommen werden.* Denn die Pole a_1 und a_2, die $\wp(u)$ in unserem Periodenparallelogramm (u_0) besitzt, sind beide Null.

Satz 2. *Die Lösungen der Gleichung $\wp(u) = c$, wo c einen gegebenen Wert bedeutet, bilden zwei Systeme $[u']$ und $[u'']$, und es ist $u' + u'' = 0(\omega_1, \omega_2)$.*

Dies folgt aus Satz 6 von § 5. Wenn wir eines der beiden Systeme, etwa $[u']$, kennen, so wird, da $u'' \equiv -u'(\omega_1, \omega_2)$ ist, das andere das System $[-u']$ sein.

Satz 3. *Die Gleichung*

$$(12)\qquad \wp(u) = \wp(v)$$

besteht dann und nur dann, wenn entweder

$$(13)\qquad u \equiv v\,(\omega_1, \omega_2) \quad \text{oder} \quad u \equiv -\,v\,(\omega_1, \omega_2)$$

ist.

Denken wir uns nämlich in (12) das Argument v als fest gegeben, u als ein zu bestimmendes Argument, so gehört u nach Satz 2 einem von zwei Systemen untereinander kongruenter Werte an. Das eine dieser beiden Systeme ist offenbar das System $[v]$ und folglich $[-v]$ das andere; d. h. u muß einer der Kongruenzen (13) genügen.

Wir wollen jetzt untersuchen, für welche Werte von v die beiden Lösungssysteme $[v]$ und $[-v]$ der Gleichung (12) zusammenfallen. Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß

$$v \equiv -\,v \quad \text{oder} \quad 2\,v \equiv 0\,(\omega_1, \omega_2)$$

ist. Es muß also $2\,v = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ oder

$$(14)\qquad v = \frac{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{2},$$

die Hälfte einer Periode, sein. Da nun

$$m_1 = 2\,m_1' + \varepsilon_1, \quad m_2 = 2\,m_2' + \varepsilon_2$$

gesetzt werden kann, wo m_1', m_2' ganze Zahlen, ε_1 und ε_2 je einen der beiden Werte 0 und 1 bezeichnen, so kommt

$$v = m_1'\omega_1 + m_2'\omega_2 + \frac{\varepsilon_1\omega_1 + \varepsilon_2\omega_2}{2};$$

d. h. die gesuchten Werte von v sind einer der Zahlen

$$(15)\qquad 0,\ \frac{\omega_1}{2},\ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2},\ \frac{\omega_2}{2}$$

kongruent. Während für $v = 0$ der zugehörige Wert der $\wp$-Funktion ∞ ist, entsprechen den drei anderen Zahlen (15) drei endliche Funktionswerte, die wir mit

$$(16)\qquad \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = e_1,\quad \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = e_2,\quad \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = e_3$$

bezeichnen wollen. Bedeutet c einen endlichen Wert, so sind die Lösungen der Gleichung

$$\wp(u) - c = 0$$

von der Multiplizität zwei, wenn c mit einer der Zahlen e_1, e_2, e_3 zusammenfällt. Hieraus folgt, daß die Gleichung

$$\wp'(u) = 0$$

für $u = \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ erfüllt ist. Diese Punkte fallen, wenn wir den Punkt u_0 genügend dicht beim Nullpunkt annehmen, in unser Parallelogramm (u_0) und bilden mit dem Nullpunkt die Ecken eines Parallelogramms. (Vgl. die Figur 65.)

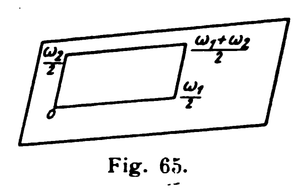


Fig. 65.

Aus Satz 3 ergibt sich noch, daß die Werte e_1, e_2, e_3 untereinander verschieden sind. Das läßt sich auch so erschließen: Wäre z. B. $e_1 = e_3$, so würde die Funktion zweiten Grades

$$\wp(u) - e_1 = \wp(u) - e_3$$

im Periodenparallelogramm *vier* Nullstellen, nämlich die Stellen $\frac{\omega_1}{2}$ und $\frac{\omega_2}{2}$, jede doppelt gezählt, besitzen.

§ 7. Die Differentialgleichung von $\wp(u)$.

Die Funktion $\wp'(u)$ hat an der Stelle $u = 0$ die Entwicklung

$$(1) \qquad \wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + \mathfrak{P}(u),$$

hat also die Stelle $u = 0$ zum dreifachen Pol, während sie im Periodenparallelogramm (u_0) sonst überall regulär ist. Es ist daher $\wp'(u)$ eine Funktion vom Grade $r = 3$ und muß folglich im Periodenparallelogramm auch *drei*mal verschwinden. Nach dem vorigen Paragraphen sind die drei Nullstellen von $\wp'(u)$ die Punkte

$$(2) \qquad u = \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2},$$

an denen $\wp'(u)$ demnach *einfach* Null wird. An diesen Punkten werden bzw.

$$(3) \qquad \wp(u) - e_1, \quad \wp(u) - e_2, \quad \wp(u) - e_3$$

je doppelt verschwinden.

Vergleichen wir nun die Pole und Nullstellen von $\wp'(u)$, nämlich:

$$\text{Pole: } 0, 0, 0, \text{ Nullstellen: } \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2},$$

mit denen von $f(u) = (\wp(u) - e_1)(\wp(u) - e_2)(\wp(u) - e_3)$, nämlich:

$$\text{Pole: } 0, 0, 0, 0, 0, 0, \text{ Nullstellen: } \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2},$$

so sehen wir, daß der Quotient

$$Q = \frac{\wp'^2(u)}{f(u)}$$

im Periodenparallelogramm (u_0) nirgends unendlich wird, da der Zähler dieselben Pole und Nullstellen in derselben Vielfachheit wie der Nenner

besitzt. Folglich ist der Quotient eine Funktion vom Grade $r = 0$ und also eine Konstante. An der Stelle $u = 0$ haben wir die Entwicklungen

$$\wp'^2(u) = \frac{4}{u^6} + \ldots, \quad f(u) = \frac{1}{u^6} + \ldots.$$

Tragen wir diese in den Quotienten Q ein und lassen dann u in Null übergehen, so erhalten wir den Wert $Q = 4$, und da Q, wie wir wissen, eine Konstante ist, so folgt

$$\wp'^2(u) = 4 \cdot f(u);$$

d. h.

Satz 1. *Die Funktion $\wp(u)$ befriedigt die Differentialgleichung*

$$\wp'^2(u) = 4(\wp(u) - e_1)(\wp(u) - e_2)(\wp(u) - e_3). \tag{4}$$

Wir wollen diesen wichtigen Satz noch auf einem andern Wege ableiten, der uns die Differentialgleichung in einer andern Form liefert.

Zunächst betrachten wir die Entwicklung der Funktion $\wp(u)$ an der Stelle $u = 0$ etwas näher. Für

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \Sigma'\left(\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right) = \frac{1}{u} - \Sigma'\left(\frac{u^2}{w^3} + \frac{u^3}{w^4} + \ldots\right)$$

erhalten wir die Entwicklung

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - G_3 u^2 - G_4 u^3 - \ldots - G_n u^{n-1} - \ldots, \tag{5}$$

wenn wir zur Abkürzung

$$G_n = \Sigma' \frac{1}{w^n} = \Sigma' \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^n} \qquad (n = 3, 4, \ldots) \tag{6}$$

setzen. Die Summe G_n ändert sich nicht, wenn wir w durch $-w$ ersetzen. Für ein ungerades n ist folglich

$$G_n = \Sigma' \frac{1}{(-w)^n} = -\Sigma' \frac{1}{w^n} = -G_n$$

und also $G_n = 0$. Daher können wir die Entwicklung von $\zeta(u)$ in der Form ansetzen:

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - c_2 \frac{u^3}{3} - c_3 \frac{u^5}{5} - \ldots - c_n \frac{u^{2n-1}}{2n-1} - \ldots, \tag{7}$$

wobei die Koeffizienten c_n die Werte

$$c_n = (2n - 1) \Sigma' \frac{1}{w^{2n}} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots) \tag{8}$$

haben. *Demnach lautet die Entwickelung von $\wp(u)$ am Nullpunkte:*

$$\wp(u) = -\zeta'(u) = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \ldots + c_n u^{2n-2} + \ldots, \tag{9}$$

wobei die Koeffizienten c_n gemäß (8) von den Perioden ω_1, ω_2 abhängen.

Nun folgt aus (9)

$$\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + 2c_2 u + 4c_3 u^3 + \cdots$$

und, wenn wir die Entwicklungen immer bis zu den von u unabhängigen Gliedern fortsetzen,

$$\wp'^2(u) = \frac{4}{u^6} - \frac{8c_2}{u^2} - 16c_3 + \cdots$$

$$\wp^3(u) = \frac{1}{u^6} + \frac{3c_2}{u^2} + 3c_3 + \cdots$$

$$\wp'^2(u) - 4\wp^3(u) = -\frac{20c_2}{u^2} - 28c_3 + \cdots$$

und schließlich

$$\wp'^2(u) - 4\wp^3(u) + 20c_2\wp(u) = -28c_3 + \cdots. \tag{10}$$

Die links stehende Funktion kann im Periodenparallelogramm (u_0) höchstens den Pol $u=0$ haben. Tatsächlich hat sie aber den Punkt $u=0$ nicht zum Pol, da sie gemäß (10) für $u=0$ den endlichen Wert $-28c_3$ annimmt. Nach § 5, Satz 1 ist unsere Funktion daher eine Konstante, deren Wert $-28c_3$ ist. Es ist also für alle Werte von u

$$\wp'^2(u) - 4\wp^3(u) + 20c_2\wp(u) = -28c_3.$$

Führen wir noch die Bezeichnungen ein:

$$\begin{cases} g_2 = 20c_2 = 60\sum'\frac{1}{w^4}, \\ g_3 = 28c_3 = 140\sum'\frac{1}{w^6}, \end{cases} \tag{11}$$

so haben wir also den

Satz 2. *Die Funktion $\wp(u)$ genügt der Differentialgleichung*

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3. \tag{12}$$

Dabei ist der Kürze halber $\wp$ für $\wp(u)$ und $\wp'$ für $\wp'(u)$ geschrieben.

Die Konstanten g_2 und g_3 heißen die *Invarianten* der Funktion $\wp(u)$.

Die rechten Seiten in den Gleichungen (4) und (12) sind für alle Werte von u beide derselben Größe (nämlich $\wp'^2(u)$) gleich. Daraus folgt, daß identisch in x die Gleichung

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3) \tag{13}$$

besteht. Es sind also e_1, e_2, e_3 die Wurzeln der Gleichung 3ten Grades

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 0. \tag{14}$$

Als *Diskriminante* werden wir den Wert von

$$\Delta = 16(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2 \tag{15}$$

bezeichnen, der nach Früherem von Null verschieden ist. Bekannten algebraischen Sätzen zufolge gelten die Beziehungen:

$$(16)\quad \begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 = -\frac{1}{4} g_2, \quad e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3, \\ \Delta = 16 (e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2 (e_2 - e_3)^2 = g_2^3 - 27 g_3^2. \end{cases}$$

Aus der Differentialgleichung (12) erhalten wir auf folgende Weise eine Rekursionsformel für die Entwicklungskoeffizienten c_n der Funktion $\wp(u)$. Durch Differentiation von (12) finden wir $2\wp'\wp'' = (12\wp^2 - g_2)\wp'$ oder

$$(17)\qquad \wp'' = 6\wp^2 - \tfrac{1}{2} g_2 = 6\wp^2 - 10 c_2.$$

Setzen wir hierin die Entwicklung (9) für $\wp$ ein, so kommt

$$\frac{6}{u^4} + 2\cdot 1\cdot c_2 + 4\cdot 3\cdot c_3 u^2 + \ldots + (2n-2)(2n-3) c_n u^{2n-4} + \ldots$$

$$= -10 c_2 + 6\wp^2 = -10 c_2 + 6\left[\frac{1}{u^2} + \sum_2^{\infty} c_n u^{2n-2}\right]^2$$

$$= -10 c_2 + 6\left[\frac{1}{u^4} + 2\sum_n c_n u^{2n-4} + \sum_{r,s} c_r c_s u^{2(r+s)-4}\right],$$

woraus durch Vergleich der Koeffizienten von u^{2n-4} sich leicht

$$[(2n-2)(2n-3) - 12] c_n = 6 \sum_{r+s=n} c_r c_s \qquad (n = 4, 5, 6, \ldots)$$

ergibt. Nach einfacher Rechnung erhält man

$$(18)\quad (n-3)(2n+1) c_n = 3[c_2 c_{n-2} + c_3 c_{n-3} + \cdots + c_{n-2} c_2] \quad (n = 4, 5, 6, \ldots)$$

Vermöge dieser Rekursionsformel können wir sukzessive

$$c_4 = \tfrac{1}{3} c_2^2, \quad c_5 = \tfrac{3}{11} c_2 c_3, \quad c_6 = \tfrac{1}{13}[2 c_2 c_4 + c_3^2] = \tfrac{1}{13}[\tfrac{2}{3} c_2^3 + c_3^2], \ldots$$

durch c_2 und c_3 oder auch wegen (11) durch g_2 und g_3 ausdrücken. Wir erkennen so die Richtigkeit von

Satz 3. *Die Entwicklungskoeffizienten c_n von $\wp(u)$ sind ganze rationale Funktionen der Invarianten g_2 und g_3 mit rationalen positiven Zahlenkoeffizienten.*

Hierin liegt, wegen (8), die bemerkenswerte Tatsache, daß sich die Summen

$$G_{2n} = \sum{}' \frac{1}{w^{2n}} = \sum_{m_1, m_2}{}' \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^{2n}} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

ganz und rational mit rationalen positiven Koeffizienten durch die beiden ersten G_4 und G_6 ausdrücken lassen.

§ 8. Das Additionstheorem von $\wp(u)$.

Man sagt von einer Funktion $\varphi(u)$, sie besitze ein *algebraisches Additionstheorem*, wenn zwischen $\varphi(u_1 + u_2)$, $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$ eine alge-

braische Gleichung mit festen, d. h. von u_1 und u_2 unabhängigen Koeffizienten besteht oder, was dasselbe besagt, wenn $\varphi(u_1 + u_2)$ algebraisch durch $\varphi(u_1)$ und $\varphi(u_2)$ ausdrückbar ist. Daß die *Exponentialfunktion* und die *elementaren trigonometrischen Funktionen* solche Additionstheoreme besitzen, ist eine der Haupteigenschaften dieser Funktionen. Wir wollen jetzt zeigen, daß dieselbe Eigenschaft auch der Funktion $\wp(u)$ zukommt.

Zu dem Ende betrachten wir die Funktion

$$f(u) = \wp'(u) - a\wp(u) - b, \tag{1}$$

wo wir die Konstanten a und b so wählen, daß $f(u)$ an zwei beliebig fixierten Stellen u_1 und u_2 verschwindet. Setzen wir zur Abkürzung

$$\begin{cases} \wp(u_1) = p_1, & \wp'(u_1) = p_1', \\ \wp(u_2) = p_2, & \wp'(u_2) = p_2', \end{cases} \tag{2}$$

so sind also a und b aus den Gleichungen

$$a p_1 + b = p_1', \quad a p_2 + b = p_2' \tag{3}$$

zu bestimmen. Nun ist $f(u)$ eine Funktion vom Grade $r = 3$, die im Periodenparallelogramm (u_0) den dreifachen Pol $u = 0$ und also die Polsumme $s = 0$ besitzt. Nach § 5, Satz 6 bilden daher

$$u_1, \; u_2, \; -(u_1 + u_2)$$

ein vollständiges System von Nullstellen der Funktion $f(u)$. Wenn also

$$\wp(u_1 + u_2) = p_3, \quad \wp'(u_1 + u_2) = p_3' \tag{4}$$

gesetzt wird, so gilt (unter Berücksichtigung des Umstandes, daß $\wp'(u)$ eine ungerade Funktion ist) die Gleichung

$$a p_3 + b = -p_3', \tag{5}$$

welche zum Ausdruck bringt, daß $f(u)$ für $u = -(u_1 + u_2)$ verschwindet.

Setzen wir nun in die Differentialgleichung der $\wp$-Funktion

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = \wp'^2$$

für das Argument u sukzessive $u_1, u_2, u_1 + u_2$ ein, so erkennen wir, daß die Gleichung

$$4x^3 - g_2 x - g_3 - (ax + b)^2 = 0 \tag{6}$$

die Wurzeln

$$x = p_1, \quad x = p_2, \quad x = p_3 \tag{7}$$

besitzt. Wir wollen uns u_1 und u_2 etwa im Periodenparallelogramm (u_0) so fixiert denken, daß $p_1 = \wp(u_1)$, $p_2 = \wp(u_2)$, $p_3 = \wp(u_1 + u_2)$ voneinander verschieden sind. Dadurch schließen wir, wenn wir u_1 *beliebig* angenommen haben, nur endlich viele Punkte u_2 im Perioden-

parallelogramm aus, und wir sind sicher, daß die Werte (7) die *sämtlichen* Wurzeln der Gleichung (6) vorstellen. Demnach gelten die Gleichungen

$$(8)\qquad \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = \frac{a^2}{4}, \\ p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 = -\frac{ab}{2} - \frac{g_2}{4}, \\ p_1 p_2 p_3 = \frac{g_3}{4} + \frac{b^2}{4}. \end{cases}$$

Aus (3) ergeben sich nun weiter für a und b die Werte

$$(9)\qquad a = \frac{p_1' - p_2'}{p_1 - p_2}, \qquad b = \frac{p_1 p_2' - p_2 p_1'}{p_1 - p_2},$$

und die erste der Gleichungen (8) liefert den

Satz 1. *Für die Funktion $\wp(u)$ gilt die Gleichung*

$$\wp(u_1 + u_2) = -\wp(u_1) - \wp(u_2) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u_1) - \wp'(u_2)}{\wp(u_1) - \wp(u_2)}\right)^2,$$

wenn u_1, u_2 zwei beliebige Argumente bedeuten.

Die Beschränkung, die wir beim Beweise den Argumenten u_1, u_2 auferlegten, haben wir im Ausspruch des Satzes wieder fallen lassen, was offenbar erlaubt ist.

Da $\wp'(u_1)$ und $\wp'(u_2)$ vermöge der Differentialgleichung der $\wp$-Funktion algebraisch durch $\wp(u_1)$ bzw. $\wp(u_2)$ ausdrückbar sind, so gibt Satz 1 das Additionstheorem von $\wp(u)$.

Wenn wir aus den Gleichungen (8) die Zahlen a und b eliminieren, so erhalten wir

Satz 2. *Zwischen*

$$\wp(u_1) = p_1, \quad \wp(u_2) = p_2, \quad \wp(u_1 + u_2) = p_3$$

besteht die algebraische Gleichung

$$(p_1 + p_2 + p_3)(4\, p_1 p_2 p_3 - g_3) = \left(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 + \frac{g_2}{4}\right)^2,$$

welche das Additionstheorem der $\wp$-Funktion in anderer Form vorstellt.

§ 9. Darstellung der elliptischen Funktionen durch die $\wp$-Funktion.

Es sei $f(u)$ eine meromorphe Funktion mit den Perioden ω_1, ω_2, also eine Funktion des Körpers K. Dann können wir die Konstante c auf unendlich viele Weisen so wählen, daß die Gleichung $f(u) = c$ keine mehrfach zu zählende Lösung besitzt (siehe § 5).

Wir wollen nun bezüglich der Funktion $f(u)$ drei Fälle betrachten:

Erster Fall: $f(u)$ ist gerade, also $f(-u) = f(u)$.

Ist dann $[u_1]$ eines der r Lösungssysteme der Gleichung $f(u) = c$, so ist $[-u_1]$ ein davon verschiedenes. Denn wäre $u_1 \equiv -u_1\,(\omega_1, \omega_2)$, so würde auch $u_1 + h \equiv -u_1 + h$, unter h eine beliebige Zahl verstanden, sein und folglich

$$f(u_1 + h) = f(-u_1 + h) = f(u_1 - h), \quad f'(u_1 + h) = -f'(u_1 - h),$$

woraus $f'(u_1) = 0$ folgen würde. Es wäre dann u_1 eine mehrfach zu zählende Lösung, was der Annahme widerspricht. Aus dieser Bemerkung geht hervor, daß die Lösungssysteme der Gleichung $f(u) = c$ in Paaren folgendermaßen angesetzt werden können:

$$[u_1],\ [-u_1],\ [u_2],\ [-u_2],\ \ldots,\ [u_k],\ [-u_k],$$

woraus beiläufig folgt, daß der Grad r einer geraden Funktion $f(u)$ eine gerade Zahl $2k$ ist. Für einen andern Wert von c, den wir d nennen wollen, habe $f(u) = d$ die Lösungssysteme

$$[v_1],\ [-v_1],\ [v_2],\ [-v_2],\ \ldots,\ [v_k],\ [-v_k].$$

Die Funktion

$$F(u) = \frac{f(u) - c}{f(u) - d}$$

hat dann dieselben Pole und Nullstellen wie die Funktion

$$Q(u) = \frac{[\wp(u) - \wp(u_1)]\,[\wp(u) - \wp(u_2)]\ldots[\wp(u) - \wp(u_k)]}{[\wp(u) - \wp(v_1)]\,[\wp(u) - \wp(v_2)]\ldots[\wp(u) - \wp(v_k)]},$$

der Quotient aus beiden Funktionen ist daher eine Konstante C (§ 5, Satz 1).

Die Auflösung der Gleichung

$$\frac{f(u) - c}{f(u) - d} = C \cdot Q(u)$$

nach $f(u)$ ergibt nun den

Satz 1. *Eine gerade elliptische Funktion mit den Perioden ω_1, ω_2 ist als rationale Funktion der mit diesen Perioden gebildeten Funktion $\wp(u)$ darstellbar.*

Zweiter Fall: $f(u)$ ist ungerade, also $f(-u) = -f(u)$.

Da $\wp'(u)$ ebenfalls ungerade ist, so wird $\frac{f(u)}{\wp'(u)}$ gerade sein. Die Anwendung von Satz 1 auf die letztere Funktion liefert den

Satz 2. *Eine ungerade elliptische Funktion mit den Perioden ω_1, ω_2 ist als Produkt von $\wp'(u)$ mit einer rationalen Funktion von $\wp(u)$ darstellbar.*

Dritter Fall: Es sei $f(u)$ eine *beliebige* meromorphe Funktion mit den Perioden ω_1, ω_2. Durch den Ansatz

$$f(u) = \tfrac{1}{2}[f(u) + f(-u)] + \tfrac{1}{2}[f(u) - f(-u)]$$

wird $f(u)$ in die Summe zweier meromorpher Funktionen zerlegt, welche die Perioden ω_1, ω_2 besitzen und von denen die erste eine gerade, die zweite eine ungerade Funktion ist.

Die Anwendung der vorhergehenden Sätze ergibt daher den

Satz 3. *Eine jede elliptische Funktion $f(u)$ mit den Perioden ω_1, ω_2 läßt sich in der Form*

$$f(u) = R(\wp(u)) + \wp'(u) R_1(\wp(u)) \tag{1}$$

als rationale Funktion von $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ darstellen.

Umgekehrt ist jede rationale Funktion $R(\wp(u), \wp'(u))$ von $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ eine elliptische Funktion mit den Perioden ω_1, ω_2. Die hieraus beiläufig folgende Tatsache, daß sich jede solche rationale Funktion auf die Form (1) bringen läßt, kann auch leicht direkt aus der Differentialgleichung von $\wp(u)$ nachgewiesen werden, da diese gestattet, die höheren Potenzen von $\wp'(u)$ durch $\wp(u)$ und die erste Potenz von $\wp'(u)$ auszudrücken.

Die Ableitungen von $\wp(u)$ geben die einfachsten Beispiele für die hier bewiesenen Sätze. Da jede Ableitung gerader Ordnung $\wp^{(2n)}$ eine gerade Funktion ist, muß sie nach Satz 1 eine rationale Funktion von $\wp(u)$, jede Ableitung ungerader Ordnung nach Satz 2 das Produkt aus $\wp'(u)$ und einer rationalen Funktion von $\wp(u)$ sein. Setzen wir dementsprechend, indem wir bequemer Schreibweise wegen das Argument u unterdrücken,

$$\wp^{(2n)} = R_n(\wp), \quad \text{also} \quad \wp^{(2n+1)} = R_n'(\wp) \cdot \wp', \tag{2}$$

so wird

$$\wp'' = R_1(\wp) = 6\wp^2 - \tfrac{1}{2} g_2, \tag{3}$$

wie wir schon früher durch Differentiation aus der Differentialgleichung von $\wp(u)$ fanden.

Die Differentiation der zweiten Gleichung (2) liefert nun

$$\wp^{(2n+2)} = R_n'(\wp) \cdot \wp'' + R_n''(\wp) \wp'^2 = R_{n+1}(\wp)$$

und daher

$$R_{n+1}(\wp) = R_n'(\wp)(6\wp^2 - \tfrac{1}{2} g_2) + R_n''(\wp)(4\wp^3 - g_2\wp - g_3). \tag{4}$$

Aus dieser Rekursionsformel können wir sukzessive, ausgehend von R_1, die rationalen Funktionen R_2, R_3, ... bestimmen. Man erkennt so leicht, daß

$$\wp^{(2n)}(u) = R_n(\wp) = (2n+1)!\,\wp^{n+1} + \dots$$

eine ganze Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades von $\wp(u)$ wird.

Der Umstand, daß die hier auftretenden rationalen Funktionen *ganze* Funktionen werden, beruht auf dem leicht zu beweisenden allgemeinen Satze:

Satz 4. *Eine Funktion $f(u)$, die im Periodenparallelogramm nur den einen Pol $u \equiv 0$ besitzt, ist in der Form*

$$f(u) = R(\wp(u)) + \wp'(u) R_1(\wp(u))$$

darstellbar, wo R und R_1 ganze rationale Funktionen bezeichnen.

Denn würde $R(\wp)$ für einen endlichen Wert von $\wp$ unendlich, so würde auch $f(u) + f(-u) = 2R(\wp(u))$ für einen Wert von u unendlich werden, der nicht kongruent Null ist. Folglich ist R eine *ganze* rationale Funktion. Also wird auch $\wp'(u) R_1(\wp(u))$ für keinen zu Null inkongruenten Wert von u unendlich. Würde nun R_1 für einen endlichen Wert von $\wp$ unendlich, so müßte zugleich $\wp'(u) = 0$ sein; es wäre also u einer der halben Perioden $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ kongruent; dann würde aber dort $\frac{1}{R_1}$ als Funktion von u mindestens von zweiter, $\wp'(u)$ nur von erster Ordnung verschwinden, also $\wp'(u) R_1(\wp(u))$ doch unendlich werden.

Als zweites Beispiel für Satz 1 betrachten wir die Funktion $\wp(nu)$, wo n eine natürliche Zahl bezeichnet. Diese Funktion ist in der Tat gerade und besitzt die Perioden ω_1 und ω_2. Also gilt das „*Multiplikationstheorem*" von $\wp(u)$:

Satz 5. *Es ist $\wp(nu)$ als rationale Funktion von $\wp(u)$ darstellbar.*

Die den einzelnen Werten von n entsprechenden Darstellungen sind mit Hilfe des Additionstheorems leicht erhältlich. Z. B. ergibt sich aus

$$(5) \qquad \wp(u + u_1) = -\wp(u) - \wp(u_1) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(u_1)}{\wp(u) - \wp(u_1)}\right)^2,$$

wenn wir u_1 in u hineinrücken lassen,

$$\wp(2u) = -2\wp(u) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(u)}{\wp'(u)}\right)^2,$$

oder

$$(6) \quad \wp(2u) = -2\wp + \frac{1}{4}\frac{\left(6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2\right)^2}{4\wp^3 - g_2\wp - g_3} = \frac{\wp^4 + \frac{1}{2}g_2\wp^2 + 2g_3\wp + \frac{1}{16}g_2^2}{4\wp^3 - g_2\wp - g_3},$$

wo rechter Hand $\wp$ für $\wp(u)$ steht.

Ersetzt man sodann in (5) u_1 durch $2u$, so ergibt sich durch leichte Rechnung $\wp(3u)$ usf.

Der Hauptsatz dieses Paragraphen, der Satz 3, ist von hohem prinzipiellen Interesse. *Er gibt uns eine klare Anschauung von der Gesamtheit der Funktionen $f(u)$, die wir zu dem System K zusammengefaßt hatten. Diese Funktionen fallen völlig zusammen mit denjenigen, die sich rational aus $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ aufbauen lassen.*

§ 10. Eigenschaften der Funktionen $f(u)$.

Betrachten wir irgend zwei elliptische Funktionen $f(u)$, $f_1(u)$ mit den Perioden ω_1, ω_2, so ist nach Satz 3 des vorigen Paragraphen

$$f(u) = R(\wp, \wp'), \quad f_1(u) = R_1(\wp, \wp'). \tag{1}$$

Verbinden wir hiermit die Gleichung

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \tag{2}$$

so wird die Elimination von $\wp$ und $\wp'$ eine algebraische Gleichung

$$G(f(u), f_1(u)) = 0 \tag{3}$$

mit von u unabhängigen Koeffizienten liefern. Also besteht der

Satz 1. *Zwischen je zwei elliptischen Funktionen $f(u)$, $f_1(u)$ mit denselben Perioden ω_1, ω_2 besteht eine algebraische Gleichung mit konstanten Koeffizienten.*

Wenden wir diesen Satz an auf den Fall, wo $f_1(u) = f'(u)$ genommen wird, so kommt

Satz 2. *Jede elliptische Funktion $f(u)$ befriedigt eine algebraische Differentialgleichung*

$$G(f(u), f'(u)) = 0,$$

deren linke Seite eine ganze Funktion mit konstanten Koeffizienten ist.

Wir beweisen leicht durch ähnliche Betrachtungen den

Satz 3. *Jede elliptische Funktion $f(u)$ besitzt ein algebraisches Additionstheorem.*

In der Tat, es ist

$$f(u_1 + u_2) = R(\wp(u_1 + u_2), \wp'(u_1 + u_2)). \tag{4}$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\wp(u_1) = p_1, \quad \wp'(u_1) = p_1', \quad \wp(u_2) = p_2, \quad \wp'(u_2) = p_2',$$

so ist nach dem Additionstheorem der $\wp$-Funktion

$$\wp(u_1 + u_2) = R_1(p_1, p_1', p_2, p_2'), \tag{5}$$

wo R_1 wieder eine rationale Funktion mit von u_1 und u_2 unabhängigen Koeffizienten bedeutet.

Durch Differentiation der Gleichung (5) nach u_1 kommt sodann

$$\wp'(u_1 + u_2) = \frac{\partial R_1}{\partial p_1} \cdot p_1' + \frac{\partial R_1}{\partial p_1'} \cdot \wp''(u_1) = R_2(p_1, p_1', p_2, p_2'), \tag{6}$$

wobei von der Gleichung $\wp''(u_1) = 6p_1^2 - \frac{1}{2}g_2$ Gebrauch gemacht ist. Tragen wir die Ausdrücke von (5) und (6) in (4) ein, so erhalten wir etwa

$$f(u_1 + u_2) = R_3(p_1, p_1', p_2, p_2'). \tag{7}$$

Diese Gleichung kombinieren wir endlich mit den folgenden:

$$(8)\quad \begin{cases} f(u_1) = R(p_1, p_1'), & f(u_2) = R(p_2, p_2'), \\ p_1'^2 = 4p_1^3 - g_2 p_1 - g_3, & p_2'^2 = 4p_2^3 - g_2 p_2 - g_3. \end{cases}$$

Aus den fünf Gleichungen (7) und (8) ergibt sich dann durch Elimination der vier Größen p_1, p_1', p_2, p_2' eine Gleichung der Gestalt

$$G(f(u_1 + u_2), f(u_1), f(u_2)) = 0,$$

womit unser Satz 3 bewiesen ist.

Zu diesem Satze wollen wir noch folgendes bemerken. In seinen Vorlesungen über elliptische Funktionen pflegte *Weierstraß* von der Frage nach denjenigen analytischen Funktionen auszugehen, die ein algebraisches Additionstheorem besitzen, und zu beweisen, daß diejenigen unter diesen Funktionen, die eindeutig und transzendent sind, entweder rationale Funktionen einer Exponentialfunktion $e^{\frac{2\pi i u}{\omega}}$ oder elliptische Funktionen sind. Auf den Beweis dieses Satzes können wir aber hier nicht eingehen.

§ 11. Die Funktion $\zeta(u)$.

Wir wollen jetzt die Funktion $\zeta(u)$, als deren negativ genommene Ableitung $\wp(u)$ gewonnen wurde, einer näheren Untersuchung unterziehen.

Es war (§ 6, (8) und § 7, (7))

$$(1)\quad \zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right) = \frac{1}{u} - c_2 \frac{u^3}{3} - c_3 \frac{u^5}{5} - \cdots.$$

Aus der Entwicklung von $\zeta(u)$ am Nullpunkte ist ersichtlich, daß

$$(2)\quad \zeta(-u) = -\zeta(u),$$

also $\zeta(u)$ eine ungerade Funktion ist.

Wie verhält sich nun $\zeta(u)$ bei Vermehrung von u um eine der Perioden? Da

$$-\frac{d}{du}(\zeta(u + \omega_1) - \zeta(u)) = \wp(u + \omega_1) - \wp(u) = 0$$

ist, so ist $\zeta(u + \omega_1) - \zeta(u)$ eine Konstante, und aus analogem Grunde $\zeta(u + \omega_2) - \zeta(u)$ ebenfalls. Wir setzen

$$(3)\quad \zeta(u + \omega_1) = \zeta(u) + \eta_1, \quad \zeta(u + \omega_2) = \zeta(u) + \eta_2,$$

wo also η_1 und η_2 zwei Konstanten bedeuten, die wir leicht durch ω_1 und ω_2 ausdrücken können. Setzen wir nämlich in den Gleichungen (3)

für u resp. $-\frac{\omega_1}{2}$ und $-\frac{\omega_2}{2}$ ein und berücksichtigen, daß $\zeta(u)$ ungerade ist, so finden wir

$$(4) \qquad \eta_1 = 2\,\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad \eta_2 = 2\,\zeta\left(\frac{\omega_2}{2}\right),$$

Gleichungen, deren rechte Seiten, gemäß (1), nur noch ω_1 und ω_2 enthalten.

Durch wiederholte Anwendung der Gleichungen (3) ergibt sich offenbar

$$(5) \qquad \zeta(u + m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2) = \zeta(u) + m_1\,\eta_1 + m_2\,\eta_2,$$

wenn m_1, m_2 irgend zwei ganze Zahlen bezeichnen. D. h.

Bei Vermehrung des Argumentes u um eine Periode $w = m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2$ vermehrt sich die Funktion $\zeta(u)$ um eine Konstante $\eta = m_1\,\eta_1 + m_2\,\eta_2$, die gerade so aus η_1, η_2 abgeleitet ist, wie die Periode w aus ω_1, ω_2.

Zwischen den Größen η_1, η_2 und ω_1, ω_2 besteht eine wichtige Relation, die man auf folgende Weise erhält. In einem Periodenparallelogramm (u_0) besitzt $\zeta(u)$ nur einen Pol mit dem Residuum 1. Demnach ist

$$\int\limits_{(u_0)} \zeta(u)\,du$$

$$= \int\limits_{u_0}^{u_0+\omega_2} [\zeta(u+\omega_1) - \zeta(u)]\,du - \int\limits_{u_0}^{u_0+\omega_1} [\zeta(u+\omega_2) - \zeta(u)]\,du = 2\pi i$$

oder, gemäß den Gleichungen (3),

$$(6) \qquad \eta_1\,\omega_2 - \eta_2\,\omega_1 = 2\pi i.$$

§ 12. Darstellung der elliptischen Funktionen durch $\zeta(u)$.

Die Funktion $\zeta(u-a)$ hat an der Stelle $u = a$ und den zu ihr kongruenten Stellen, d. h. also an jeder Stelle des Systems $[a]$, einen einfachen Pol. Bei $u = a$ gilt nach (1) des vorigen Paragraphen die Entwicklung

$$1) \qquad \zeta(u-a) = \frac{1}{u-a} + \mathfrak{P}(u-a).$$

Sei nun $f(u)$ eine elliptische Funktion mit den Perioden ω_1, ω_2. In irgendeinem Periodenparallelogramm (u_0) habe $f(u)$ nur einfache Pole $a_1, a_2, \ldots, a_r$ mit den zugehörigen Residuen $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Da die Summe dieser Residuen verschwindet, ist

$$\varphi(u) = A_1\,\zeta(u-a_1) + A_2\,\zeta(u-a_2) + \cdots + A_r\,\zeta(u-a_r)$$

eine Funktion, welche die Perioden ω_1, ω_2 besitzt. Denn vermehren wir u z. B. um ω_1, so kommt nach Gleichung (3) in § 11

$$\varphi(u+\omega_1) = \varphi(u) + \eta_1 A_1 + \eta_1 A_2 + \cdots + \eta_1 A_r = \varphi(u).$$

Außerdem hat zufolge (1) die Funktion $\varphi(u)$ dieselben Pole mit denselben Residuen im Periodenparallelogramm (u_0) wie $f(u)$, und die Differenz $f(u) - \varphi(u)$ ist, da sie keinen Pol besitzt, eine Konstante. In der somit geltenden Gleichung

$$(2)\quad f(u) = A + A_1\zeta(u - a_1) + A_2\zeta(u - a_2) + \dots + A_r\zeta(u - a_r),$$

in der A eine Konstante bezeichnet, dürfen wir a_i auch durch irgendeine zu a_i kongruente Zahl ersetzen. Denn nach Gleichung (5) in § 11 kommt dies nur darauf hinaus, daß A durch eine andere Konstante ersetzt wird. Es gilt demnach der

Satz 1. *Besitzt $f(u)$ nur einfache Pole und bilden*

$$a_1, a_2, \dots, a_r$$

ein vollständiges System dieser Pole mit den zugehörigen meromorphen Teilen

$$\frac{A_1}{u - a_1}, \quad \frac{A_2}{u - a_2}, \quad \dots, \quad \frac{A_r}{u - a_r},$$

so ist

$$f(u) = A + A_1\zeta(u - a_1) + A_2\zeta(u - a_2) + \dots + A_r\zeta(u - a_r),$$

wo A eine geeignet zu wählende Konstante bedeutet.

Diese Gleichung stellt, da

$$(3)\qquad \zeta(u - a) = \frac{1}{u - a} + \sum{}' \left(\frac{1}{u - a - w} + \frac{1}{w} + \frac{u - a}{w^2}\right)$$

ist, offenbar die *Partialbruchzerlegung* von $f(u)$ vor.

Betrachten wir z. B. die Funktion

$$f(u) = \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)} = \frac{d}{du}\log(\wp(u) - \wp(v)),$$

wobei wir unter v ein beliebig fixiertes Argument verstehen, welches zunächst inkongruent zu $-v$ vorausgesetzt wird, also keiner vollen oder halben Periode kongruent ist, so bilden die Punkte

$$v, \ -v, \ 0$$

ein vollständiges System von Polen von $f(u)$ mit den bezüglichen meromorphen Teilen

$$\frac{1}{u - v}, \quad \frac{1}{u + v}, \quad \frac{-2}{u}.$$

Denn an den Stellen $u = v, -v$ wird $\wp(u) - \wp(v)$ von der ersten Ordnung Null und an der Stelle $u = 0$ von der zweiten Ordnung unendlich. Nach Satz 1 ist daher

$$(4)\qquad \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)} = A + \zeta(u - v) + \zeta(u + v) - 2\zeta(u).$$

Ersetzen wir hier u durch $-u$, so kommt, da $\wp(u)$ gerade, $\wp'(u)$ und $\zeta(u)$ ungerade Funktionen sind,

$$(5)\qquad -\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(v)} = A - \zeta(u+v) - \zeta(u-v) + 2\zeta(u).$$

Durch Addition von (4) und (5) erkennt man, daß $A = 0$ ist.

Vertauschen wir in (4) u mit v und addieren die dadurch entstehende Gleichung zu (4), so kommt

$$(6)\qquad \frac{1}{2}\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)} = \zeta(u+v) - \zeta(u) - \zeta(v),$$

eine Gleichung, die wir als *Additionstheorem der Funktion* $\zeta(u)$ bezeichnen wollen.

Durch Differentiation dieser Gleichung nach u oder v ergibt sich das Additionstheorem der $\wp$-Funktion in den neuen Formen

$$(7)\qquad \wp(u+v) = \wp(u) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)$$
$$= \wp(v) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right).$$

Betrachten wir nun den Fall, wo $f(u)$ Pole von beliebiger Vielfachheit besitzt. Sei a irgendein Pol von $f(u)$, so können wir den zugehörigen meromorphen Teil von $f(u)$ in der Form ansetzen:

$$(8)\qquad \frac{A}{u-a} - \frac{A'}{(u-a)^2} + \frac{2!\,A''}{(u-a)^3} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!\,A^{(k-1)}}{(u-a)^k}.$$

Nach (3) besitzt nun

$$A\,\zeta(u-a) + A'\,\zeta'(u-a) + A''\,\zeta''(u-a) + \cdots + A^{(k-1)}\,\zeta^{(k-1)}(u-a)$$

denselben meromorphen Teil an der Stelle a, wie $f(u)$. Und hieraus schließen wir den

Satz 2. *Eine beliebige elliptische Funktion $f(u)$ läßt sich darstellen in der Form*

$$(9)\qquad f(u) = C + \sum_a \{A\,\zeta(u-a) + A'\,\zeta'(u-a) + A''\,\zeta''(u-a) + \cdots$$
$$+ A^{(k-1)}\,\zeta^{(k-1)}(u-a)\},$$

wobei die Summe zu erstrecken ist über die verschiedenen in einem Periodenparallogramm befindlichen Pole a der Funktion, die dem einzelnen Pole entsprechenden Konstanten A, A', ... dem in die Form (8) *gesetzten meromorphen Teile von $f(u)$ zu entnehmen sind und C eine Konstante bedeutet.*

Die Ableitungen von ζ können natürlich durch die $\wp$-Funktion und ihre Ableitungen ausgedrückt werden, wodurch (9) die Gestalt

$$(9')\qquad f(u) = C + \sum_a \{A\,\zeta(u-a) - A'\,\wp(u-a) - A''\,\wp'(u-a) - \cdots$$
$$- A^{(k-1)}\,\wp^{(k-2)}(u-a)\}$$

erhält.

§ 13. Die Funktion $\sigma(u)$.

Integrieren wir

$$(1)\qquad \zeta(u) - \frac{1}{u} = \Sigma'\left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right)$$

auf einem den Nullpunkt mit irgendeinem Punkte u verbindenden Wege, so entsteht

$$(1')\qquad \int_0^u \left(\zeta(u) - \frac{1}{u}\right) du = \Sigma'\left(\log\left(1 - \frac{u}{w}\right) + \frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}\right),$$

wobei der Logarithmus den ganz bestimmten Wert

$$\log\left(1 - \frac{u}{w}\right) = \int_0^u \frac{du}{u-w}$$

vorstellt. Der gewählte Integrationsweg muß dabei nur der einen Bedingung genügen, daß er die von Null verschiedenen Periodenpunkte w vermeidet.

Nach den allgemeinen Sätzen der Funktionentheorie[1]) stellt nun das unendliche Produkt

$$(2)\qquad \sigma(u) = u\,\Pi'\left\{\left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{+\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2}\right\}$$

eine ganze Funktion von u vor, welche die Periodenpunkte zu einfachen Nullstellen besitzt. Die Gleichung (1′) läßt sich so schreiben:

$$(3)\qquad \int_0^u \left(\zeta(u) - \frac{1}{u}\right) du = \log\frac{\sigma(u)}{u},$$

und die logarithmische Differentiation von $\sigma(u)$ führt auf die Funktion $\zeta(u)$ zurück:

$$(4)\qquad \zeta(u) = \frac{d\log\sigma(u)}{du} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}.$$

Hiermit ist $\zeta(u)$ und auch

$$(5)\qquad \wp(u) = -\zeta'(u) = -\frac{d^2\log\sigma(u)}{du^2} = \frac{\sigma'^2(u) - \sigma(u)\,\sigma''(u)}{\sigma^2(u)}$$

durch die ganze (transzendente) Funktion $\sigma(u)$ ausgedrückt.

Die Gleichungen (4) und (5) stellen die meromorphen Funktionen $\zeta(u)$ und $\wp(u)$ als Quotienten ganzer Funktionen dar.

Wir wollen nun die Funktion $\sigma(u)$ näher untersuchen.

[1]) Vgl. Erster Abschnitt 6. Kap. § 11. (A. d. H.)

Was zunächst ihre Entwicklung an der Stelle $u = 0$ angeht, von der wir von vornherein wissen, daß sie für jeden endlichen Wert von u konvergieren muß, so erhalten wir vermöge

$$\zeta(u) - \frac{1}{u} = -c_2 \frac{u^3}{3} - c_3 \frac{u^5}{5} - \ldots$$

aus Gleichung (3)

$$(6) \quad \sigma(u) = u e^{-c_2 \frac{u^4}{12} - c_3 \frac{u^6}{30} - \ldots} = u \left[1 - u^4 \mathfrak{P} + \frac{u^8}{2!} \mathfrak{P}^2 - \frac{u^{12}}{3!} \mathfrak{P}^3 + - \ldots\right],$$

wobei $\mathfrak{P}$ die Potenzreihe

$$(7) \qquad \mathfrak{P} = \frac{c_2}{12} + \frac{c_3}{30} u^2 + \ldots + \frac{c_n}{2n(2n-1)} u^{2n-4} + \ldots$$

bedeutet. Berücksichtigen wir, daß nach § 7, Satz 3 $c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$ ganze rationale Funktionen von g_2 und g_3 mit rationalen Zahlenkoeffizienten sind, so erhalten wir aus (6) den

Satz 1. *Die Entwicklung von $\sigma(u)$ an der Stelle $u = 0$ hat die Gestalt*

$$(8) \qquad \sigma(u) = u + k_2 u^5 + k_3 u^7 + \ldots,$$

wobei die Koeffizienten ganze rationale Funktionen von g_2 und g_3 mit rationalen Zahlenkoeffizienten sind.

Die Rechnung gibt für die ersten beiden Koeffizienten die Werte

$$(9) \qquad k_2 = -\frac{c_2}{12} = -\frac{g_2}{240}, \quad k_3 = -\frac{c_3}{30} = -\frac{g_3}{840}.$$

Die Entwicklung (8) zeigt, daß $\sigma(u)$ eine ungerade Funktion ist:

Satz 2. *Es ist $\sigma(-u) = -\sigma(u)$.*

Wie verhält sich nun $\sigma(u)$ bei Vermehrung von u um eine Periode

$$(10) \qquad w = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 ?$$

Wir wissen, daß

$$\zeta(u + w) = \zeta(u) + \eta \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma'(u+w)}{\sigma(u+w)} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + \eta$$

ist, wenn wir zur Abkürzung

$$(11) \qquad \eta = m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2$$

setzen. Durch Integration ergibt sich demnach

$$\log \sigma(u + w) = \log \sigma(u) + \eta u + c,$$

oder

$$\sigma(u + w) = e^{\eta u + c} \sigma(u),$$

eine Gleichung, die wir in der Form

$$\sigma(u + w) = C \cdot e^{\eta\left(u + \frac{w}{2}\right)} \sigma(u)$$

schreiben wollen, wobei C eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet. Um C zu berechnen, lassen wir u in den Wert $-\frac{w}{2}$ übergehen und erhalten

$$C = \left[\frac{\sigma(u+w)}{\sigma(u)}\right]_{u=-\frac{w}{2}} = \frac{\sigma\left(\frac{w}{2}\right)}{\sigma\left(-\frac{w}{2}\right)}.$$

Ist nun $\frac{w}{2}$ keine Periode, d. h. sind m_1 und m_2 nicht beide gerade Zahlen, so ist demnach $C = -1$. Wenn dagegen $\frac{w}{2}$ eine Periode ist, also m_1 und m_2 beide gerade sind, so erscheint C in der Form $\frac{0}{0}$, weil dann $\sigma\left(\frac{w}{2}\right)$ verschwindet. Dann wird also

$$C = \frac{\sigma'\left(\frac{w}{2}\right)}{\sigma'\left(-\frac{w}{2}\right)} = +1,$$

weil $\sigma'(u)$ eine gerade Funktion ist. Demnach gilt

Satz 3. *Sind m_1 und m_2 ganze Zahlen und wird*

$$w = m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \qquad \eta = m_1\eta_1 + m_2\eta_2$$

gesetzt, so besteht die Gleichung

$$\sigma(u+w) = \varepsilon \cdot e^{\eta\left(u+\frac{w}{2}\right)}\sigma(u), \tag{12}$$

wobei $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ ist, je nachdem $\frac{1}{2}w$ eine Periode ist oder nicht.

Da $m_1 + m_2 + m_1 m_2$ nur dann gerade ist, wenn m_1 und m_2 es sind, so kann ε durch

$$\varepsilon = (-1)^{m_1+m_2+m_1 m_2}$$

ausgedrückt werden.

Aus Satz 3 folgt speziell, daß

$$\begin{cases} \sigma(u+\omega_1) = -e^{\eta_1\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)}\sigma(u), \\ \sigma(u+\omega_2) = -e^{\eta_2\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right)}\sigma(u) \end{cases} \tag{13}$$

ist, aus welchen Gleichungen man durch wiederholte Anwendung derselben die allgemeine Gleichung (12) wieder erhalten kann.

Betrachten wir noch den Quotienten

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(u-b)}{\sigma(u-a)}, \tag{14}$$

unter a und b irgend zwei Konstanten verstanden, so erhalten wir für

sein Verhalten bei Vermehrung von u um die Periode w aus (12) offenbar

$$(15) \qquad \varphi(u+w) = e^{\eta(a-b)}\varphi(u).$$

Der Quotient $\varphi(u)$ wird also dabei mit der Konstanten $e^{\eta(a-b)}$ multipliziert.

§ 14. Darstellung der elliptischen Funktionen durch die Funktion $\sigma(u)$.

Ist $f(u)$ eine elliptische Funktion r^{ten} Grades und bilden $b_1, b_2, \ldots, b_r$ ein vollständiges System von Nullstellen, $a_1, a_2, \ldots, a_r$ ein vollständiges System von Polen dieser Funktion, so ist nach § 5, Satz 5

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_r = a_1 + a_2 + \cdots + a_r + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 .$$

Nun kann a_r durch $a_r + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ ersetzt werden, d. h. $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ bilden gerade so gut wie $a_1, a_2, \ldots, a_r$ ein vollständiges System von Polen von $f(u)$.

Wir können also die Nullstellen und Pole so wählen, daß

$$(1) \qquad b_1 + b_2 + \cdots + b_r = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$$

ist. Ist dies geschehen, so wird

$$(2) \qquad F(u) = \frac{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\,\ldots\,\sigma(u-b_r)}{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\,\ldots\,\sigma(u-a_r)}$$

die Perioden ω_1 und ω_2 besitzen. Denn nach Gleichung (15) des vorigen Paragraphen wird

$$F(u+w) = e^{\eta(a_1-b_1)+\eta(a_2-b_2)+\cdots+\eta(a_r-b_r)}F(u) = F(u),$$

zufolge der Gleichung (1). Nun hat $f(u)$ genau dieselben Nullstellen und Pole wie $F(u)$. Der Quotient beider Funktionen besitzt also keinen Pol und ist folglich eine Konstante. Daher gilt der

Satz 1. *Jede elliptische Funktion $f(u)$ läßt sich darstellen in der Form*

$$(3) \qquad f(u) = C\cdot\frac{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_r)}{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_r)},$$

wobei C eine Konstante, $b_1, b_2, \ldots, b_r$ ein vollständiges System von Nullstellen, $a_1, a_2, \ldots, a_r$ ein vollständiges System von Polen der Funktion $f(u)$ bezeichnen, die so gewählt sind, daß

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_r = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$$

ist.

Betrachten wir beispielsweise die Funktion

unter v ein beliebig fixiertes Argument verstanden, so können wir

$$b_1 = v, \quad b_2 = -v, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0$$

wählen und erhalten

$$\wp(u) - \wp(v) = C \cdot \frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)}.$$

Um die Konstante C zu bestimmen, multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit u^2 und lassen dann u in Null übergehen. Auf diese Weise kommt

$$1 = C \cdot \sigma(-v)\,\sigma(v).$$

Also besteht der

Satz 2. *Für irgend zwei Argumente u und v gilt die Gleichung*

$$\wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)}. \tag{4}$$

Aus dieser Gleichung folgt leicht der

Satz 3. *Für die mit den Perioden ω_1 und ω_2 gebildet Funktion $\wp(u)$ bilden ω_1 und ω_2 ein Paar primitiver Perioden, d. h. $\wp(u)$ besitzt keine anderen als die Perioden $w = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$.*

Ist nämlich w irgendeine Periode von $\wp(u)$, so ist

$$\wp(u+w) - \wp(u) = -\frac{\sigma(2u+w)\,\sigma(w)}{\sigma^2(u+w)\,\sigma^2(u)} = 0$$

und zwar für alle Werte von u. Folglich muß $\sigma(w) = 0$, also w eine der Nullstellen von $\sigma(u)$, oder

$$w = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

sein, was zu beweisen war.

Nehmen wir auf beiden Seiten der Gleichung (4) den Logarithmus und differentiieren sodann nach u, so kommen wir auf die früher (§ 12) bewiesene Gleichung

$$\frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)} = \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta(u),$$

aus welcher wir das Additionstheorem der Funktion $\zeta(u)$ erhielten.

Eine andere interessante Folgerung aus der Gleichung (4) betrifft die Funktion $\wp'(u)$.

Lassen wir nämlich in der Gleichung

$$\frac{\wp(u) - \wp(v)}{u - v} = -\frac{\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)} \cdot \frac{\sigma(u-v)}{u-v}$$

das Argument v in u übergehen, so kommt

$$\wp'(u) = -\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4(u)}. \tag{5}$$

Wenn wir hier $\wp(u)$ nach § 13, Gleichung (5) durch $\sigma(u)$ ausdrücken, erhalten wir nach leichter Rechnung das folgende bemerkenswerte Funktionaltheorem für die σ-Funktion:

$$\sigma(2u) = \sigma(u)[2\sigma'^3(u) - 3\sigma(u)\sigma'(u)\sigma''(u) + \sigma^2(u)\sigma'''(u)]. \tag{6}$$

Als weiteres Beispiel für den allgemeinen Satz 1 betrachten wir die Funktion $f(u) = \wp'(u)$. Hier können wir als Nullstellen und Pole die folgenden wählen:

$$b_1 = \frac{\omega_1}{2}, \quad b_2 = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad b_3 = \frac{\omega_2}{2}; \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

und erhalten dann

$$\wp'(u) = C \cdot \frac{\sigma\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(u + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)\sigma\left(u - \frac{\omega_2}{2}\right)}{\sigma^3(u)}. \tag{7}$$

Für die Konstante C ergibt sich, indem man mit u^3 multipliziert und sodann $u = 0$ setzt, der Wert

$$C = -\frac{2}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}. \tag{8}$$

§ 15. Die Funktionen $\wp(u)$, $\zeta(u)$, $\sigma(u)$ als Funktionen von u, ω_1, ω_2.

Die Funktionen $\wp(u)$, $\zeta(u)$, $\sigma(u)$ sind erst bestimmt, nachdem die Perioden ω_1 und ω_2 der Bedingung gemäß, daß $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ einen nicht reellen Wert besitzen soll, gewählt worden sind. Diese Funktionen sind also Funktionen von drei Argumenten u, ω_1, ω_2 und mögen als solche mit

$$\wp(u/\omega_1, \omega_2), \quad \zeta(u/\omega_1, \omega_2), \quad \sigma(u/\omega_1, \omega_2)$$

bezeichnet werden.

Die Definitionsgleichung von $\wp(u/\omega_1, \omega_2)$, nämlich

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right), \tag{1}$$

zeigt, daß diese Funktion homogen in den drei Argumenten ist. Denn für einen beliebigen Faktor λ gilt offenbar die Gleichung

$$\wp(\lambda u/\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \frac{1}{\lambda^2}\wp(u/\omega_1, \omega_2). \tag{2}$$

Analog finden wir aus den Definitionsgleichungen der ζ- und der σ-Funktion

$$\begin{cases} \zeta(\lambda u/\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \frac{1}{\lambda}\zeta(u/\omega_1, \omega_2), \\ \sigma(\lambda u/\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda\sigma(u/\omega_1, \omega_2). \end{cases} \tag{3}$$

Es gilt also der

Satz 1. *Die Funktionen $\wp$, ζ, σ sind homogene Funktionen der drei Argumente u, ω_1, ω_2 von den bezüglichen Graden -2, -1, $+1$.*

Infolgedessen lassen sich diese Funktionen leicht auf solche von nur zwei Argumenten zurückführen.

Wählen wir nämlich in den Gleichungen (2) und (3) für λ den Wert $\frac{1}{\omega_1}$, so ergibt sich

$$(4) \qquad \wp(u|\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\omega_1^2}\wp\left(\frac{u}{\omega_1}\Big|1, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right),$$

$$\zeta(u|\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\omega_1}\zeta\left(\frac{u}{\omega_1}\Big|1, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right), \quad \sigma(u|\omega_1, \omega_2) = \omega_1\sigma\left(\frac{u}{\omega_1}\Big|1, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right),$$

und hiermit sind die Funktionen auf solche der beiden Argumente $\frac{u}{\omega_1}$, $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ zurückgeführt.

Wir wollen hier noch die Frage behandeln, wann identisch in der Variablen u

$$(5) \qquad \wp(u|\omega_1, \omega_2) = \wp(u|\omega_1', \omega_2')$$

ist, oder, was dasselbe ist, die Frage:

Wann ist die mit den Perioden ω_1, ω_2 gebildete Funktion $\wp(u)$ identisch mit derjenigen, die mit den Perioden ω_1', ω_2' gebildet ist?

Besteht die Gleichung (5), so sind ω_1, ω_2 sowohl wie auch ω_1', ω_2' primitive Perioden der Funktion $\wp(u)$, und es fallen daher die aus ω_1 und ω_2 abgeleiteten Perioden

$$(6) \qquad w = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

völlig zusammen mit den aus ω_1', ω_2' abgeleiteten

$$(7) \qquad w' = m_1'\omega_1' + m_2'\omega_2'.$$

Diese notwendige Bedingung für das Bestehen der Gleichung (5) ist auch hinreichend. Denn sind die Werte w in ihrer Gesamtheit identisch mit den Werten w', so sind auch nach Gleichung (1) die mit den Perioden ω_1, ω_2 bzw. ω_1', ω_2' gebildeten $\wp$-Funktionen identisch gleich.

Wir führen nun folgende Definition ein:

Zwei Größenpaare (ω_1, ω_2) und (ω_1', ω_2') ***heißen äquivalent, wenn*** *die aus dem einen Paare abgeleiteten Perioden w in ihrer Gesamtheit völlig zusammenfallen mit den aus dem andern Paare abgeleiteten Perioden w'.*

Es besteht also dann der

Satz 1. *Damit aus den Perioden ω_1, ω_2 dieselbe $\wp$-Funktion entspringt, wie aus den Perioden ω_1', ω_2', ist notwendig und hinreichend, daß die Größenpaare (ω_1, ω_2) und (ω_1', ω_2') äquivalent sind.*

Wir wollen jetzt die Bedingung, daß die Gesamtheit der Werte (6) mit der der Werte (7) identisch sein soll, näher betrachten, wobei wir nur die Voraussetzung machen wollen, daß der Quotient $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ keine rationale Zahl sei.

Sollen die w mit den w' zusammenfallen, so müssen jedenfalls Gleichungen folgender Gestalt bestehen:

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \tag{8}$$

$$\omega_1 = \alpha'\omega_1' + \beta'\omega_2', \quad \omega_2 = \gamma'\omega_1' + \delta'\omega_2', \tag{8'}$$

wobei $\alpha, \beta, \ldots, \delta'$ ganze Zahlen bedeuten. Tragen wir die Werte von ω_1', ω_2' aus (8) in (8') ein, so ergibt sich

$$\omega_1 = (\alpha'\alpha + \beta'\gamma)\omega_1 + (\alpha'\beta + \beta'\delta)\omega_2,$$
$$\omega_2 = (\gamma'\alpha + \delta'\gamma)\omega_1 + (\gamma'\beta + \delta'\delta)\omega_2,$$

und, da $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ keine rationale Zahl sein soll, müssen diese Gleichungen in ω_1, ω_2 identisch bestehen, d. h. es muß

$$\alpha'\alpha + \beta'\gamma = 1, \quad \alpha'\beta + \beta'\delta = 0, \quad \gamma'\alpha + \delta'\gamma = 0, \quad \gamma'\beta + \delta'\delta = 1$$

sein. Nach dem Determinanten-Multiplikationssatz folgt hieraus

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma') = 1$$

und daher

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1. \tag{9}$$

Umgekehrt: Bestehen die Gleichungen (8), wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen der Determinante ± 1 bedeuten, so erhalten wir durch Auflösung dieser Gleichungen

$$\omega_1 = \pm(\delta\omega_1' - \beta\omega_2'), \quad \omega_2 = \pm(-\gamma\omega_1' + \alpha\omega_2'),$$

und es ist klar, daß jede Zahl $w = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ auch in die Form $w' = m_1'\omega_1' + m_2'\omega_2'$ gesetzt werden kann und umgekehrt, daß also (ω_1, ω_2) und (ω_1', ω_2') äquivalente Paare sind.

Satz 2. *Unter der Voraussetzung, daß $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ nicht rational ist, ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Äquivalenz der Größenpaare (ω_1, ω_2) und $(\omega_1' \omega_2')$ das Bestehen zweier Gleichungen der Gestalt*

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2,$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen der Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

bedeuten.

Der Satz 1 bleibt offenbar gültig, wenn wir in seinem Ausspruch an die Stelle der $\wp$-Funktion die ζ-Funktion oder die σ-Funktion treten lassen. Denn, da $\wp(u) = -\zeta'(u)$ und $\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$ ist, so wird

die Gleichung (5) gelten, wenn aus dem Paare (ω_1, ω_2) dieselbe Funktion $\zeta(u)$ oder $\sigma(u)$ entspringt wie aus dem Paare (ω_1', ω_2').

Da die Entwicklungen der Funktionen $\wp(u)$, $\zeta(u)$, $\sigma(u)$ an der Stelle $u = 0$ Koeffizienten besitzen, die ganze rationale Funktionen von g_2 und g_3 sind, so kann man die Funktionen auch als Funktionen von u, g_2, g_3 betrachten. Dabei ist allerdings die Variabilität der Argumente g_2, g_3 auf solche Werte beschränkt, für welche die Gleichungen

$$(10) \qquad g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{w^4}, \quad g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{w^6} \qquad (w = m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$$

durch ein Wertepaar (ω_1, ω_2) befriedigt werden kann, für welches $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ einen nicht reellen Wert besitzt. Da durch die Werte von g_2 und g_3 die Entwicklung von $\wp(u)$ an der Stelle $u = 0$ völlig bestimmt ist und also auch die Funktion $\wp(u)$ selbst, so werden zwei Lösungen (ω_1, ω_2) und (ω_1', ω_2') der Gleichungen (10) nach Satz 1 notwendig äquivalent sein. Die Theorie der Gleichungen (10) werden wir später im 4. Kapitel eingehend behandeln.

Tabellarische Übersicht zum 1. Kapitel.

$$(1) \qquad \begin{cases} \sigma(u) = u \prod{}' \left\{ \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2} \right\} \\ \zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum{}' \left\{ \frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right\} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} \\ \wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left\{ \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\} = -\frac{d}{du}\left(\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\right). \end{cases} \qquad (w = m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \sigma(u) = u + k_2 u^5 + k_3 u^7 + \ldots + k_n u^{2n+1} + \ldots \\ \zeta(u) = \frac{1}{u} - \frac{c_2}{3} u^3 - \frac{c_3}{5} u^5 - \ldots - \frac{c_n}{2n-1} u^{2n-1} - \ldots \\ \wp(u) = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \ldots + c_n u^{2n-2} + \ldots . \end{cases}$$

Die Koeffizienten c_n sind ganze rationale Funktionen von g_2, g_3 mit positiven rationalen Koeffizienten, die Koeffizienten k_n ganze rationale Funktionen von g_2, g_3 mit rationalen Koeffizienten:

$$c_2 = \frac{1}{20} g_2, \quad c_3 = \frac{1}{28} g_3, \ldots, \quad k_2 = -\frac{1}{240} g_2, \quad k_3 = -\frac{1}{840} g_3, \ldots .$$

$$(3) \qquad \begin{cases} g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{w^4}, \quad g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{w^6} \\ e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \\ \eta_1 = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad \eta_2 = 2\zeta\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \\ \eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i. \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3 = 4(\wp(u)-e_1)(\wp(u)-e_2)(\wp(u)-e_3) \\ \wp''(u) = 6\wp^2(u) - \frac{1}{2}g_2. \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \wp(u+w) = \wp(u) \\ \zeta(u+w) = \zeta(u) + \eta, \\ \sigma(u+w) = \varepsilon\cdot e^{\eta\left(u+\frac{w}{2}\right)}\sigma(u). \end{cases}$$

$w = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, $\eta = m_1\eta_1 + m_2\eta_2$, $\varepsilon = +1$ oder -1, je nachdem m_1, m_2 beide gerade sind oder nicht.

$$(6)\quad \begin{cases} \wp(u) - \wp(v) = -\dfrac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)} \\ \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta(u) = \dfrac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(v)}. \\ \zeta(u+v) - \zeta(u) - \zeta(v) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)} \\ \wp(u+v) = -\wp(u) - \wp(v) + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right)^2. \end{cases}$$

Darstellung der meromorphen Funktionen $f(u)$ mit den Perioden ω_1, ω_2 durch $\sigma(u)$, $\zeta(u)$, $\wp(u)$:

$$(7)\quad \begin{cases} f(u) = C\cdot\dfrac{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_r)}{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_r)} \quad (b_1+b_2+\ldots+b_r = a_1+a_2+\ldots+a_r) \\ f(u) = C + \sum\limits_a \{A\zeta(u-a) + A'\zeta'(u-a) + \ldots + A^{(k-1)}\zeta^{(k-1)}(u-a)\} \\ f(u) = R(\wp(u), \wp'(u)) = R_1(\wp(u)) + \wp'(u)\,R_2(\wp(u)). \end{cases}$$

2. Kapitel.

Die Theta-Funktionen.

Wir werden jetzt die im ersten Kapitel betrachteten Funktionen durch außerordentlich stark konvergierende Reihen, die sogenannten *Thetareihen*, darstellen. Diese Darstellung beruht auf einem allgemeinen Satze, den wir im § 1 voraufschicken.

§ 1. Darstellung ganzer Funktionen mit einer gegebenen Periode.

Es sei $\varphi(u)$ eine ganze Funktion von u mit der von Null verschiedenen Periode ω. Indem wir

$$(1)\qquad e^{\frac{2\pi i u}{\omega}} = \zeta$$

setzen, wollen wir untersuchen, wie sich $\varphi(u)$ als Funktion von ζ verhält. Dabei möge u durch die Punkte einer ersten Ebene, der u-Ebene, ζ durch die Punkte einer zweiten Ebene, der ζ-Ebene, repräsentiert werden. Fixieren wir in der letzteren einen vom Nullpunkt verschiedenen, im Endlichen liegenden Punkt

$$\zeta = a,$$

so entsprechen diesem in der u-Ebene die Punkte

$$u = \frac{\omega}{2\pi i}(\log a + m \cdot 2\pi i) = \frac{\omega}{2\pi i}\log a + m\omega,$$

wo $\log a$ den Hauptwert des Logarithmus bezeichnet und m alle ganzen Zahlen durchläuft. Da $\varphi(u)$ die Periode ω besitzt, so entspricht dem fixierten Werte $\zeta = a$ der eine Wert

$$\varphi(u) = \varphi\left(\frac{\omega}{2\pi i}\log a\right).$$

D. h. es ist $\varphi(u)$, angesehen als Funktion von ζ, eine *eindeutige* Funktion in derjenigen Domäne, welche aus der ganzen ζ-Ebene mit Ausschluß der Punkte $\zeta = 0$ und $\zeta = \infty$ besteht.

Wir zeigen nun leicht, daß diese Funktion in der genannten Domäne regulär ist. Seien nämlich a und b entsprechende Punkte der ζ- und der u-Ebene, so daß

$$e^{\frac{2\pi i b}{\omega}} = a \tag{2}$$

ist. Liegt dann u in der Umgebung von b, so liegt ζ in der Umgebung von a, und aus (1) und (2) folgt

$$e^{\frac{2\pi i(u-b)}{\omega}} = \frac{\zeta}{a} = 1 + \frac{\zeta - a}{a}$$

und also

$$u - b = \frac{\omega}{2\pi i}\log\left(1 + \frac{\zeta - a}{a}\right) = \frac{\omega}{2\pi i}\left(\frac{\zeta - a}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta - a}{a}\right)^2 + \ldots\right) = \mathfrak{P}(\zeta - a).$$

Aus der Entwicklung von $\varphi(u)$ in der Umgebung von $u = b$:

$$\varphi(u) = c_0 + c_1(u - b) + c_2(u - b)^2 + \ldots$$

ergibt sich nun

$$\varphi(u) = c_0 + c_1\mathfrak{P}(\zeta - a) + c_2(\mathfrak{P}(\zeta - a))^2 + \ldots = \mathfrak{P}_1(\zeta - a),$$

so daß in der Tat $\varphi(u)$ für die Umgebung von $\zeta = a$ durch eine gewöhnliche Potenzreihe darstellbar ist.

Beschreiben wir jetzt in der ζ-Ebene um den Nullpunkt als Mittelpunkt einen Kreis mit beliebig klein gewähltem Radius und einen zweiten Kreis mit beliebig großem Radius, so besteht nach dem *Laurent*schen Satze für die Punkte in dem von beiden Kreisen begrenzten Kreisring die Darstellung von $\varphi(u)$:

$$\varphi(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n \zeta^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{\frac{2\pi i u}{\omega}n}. \tag{3}$$

Es gilt also der

Satz: *Jede ganze Funktion $\varphi(u)$ von u mit der Periode ω läßt sich gemäß (3) durch eine beständig konvergierende Potenzreihe darstellen, die nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i u}{\omega}}$ mit positiven und negativen ganzzahligen Exponenten fortschreitet.*

§ 2. Bezeichnungen.

Wir betrachten, wie im ersten Kapitel, Funktionen der Variablen u und der Größen ω_1, ω_2, wollen dabei aber einige neue Bezeichnungen gebrauchen, an denen wir ein für allemal festhalten werden. Wir setzen nämlich

(1) $$\omega_1 = 2\,\omega, \quad \omega_2 = 2\,\omega',$$

so daß also ω und ω' die *halben* Perioden $\frac{1}{2}\omega_1$ bzw. $\frac{1}{2}\omega_2$ bedeuten; ferner sei

(2) $$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega'}{\omega},$$

(3) $$h = e^{i\pi\tau},$$

(4) $$\eta_1 = 2\,\eta, \quad \eta_2 = 2\,\eta',$$

(5) $$v = \frac{u}{2\,\omega},$$

(6) $$z = e^{i\pi v} = e^{\frac{i\pi u}{2\omega}}.$$

Die Gleichung $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\,\pi i$ stellt sich in den neuen Bezeichnungen so dar:

(7) $$\eta\omega' - \eta'\omega = \tfrac{1}{2}\pi i.$$

Die Größen ω_1 und ω_2 sollen der Bedingung genügen, daß der *positive* Umlaufungssinn des Periodenparallelogramms (0) durch die Eckenfolge $0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2$ gegeben ist. Dies hat zur Folge, daß der Punkt ω_2 auf derselben Seite der Geraden $0 \ldots \omega_1$ liegt wie der Punkt $i\omega_1$. Es ist daher (vgl. die Figur 66)

$$\omega_2 = a + b = r\omega_1 + s \cdot i\omega_1,$$

wo r und s reell sind und $s > 0$ ist. Daher kommt

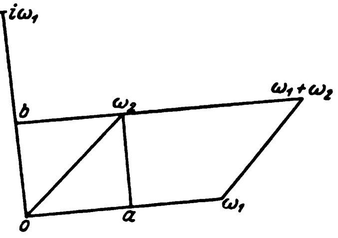


Fig. 66.

(8) $$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = r + is, \quad s > 0$$

und

(9) $$|h| = |e^{i\pi(r+is)}| = e^{-\pi s} < 1.$$

Wir bemerken noch, daß wir für jeden beliebigen Wert des Exponenten ϱ unter

$$h^\varrho \text{ bzw. } z^\varrho$$

stets

$$e^{i\pi\tau\varrho} \text{ bzw. } e^{i\pi v\varrho}$$

verstehen werden.

§ 3. Die Funktion $\vartheta_1(v)$.

Das Verhalten der Funktion $\sigma(u)$ bei Vermehrung von u um ω_1 oder ω_2 (Kap. 1, § 13, (13)) drückt sich in den neuen Bezeichnungen so aus:

$$(1) \qquad \sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma(u), \qquad \sigma(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma(u).$$

Wir wollen nun die Konstanten a und b so bestimmen, daß

$$\varphi(u) = e^{au^2+bu}\sigma(u)$$

die Periode 2ω besitzt. Da

$$\frac{\varphi(u+2\omega)}{\varphi(u)} = -e^{2(2a\omega+\eta)(u+\omega)+b\cdot 2\omega}, \quad \frac{\varphi(u+2\omega')}{\varphi(u)} = -e^{2(2a\omega'+\eta')(u+\omega')+b\cdot 2\omega'}$$

wird, so erreichen wir dies, wenn wir

$$a = -\frac{\eta}{2\omega}, \qquad b = \frac{\pi i}{2\omega}$$

wählen. Zugleich wird dann, wie eine leichte Rechnung ergibt, unter Berücksichtigung von § 2, (7),

$$\frac{\varphi(u+2\omega')}{\varphi(u)} = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(u+\omega')+\pi i\frac{\omega'}{\omega}} = -e^{-\frac{\pi i u}{\omega}} = -z^{-2}.$$

Demnach finden wir:

Satz 1. *Für die Funktion*

$$(2) \qquad \varphi(u) = e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}+\frac{\pi i u}{2\omega}}\sigma(u) = e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\cdot z\sigma(u)$$

gelten die Gleichungen

$$(3) \qquad \varphi(u+2\omega) = \varphi(u), \qquad \varphi(u+2\omega') = -z^{-2}\varphi(u).$$

Da nun $\varphi(u)$ eine ganze Funktion von u ist, so haben wir nach § 1

$$\varphi(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{\frac{2\pi i u}{2\omega}n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n z^{2n}, \quad \left(z = e^{\frac{i\pi u}{2\omega}}\right).$$

Tragen wir dies in die zweite Gleichung (3) ein, so wird

$$\varphi(u+2\omega') = \sum_n A_n z^{2n}h^{2n} = -\sum_n A_n z^{2n-2} = -\sum_n A_{n+1}z^{2n},$$

woraus durch Koeffizientenvergleichung

$$A_{n+1} = -h^{2n}A_n = -h^{(n+\frac{1}{2})^2-(n-\frac{1}{2})^2}A_n$$

oder

$$(4) \qquad (-1)^{n+1}h^{-(n+\frac{1}{2})^2}A_{n+1} = (-1)^n h^{-(n-\frac{1}{2})^2}A_n$$

folgt. Die linke Seite dieser Gleichung geht dadurch aus der rechten hervor, daß man n durch $n+1$ ersetzt. Hieraus schließt man, daß

$$(-1)^n h^{-(n-\frac{1}{2})^2} A_n$$

für jeden Index n *denselben* Wert besitzt. Nennen wir diesen Wert $C \cdot i$, so wird

$$\varphi(u) = C \cdot i \sum_n (-1)^n h^{(n-\frac{1}{2})^2} z^{2n},$$

wobei C eine Konstante bezeichnet.

Wir führen nun folgende dauernde Bezeichnung ein:

$$\text{(I)} \qquad \vartheta_1(v) = i \sum_n (-1)^n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} \cdot z^{2n-1}$$

und haben dann nach (2)

$$\sigma(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} z^{-1} \varphi(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} C \cdot \vartheta_1(v).$$

Zur Bestimmung der Konstanten C dividieren wir mit $u = 2\omega \cdot v$ und lassen dann $u = 0$ (und also auch $v = 0$) werden. Dadurch kommt, weil $\left(\frac{\vartheta_1(v)}{v}\right)_{v=0} = \vartheta_1{}'(0)$ ist,

$$1 = C \cdot \frac{\vartheta_1{}'(0)}{2\omega},$$

und also

$$\text{(II)} \qquad \sigma(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \cdot \frac{2\omega}{\vartheta_1{}'(0)} \cdot \vartheta_1(v), \quad \left(v = \frac{u}{2\omega}\right).$$

Die Reihe, welche $\vartheta_1(v)$ definiert, können wir noch etwas anders schreiben. Dabei wollen wir ein für allemal folgendes verabreden:

Der Summationsbuchstabe n soll stets alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, der Summationsbuchstabe g alle geraden natürlichen Zahlen $(2, 4, 6, \ldots)$ und der Summationsbuchstabe ν alle ungeraden natürlichen Zahlen $(1, 3, 5, \ldots)$. Dasselbe soll für die Buchstaben n, g, ν gelten, wenn dieselben als laufende Indizes bei einem unendlichen Produkte auftreten.

Nach dieser Festsetzung wird wegen (I)

$$\vartheta_1(v) = i\left\{\sum (-1)^{\frac{\nu+1}{2}} h^{\frac{\nu^2}{4}} z^{\nu} + \sum (-1)^{\frac{-\nu+1}{2}} h^{\frac{\nu^2}{4}} z^{-\nu}\right\},$$

da die Zahlen ν und $-\nu$ zusammen alle Zahlen $2n-1$ ausmachen. Da

$$(-1)^{\frac{\nu+1}{2}} = (-1)^{\nu} \cdot (-1)^{\frac{-\nu+1}{2}} = -(-1)^{\frac{-\nu+1}{2}}$$

und

$$z^{\nu} - z^{-\nu} = e^{\nu i \pi v} - e^{-\nu i \pi v} = 2i \sin(\nu \pi v)$$

ist, so kommt

$$(1') \quad \begin{cases} \vartheta_1(v) = 2\sum(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} h^{\frac{\nu^2}{4}} \sin(\nu\pi v) \\ \qquad = 2\left\{h^{\frac{1}{4}}\sin(\pi v) - h^{\frac{9}{4}}\sin(3\pi v) + h^{\frac{25}{4}}\sin(5\pi v) - + \ldots\right\}. \end{cases}$$

Die Funktion $\vartheta_1(v)$ nennen wir die *erste Thetafunktion*, die sie definierende Reihe (1) oder (1') die *erste Thetareihe*. Die Funktion ist eine ganze Funktion von v, die ungerade ist. Sie hängt außer von v noch von dem Periodenverhältnis τ ab, was wir nötigenfalls dadurch zum Ausdruck bringen werden, daß wir $\vartheta_1(v/\tau)$ statt $\vartheta_1(v)$ schreiben.

§ 4. Die Funktionen $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$.

Neben der Funktion $\vartheta_1(v)$ haben wir noch *drei weitere Thetafunktionen* einzuführen, die wir am besten an die von *Weierstrass* mit $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ bezeichneten Funktionen anknüpfen. Setzen wir in der Gleichung

$$(1) \qquad \wp(u) - \wp(u') = -\frac{\sigma(u+u')\,\sigma(u-u')}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(u')}$$

für u' eine *halbe* Periode

$$(2) \qquad \tilde{\omega} = m\omega + m'\omega',$$

so daß m und m' ganze Zahlen bedeuten, die nicht beide gerade sind, so ergibt sich

$$\wp(u) - \wp(\tilde{\omega}) = \frac{\sigma(u+\tilde{\omega})\,\sigma(\tilde{\omega}-u)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(\tilde{\omega})}.$$

Nun ist aber

$$\sigma(u + 2\tilde{\omega}) = -e^{2\tilde{\eta}(u+\tilde{\omega})}\sigma(u) \qquad (\tilde{\eta} = m\eta + m'\eta'),$$

und hieraus folgt, wenn u durch $u-\tilde{\omega}$ ersetzt wird,

$$\sigma(u+\tilde{\omega}) = -e^{2\tilde{\eta}u}\sigma(u-\tilde{\omega}) = e^{2\tilde{\eta}u}\sigma(\tilde{\omega}-u),$$

so daß man

$$(3) \qquad \wp(u) - \wp(\tilde{\omega}) = \left[\frac{e^{\tilde{\eta}u}\sigma(\tilde{\omega}-u)}{\sigma(u)\,\sigma(\tilde{\omega})}\right]^2$$

erhält. Hier nehmen wir nun sukzessive

$$m = 1,\ m' = 0; \quad m = 1,\ m' = 1; \quad m = 0,\ m' = 1,$$

setzen also der Reihe nach

$$\tilde{\omega} = \omega = \frac{\omega_1}{2}, \quad \tilde{\omega} = \omega + \omega' = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}, \quad \tilde{\omega} = \omega' = \frac{\omega_2}{2}.$$

Mit den Abkürzungen

$$(4) \quad \sigma_1(u) = e^{\eta u}\frac{\sigma(\omega-u)}{\sigma(\omega)}, \quad \sigma_2(u) = e^{(\eta+\eta')u}\frac{\sigma(\omega+\omega'-u)}{\sigma(\omega+\omega')}, \quad \sigma_3(u) = e^{\eta' u}\frac{\sigma(\omega'-u)}{\sigma(\omega')}$$

liefert dann (3) die Gleichungen

$$(5) \quad \wp(u) - e_1 = \left[\frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)}\right]^2, \quad \wp(u) - e_2 = \left[\frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}\right]^2, \quad \wp(u) - e_3 = \left[\frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)}\right]^2,$$

welche in Evidenz setzen, daß jede der drei Funktionen $\wp(u) - e_k$ nur *zweifache* Nullstellen und *zweifache* Pole besitzt.

Die durch die Gleichungen (4) definierten Funktionen $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ sind ganze Funktionen von u, und zwar gerade Funktionen, wie aus der Gleichung

$$e^{-\tilde{\eta} u} \sigma(u + \tilde{\omega}) = e^{\tilde{\eta} u} \sigma(\tilde{\omega} - u)$$

erhellt. Außerdem ist nach (4)

$$(6) \qquad \sigma_1(0) = \sigma_2(0) = \sigma_3(0) = 1.$$

Unter Berücksichtigung der letzteren Gleichungen und der Differentialgleichung von $\wp(u)$ folgt durch Multiplikation der Gleichungen (5) leicht

$$(7) \qquad \wp'(u) = -2 \cdot \frac{\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}.$$

§ 5. Die Funktionen $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_0(v)$.

Aus der Gleichung (II) in § 3, nämlich

$$(1) \qquad \sigma(u) = C \cdot e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right),$$

in welcher C eine Konstante, d. h. eine von u unabhängige Zahl bedeutet, erhalten wir leicht analoge Darstellungen für die Funktionen $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$.

Setzen wir, wie im vorigen Paragraphen,

$$(2) \qquad \tilde{\omega} = m\omega + m'\omega', \qquad \tilde{\eta} = m\eta + m'\eta',$$

so ergibt sich zunächst

$$e^{\tilde{\eta} u} \frac{\sigma(\tilde{\omega} - u)}{\sigma(\tilde{\omega})} = \frac{C}{\sigma(\tilde{\omega})} e^{\tilde{\eta} u + \eta \frac{(\tilde{\omega} - u)^2}{2\omega}} \vartheta_1\left(\frac{\tilde{\omega} - u}{2\omega}\right),$$

oder nach leichter Rechnung

$$(3) \qquad e^{\tilde{\eta} u} \frac{\sigma(\tilde{\omega} - u)}{\sigma(\tilde{\omega})} = \tilde{C} \cdot e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \cdot e^{(\tilde{\eta}\omega - \tilde{\omega}\eta)\frac{u}{\omega}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{\tilde{\omega} - u}{2\omega}\right)$$

$$= \tilde{C} \cdot e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} z^{-m'} \vartheta_1\left(\frac{m}{2} + \frac{m'}{2}\tau - v\right),$$

wo von der Gleichung

$$\tilde{\eta}\omega - \tilde{\omega}\eta = (m\eta + m'\eta')\omega - (m\omega + m'\omega')\eta = -m' \cdot \frac{\pi i}{2}$$

rauch gemacht ist und $\tilde{C}$ eine Konstante bedeutet. Die Gleichung
.tet sich in die drei Gleichungen

$$
(4) \quad \begin{cases}
\sigma_1(u) = C_1 e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \vartheta_1\left(\frac{1}{2} - v\right) \\
\sigma_2(u) = C_2 e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} z^{-1} \vartheta_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - v\right) \\
\sigma_3(u) = C_3 e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} z^{-1} \vartheta_1\left(\frac{\tau}{2} - v\right).
\end{cases}
$$

Benutzen wir hier die Gleichungen (I) und (I') von § 3, so kom

$$
\begin{aligned}
\vartheta_1(\tfrac{1}{2} - v) = -\vartheta_1(v - \tfrac{1}{2}) &= -i \sum_n (-1)^n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} (-iz)^{2n-1} \\
&= \sum_n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} z^{2n-1} = 2 \sum_\nu h^{\frac{\nu^2}{4}} \cos(\nu \pi v).
\end{aligned}
$$

Setzen wir hierin $v - \frac{\tau}{2}$ für v, also $zh^{-\frac{1}{2}}$ für z, so ergibt sich we

$$
\begin{aligned}
\vartheta_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - v\right) = \sum_n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} \cdot h^{-\frac{2n-1}{2}} \cdot z^{2n-1} &= h^{-\frac{1}{4}} z \sum_n h^{(n-1)^2} z^{2n-2} \\
&= h^{-\frac{1}{4}} z \sum_n h^{n^2} z^{2n},
\end{aligned}
$$

und wenn hier v durch $v + \frac{1}{2}$ ersetzt wird, also z durch iz,

$$
\vartheta_1\left(\frac{\tau}{2} - v\right) = h^{-\frac{1}{4}} iz \cdot \sum_n (-1)^n h^{n^2} z^{2n}.
$$

Wir setzen nun

$$
(5) \quad \begin{cases}
\vartheta_2(v) = \sum_n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} z^{2n-1} \\
\qquad = 2[h^{\frac{1}{4}} \cos \pi v + h^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi v + h^{\frac{25}{4}} \cos 5\pi v + \ldots] \\
\vartheta_3(v) = \sum_n h^{n^2} z^{2n} \\
\qquad = 1 + 2h \cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v + 2h^9 \cos 6\pi \\
\vartheta_0(v) = \sum_n (-1)^n h^{n^2} z^{2n} \\
\qquad = 1 - 2h \cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v - 2h^9 \cos 6\pi
\end{cases}
$$

Dann verwandeln sich die Gleichungen (4) zunächst in

$$
\sigma_1(u) = C_1 e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \vartheta_2(v), \quad \sigma_2(u) = \bar{C}_2 e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \vartheta_3(v), \quad \sigma_3(u) = \bar{C}
$$

wobei $\overline{C}_2$, $\overline{C}_3$ neue Konstante bezeichnen. Bestimmen wir diese und C_1, indem wir $u=0$, $v=0$ setzen, so kommt schließlich

$$(6) \qquad \sigma_1(u)=e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\cdot\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)},\quad \sigma_2(u)=e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)},\quad \sigma_3(u)=e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\cdot\frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0(0)}.$$

§ 6. Zusammenstellung.

Wir stellen hier noch einmal die Definitionsgleichungen der vier ϑ-Funktionen und ihren Zusammenhang mit den σ-Funktionen und der $\wp$-Funktion übersichtlich zusammen. Bezüglich der Bezeichnungen bemerken wir folgendes: Die nach der Variablen v genommenen Ableitungen der ϑ-Funktionen sollen durch Striche angedeutet werden, so daß z. B. $\vartheta_0''(v)$ den zweiten nach v genommenen Differentialquotienten der Funktion $\vartheta_0(v)$ bedeutet. Werden diese Funktionen und ihre Ableitungen ohne Hinzufügen des Argumentes v geschrieben, so meinen wir, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird, denjenigen Wert, welcher dem Argumente $v=0$ entspricht („*Nullwert*" der betreffenden Funktion). Endlich soll die Funktion $\vartheta_0(v)$ auch mit $\vartheta_4(v)$ bezeichnet werden, weil es dadurch möglich wird, mehrere Formeln in eine einzige zusammenzufassen.[1])

Wir haben nun folgende Gleichungen:

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{\begin{aligned}
\vartheta_1(v) &= i\sum(-1)^n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} z^{2n-1}\\
&= 2\left[h^{\frac{1}{4}}\sin\pi v - h^{\frac{9}{4}}\sin 3\pi v + h^{\frac{25}{4}}\sin 5\pi v - + \ldots\right]\\
\vartheta_2(v) &= \sum h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} z^{2n-1}\\
&= 2\left[h^{\frac{1}{4}}\cos\pi v + h^{\frac{9}{4}}\cos 3\pi v + h^{\frac{25}{4}}\cos 5\pi v + \ldots\right]\\
\vartheta_3(v) &= \sum h^{n^2} z^{2n}\\
&= 1 + 2h\cos 2\pi v + 2h^4\cos 4\pi v + 2h^9\cos 6\pi v + \ldots\\
\vartheta_0(v) &= \sum(-1)^n h^{n^2} z^{2n}\\
&= 1 - 2h\cos 2\pi v + 2h^4\cos 4\pi v - 2h^9\cos 6\pi v + - \ldots,
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \left\{\begin{aligned}
\sigma(u) &= \frac{2\omega}{\vartheta_1'}\cdot e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\cdot\vartheta_1(v)\\
\sigma_k(u) &= \frac{1}{\vartheta_{k+1}}\, e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\,\vartheta_{k+1}(v) \qquad (k=1,2,3),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{III}) \qquad \sqrt{\wp(u)-e_k} = \frac{\sigma_k(u)}{\sigma(u)} = \frac{1}{2\omega}\cdot\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_{k+1}}\,\frac{\vartheta_{k+1}(v)}{\vartheta_1(v)} \qquad (k=1,2,3),$$

wobei $v=\frac{u}{2\omega}$ ist.

---

[1]) In der Literatur werden die Funktionen $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_0(v)$ auch mit $\vartheta_{11}(v)$, $\vartheta_{10}(v)$, $\vartheta_{00}(v)$, $\vartheta_{01}(v)$ bezeichnet (A. d. H.).

Durch die Gleichungen (III) sind die Wurzeln $\sqrt{\wp(u)-e_k}$ als *eindeutige* Funktionen von u erklärt. Was die auftretenden „*Nullwerte*" angeht, so sind dieselben nach (I) durch die stark konvergierenden Reihen dargestellt:

$$
\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \vartheta_1' = 2\pi\,[h^{\frac{1}{4}} - 3h^{\frac{9}{4}} + 5h^{\frac{25}{4}} - 7h^{\frac{49}{4}} + - \ldots] \\ \vartheta_2 \;= 2\,[h^{\frac{1}{4}} + h^{\frac{9}{4}} + h^{\frac{25}{4}} + h^{\frac{49}{4}} + \ldots] \\ \vartheta_3 \;= 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \ldots \\ \vartheta_0 \;= 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + - \ldots . \end{cases}
$$

§ 7. Zusammenfassende Darstellung der ϑ-Funktionen. Die ϑ-Funktionen als Funktionen von v und τ.

Die vier ϑ-Funktionen sind spezielle Fälle der von *Hermite* eingeführten Funktion

$$
(1) \qquad \Theta_{\mu,\nu}(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi v\left(n+\frac{\mu}{2}\right) + i\pi\tau\left(n+\frac{\mu}{2}\right)^2 + i\pi n\nu},
$$

in welcher wir v, μ, ν als unbeschränkt veränderliche komplexe Variable betrachten[1]), dagegen $\tau = r + is$ auf die „obere Halbebene" einschränken wollen, d. h. auf dasjenige Gebiet der τ-Ebene, welches durch $s > 0$ charakterisiert ist. Wir werden weiterhin zeigen, daß $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ eine ganze Funktion von jeder der Variablen v, μ, ν und eine reguläre Funktion von τ in der oberen τ-Halbebene ist. Zunächst schreiben wir die Reihe (1) in der Gestalt

$$
(1') \qquad \Theta_{\mu,\nu}(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n\nu} \cdot h^{\left(\frac{2n+\mu}{2}\right)^2} z^{2n+\mu} .
$$

Vergleichen wir hiermit die Definitionsgleichungen der ϑ-Funktionen (I) des vorigen Paragraphen, so erkennen wir, daß

$$
(2) \qquad \begin{cases} \vartheta_1(v) = -\,i\,\Theta_{1,1}(v), \\ \vartheta_2(v) = \quad\;\; \Theta_{1,0}(v), \\ \vartheta_3(v) = \quad\;\; \Theta_{0,0}(v), \\ \vartheta_0(v) = \quad\;\; \Theta_{0,1}(v) \end{cases}
$$

ist. Dabei ist zu beachten, daß in den Definitionsgleichungen von $\vartheta_1(v)$ und $\vartheta_2(v)$ der Summationsbuchstabe n durch $n+1$ ersetzt wird, was erlaubt ist, weil n alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.

[1]) ν bedeutet also in diesem Paragraphen keinen Summationsbuchstaben. (A. d. H.)

Wir wollen nun die Konvergenz der Reihe (1) direkt untersuchen, wobei wir sie als Summe der beiden Reihen

$$f_{\mu,\nu}(v) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2i\pi v\left(n+\frac{\mu}{2}\right)+i\pi\tau\left(n+\frac{\mu}{2}\right)^2+i\pi n\nu},$$

$$g_{\mu,\nu}(v) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2i\pi v\left(-n+\frac{\mu}{2}\right)+i\pi\tau\left(-n+\frac{\mu}{2}\right)^2-i\pi n\nu}$$

auffassen. Die Variablen v, μ, ν schränken wir auf beliebige ganz im Endlichen liegende Gebiete ein, die Variable τ auf ein ganz im Endlichen und im Innern der oberen τ-Halbebene liegendes Gebiet G'.

Für alle in Betracht gezogenen Werte von v, μ, ν, τ konvergiert dann jede der Reihen $f_{\mu,\nu}(v)$ und $g_{\mu,\nu}(v)$ absolut und gleichmäßig.

Da

$$g_{\mu,\nu}(v) = f_{-\mu,-\nu}(-v) + e^{2i\pi v\frac{\mu}{2}+i\pi\tau\left(\frac{\mu}{2}\right)^2}$$

ist, so genügt es, diesen Satz für die Reihe $f_{\mu,\nu}(v)$ zu beweisen.

Nach Abtrennung eines von n unabhängigen Faktors lautet das allgemeine Glied von $f_{\mu,\nu}(v)$

$$e^{i\pi\tau n^2+i\pi A n},$$

wo zur Abkürzung

$$A = 2v + \tau\mu + \nu$$

gesetzt ist. Wenn nun

$$\tau = \tau_1 + i\tau_2, \quad A = A_1 + iA_2$$

ist, so wird der kleinste Wert, den τ_2 im Gebiete G' hat, ein gewisser positiver Wert $\tau_2^{(0)}$ und der kleinste Wert, den A_2 für alle in Betracht gezogene Werte von v, μ, ν, τ annimmt, ein gewisser endlicher Wert $A_2^{(0)}$ sein. Es ist dann

$$\left| e^{i\pi\tau n^2+i\pi A n} \right| = e^{-\pi\tau_2 n^2-\pi A_2 n} \leqq e^{-\pi\tau_2^{(0)} n^2-\pi A_2^{(0)} n}.$$

Nun ist weiter, wenn n groß genug geworden ist, etwa für $n \geqq N$,

$$\pi\tau_2^{(0)} n^2 + \pi A_2^{(0)} n > n,$$

weil $\tau_2^{(0)} > 0$ ist. Folglich hat man für alle in Betracht kommenden Werte v, μ, ν, τ

$$\sum_{n=N}^{\infty} e^{i\pi\tau n^2+i\pi A n} \ll \sum_{n=N}^{\infty} e^{-n}, \text{ [1]}$$

woraus die Behauptung folgt.

---

[1] Das Symbol $\ll$ ist im ersten Abschnitt Kap. 1, § 7 eingeführt worden. (A. d. H.)

Die Reihe $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ stellt daher eine für alle endlichen Werte der Variablen v, μ, ν und alle Werte von τ, die positive zweite Koordinate τ_2 besitzen, reguläre Funktion jeder Variablen dar, deren nach diesen Variablen genommene Differentialquotienten durch gliedweise Differentiation der Reihe gebildet werden können.

Hiernach bestätigt man sofort, daß $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Theta_{\mu,\nu}}{\partial v^2} = 4 i \pi \frac{\partial \Theta_{\mu,\nu}}{\partial \tau} \tag{3}$$

genügt. Zufolge (2) genügt also auch jede der vier ϑ-Funktionen dieser Differentialgleichung.

Die Reihe (1) ändert sich nicht, wenn wir ν durch $\nu + 2$ ersetzen. Sie nimmt den Faktor $e^{-i\pi\nu}$ auf, wenn μ um 2 vermehrt wird und dann n durch $n - 1$ ersetzt wird.

Die Funktion $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ genügt daher den Funktionalgleichungen:

$$\Theta_{\mu,\nu+2}(v) = \Theta_{\mu,\nu}(v), \quad \Theta_{\mu+2,\nu}(v) = e^{-i\pi\nu}\, \Theta_{\mu,\nu}(v). \tag{4}$$

Eine weitere Funktionalgleichung erhalten wir durch folgende Betrachtung:

Bedeuten μ' und ν', ebenso wie μ und ν zwei beliebige komplexe Zahlen, so ist der Exponent von e im allgemeinen Gliede der Reihe

$$\Theta_{\mu+\mu',\,\nu+\nu'}(v),$$

nämlich

$$2 i \pi v \left(n + \frac{\mu+\mu'}{2}\right) + i \pi \tau \left(n + \frac{\mu+\mu'}{2}\right)^2 + i \pi n (\nu + \nu'),$$

darstellbar in der Form

$$2 i \pi \left(v + \frac{\nu' + \mu'\tau}{2}\right)\left(n + \frac{\mu}{2}\right) + i \pi \tau \left(n + \frac{\mu}{2}\right)^2 + i \pi n \nu + i \pi \mu' v$$
$$+ i \pi \frac{\mu'^2}{4} \tau - i \pi \frac{\mu \nu'}{2}.$$

Daher befriedigt die Funktion $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ die Gleichung

$$\Theta_{\mu+\mu',\,\nu+\nu'}(v) = e^{i\pi\mu' v + i\pi\frac{\mu'^2}{4}\tau - i\pi\frac{\mu\nu'}{2}}\, \Theta_{\mu,\nu}\left(v + \frac{\nu' + \mu'\tau}{2}\right), \tag{5}$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\Theta_{\mu,\nu}\left(v + \frac{\nu' + \mu'\tau}{2}\right) = e^{i\pi\frac{\mu\nu'}{2}} \cdot h^{\frac{-\mu'^2}{4}}\, z^{-\mu'}\, \Theta_{\mu+\mu',\,\nu+\nu'}(v). \tag{5'}$$

Durch die Gleichung (5) kann die Funktion $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ auf jede andere solche Funktion mit beliebig vorgeschriebenen Werten von μ und ν, z. B. auf die Funktion $\Theta_{0,0}(v)$, also auf $\vartheta_3(v)$, zurückgeführt werden.

§ 8. Verwandlungsformeln und Nullstellen der vier ϑ-Funktionen.

Nehmen wir in der Gleichung (5′) des vorigen Paragraphen für μ, ν, μ', ν' ganze Zahlen der Reihe 0, 1, 2, und berücksichtigen wir dabei die Gleichungen (4) und (2) desselben Paragraphen, so erhalten wir ein System von Gleichungen, welches wir in nachfolgender Tabelle übersichtlich zusammenstellen.

Zur Abkürzung setzen wir:

$$(1)\qquad \begin{cases} m = h^{-\frac{1}{4}} z^{-1} = e^{-\left(\frac{i\pi\tau}{4} + i\pi v\right)} \\ k = h^{-1} z^{-2} = e^{-(i\pi\tau + 2i\pi v)}. \end{cases}$$

Verwandlungstabelle der ϑ-Funktionen.

	$v+\frac{1}{2}$	$v+\frac{\tau}{2}$	$v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$	$v+1$	$v+\tau$	$v+1+\tau$
ϑ_1	ϑ_2	$i m \vartheta_0$	$m \vartheta_3$	$-\vartheta_1$	$-k\vartheta_1$	$k\vartheta_1$
ϑ_2	$-\vartheta_1$	$m \vartheta_3$	$-i m \vartheta_0$	$-\vartheta_2$	$k\vartheta_2$	$-k\vartheta_2$
ϑ_3	ϑ_0	$m \vartheta_2$	$i m \vartheta_1$	ϑ_3	$k\vartheta_3$	$k\vartheta_3$
ϑ_0	ϑ_3	$i m \vartheta_1$	$m \vartheta_2$	ϑ_0	$-k\vartheta_0$	$-k\vartheta_0$

Diese Tabelle ist so zu verstehen: Wollen wir $\vartheta_\alpha\left(v + \frac{\nu}{2} + \frac{\mu\tau}{2}\right)$ bestimmen, so haben wir diejenige Horizontalreihe der Tabelle zu nehmen, vor welcher ϑ_α steht, also die erste, zweite, dritte oder vierte, je nachdem $\alpha = 1, 2, 3$ oder 0 ist. In dieser Horizontalreihe steht der zu bestimmende Wert in der mit $v + \frac{\nu}{2} + \frac{\mu\tau}{2}$ überschriebenen Vertikalreihe. Z. B. ist also

$$\vartheta_1\left(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = m\vartheta_3 = e^{-\left(\frac{i\pi\tau}{4} + i\pi v\right)} \vartheta_3(v),$$

$$\vartheta_2(v + \tau) = k\vartheta_2 = e^{-(i\pi\tau + 2i\pi v)} \vartheta_2(v),$$

usf.

Wir fügen dieser Tabelle noch eine zweite hinzu, welche die Nullstellen und die ihnen entsprechenden Werte von $z^2 = e^{2i\pi v}$ für die Thetafunktionen enthält.

Nach (II) in § 6 hat $\vartheta_1(v)$ dieselben Nullstellen wie $\sigma(u) = \sigma(2\omega v)$; d. h. $\vartheta_1(v)$ verschwindet für $2\omega v = n \cdot 2\omega + n' \cdot 2\omega'$ oder für

$$v = n + n'\tau,$$

wo n und n' alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen haben.

Die Nullstellen der übrigen Thetafunktionen lesen wir aus vorstehenden Tabelle ab. Z. B. haben wir

$$\vartheta_2(v+\tfrac{1}{2}) = -\vartheta_1(v),$$

und daher erhalten wir die Nullstellen von $\vartheta_2(v)$, wenn wir diejen von $\vartheta_1(v)$ um $\frac{1}{2}$ vermehren. So entsteht die folgende

Tabelle der Nullstellen der ϑ-Funktionen.

	$v =$	$z^2 = e^{2i\pi v} =$
ϑ_1	$n + n'\tau$	$h^{2n'}$
ϑ_2	$n + n'\tau + \frac{1}{2}$	$-h^{2n'}$
ϑ_3	$n + n'\tau + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$	$-h^{2n'+1}$
ϑ_0	$n + n'\tau + \frac{\tau}{2}$	$h^{2n'+1}$

Diese Tabellen werden wir weiterhin zu benutzen haben.

§ 9. Darstellung von e_1, e_2, e_3 und Δ durch die Nullwerte der ϑ.

Setzen wir in der Formel (III) § 6

$$u = \omega, \quad \text{also} \quad v = \frac{u}{2\omega} = \frac{1}{2},$$

und sodann

$$u = \omega + \omega', \quad \text{also} \quad v = \frac{u}{2\omega} = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2},$$

so kommt

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{e_1 - e_k} &= \frac{1}{2\omega} \, \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_{k+1}} \cdot \frac{\vartheta_{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\right)}, \\ \sqrt{e_3 - e_k} &= \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_{k+1}} \, \frac{\vartheta_{k+1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)}, \end{aligned} \right. \qquad (k = 1, 2,$$

wobei zu beachten ist, daß $\vartheta_4(v)$ dasselbe wie $\vartheta_0(v)$ bedeutet.

Die erste dieser Gleichungen wenden wir an für $k = 2, 3,$ zweite für $k = 3$. Die auftretenden Werte der ϑ-Funktionen kö wir dann vermöge der Verwandlungstabelle des vorigen Paragra auf die Nullwerte zurückführen. Z. B. ist $\vartheta_3(v+\frac{1}{2}) = \vartheta_0(v)$ und d $\vartheta_3(\frac{1}{2}) = \vartheta_0(0) = \vartheta_0$.

Auf diese Weise finden wir

$$(2)\quad \begin{cases} \sqrt{e_1 - e_2} = \dfrac{1}{2\omega}\cdot\dfrac{\vartheta_1'}{\vartheta_3}\cdot\dfrac{\vartheta_3\left(\frac{1}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{2\omega}\dfrac{\vartheta_1'}{\vartheta_3}\cdot\dfrac{\vartheta_0}{\vartheta_2}, \\[2ex] \sqrt{e_1 - e_3} = \dfrac{1}{2\omega}\cdot\dfrac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}\cdot\dfrac{\vartheta_0\left(\frac{1}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{2\omega}\dfrac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}\cdot\dfrac{\vartheta_3}{\vartheta_2}, \\[2ex] \sqrt{e_2 - e_3} = \dfrac{1}{2\omega}\cdot\dfrac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}\cdot\dfrac{\vartheta_0\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)} = \dfrac{1}{2\omega}\dfrac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}\cdot\dfrac{\vartheta_2}{\vartheta_3}. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen ist je ein bestimmter unter den beiden Werten der Quadratwurzeln $\sqrt{e_i - e_k}$ als eindeutige Funktion des Periodenverhältnisses τ in der oberen τ-Halbebene dargestellt, wenn wir die Gleichungen (IV) von § 6 heranziehen.

Um e_k direkt zu berechnen, setzen wir die Gleichung (III) § 6 in die Form

$$\sqrt{\wp(2\omega v) - e_k} = \frac{1}{2\omega}\,\frac{1 + \dfrac{\vartheta''_{k+1}}{\vartheta_{k+1}}\dfrac{v^2}{2} + \cdots}{v + \dfrac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\dfrac{v^3}{6} + \cdots}$$
$$= \frac{1}{2\omega v}\left(1 + \left(\frac{\vartheta''_{k+1}}{\vartheta_{k+1}} - \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)\frac{v^2}{2} + \cdots\right).$$

Da die Entwicklung von $\wp(2\omega v)$ an der Stelle $v = 0$ kein konstantes Glied enthält, so ist $-e_k$ das konstante Glied in der Entwicklung des Quadrats der rechten Seite vorstehender Gleichung nach Potenzen von v. Dies gibt:

$$(3)\qquad e_k = \frac{1}{4\omega^2}\left(\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta''_{k+1}}{\vartheta_{k+1}}\right) \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Da die Summe $e_1 + e_2 + e_3$ verschwindet, folgt

$$(4)\qquad \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}.$$

Nun erhalten wir aus den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2\vartheta(v)}{\partial v^2} = 4i\pi\frac{\partial\vartheta(v)}{\partial\tau}, \qquad \frac{\partial^3\vartheta(v)}{\partial v^3} = 4i\pi\frac{\partial^2\vartheta(v)}{\partial v\,\partial\tau},$$

denen die vier ϑ-Funktionen genügen, für $v = 0$

$$(5)\qquad \vartheta_k'' = 4i\pi\frac{\partial\vartheta_k}{\partial\tau}, \quad \vartheta_1''' = 4i\pi\frac{\partial\vartheta_1'}{\partial\tau},$$

so daß die Gleichung (4) so geschrieben werden kann:

$$\frac{1}{\vartheta_1'}\frac{\partial\vartheta_1'}{\partial\tau} = \frac{1}{\vartheta_2}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\tau} + \frac{1}{\vartheta_3}\frac{\partial\vartheta_3}{\partial\tau} + \frac{1}{\vartheta_0}\frac{\partial\vartheta_0}{\partial\tau}.$$

Durch Integration folgt

$$\vartheta_1' = C \cdot \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_0,$$

wo C eine von τ unabhängige Größe bedeutet. Diese bestimmen wir, indem wir die Entwicklungen (IV) § 6 eintragen:

$$2\pi [h^{\frac{1}{4}} - \ldots] = C \cdot 2 [h^{\frac{1}{4}} + \ldots] [1 + \ldots] [1 - \ldots]$$

und die Anfangsglieder auf beiden Seiten vergleichen. Es ergibt sich $C = \pi$ und damit die wichtige Relation:

$$\vartheta_1' = \pi \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_0. \tag{6}$$

Vermöge derselben stellen sich nun die Gleichungen (2) so dar:

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\pi}{2\omega} \cdot \vartheta_0^2, \quad \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{2\omega} \cdot \vartheta_3^2, \quad \sqrt{e_2 - e_3} = \frac{\pi}{2\omega} \vartheta_2^2, \tag{7}$$

während vermöge der Gleichungen (5) sich *die Werte* (3) *der* e_k *so schreiben lassen:*

$$e_1 = \frac{i\pi}{\omega^2}\left(\frac{1}{3}\frac{d \log \vartheta_1'}{d\tau} - \frac{d \log \vartheta_2}{d\tau}\right), \quad e_2 = \frac{i\pi}{\omega^2}\left(\frac{1}{3}\frac{d \log \vartheta_1'}{d\tau} - \frac{d \log \vartheta_3}{d\tau}\right), \tag{8}$$

$$e_3 = \frac{i\pi}{\omega^2}\left(\frac{1}{3}\frac{d \log \vartheta_1'}{d\tau} - \frac{d \log \vartheta_0}{d\tau}\right).$$

Die Multiplikation der Gleichungen (7) ergibt für die *Diskriminante* Δ *die Darstellung:*

$$\sqrt[4]{\Delta} = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^3 \cdot \vartheta_0^2 \vartheta_3^2 \vartheta_2^2 = \frac{\pi}{4\omega^3} \vartheta_1'^2. \tag{9}$$

§ 10. Darstellung der ϑ-Funktionen durch unendliche Produkte.

Die Funktion $\vartheta_3(v)$ ist, als Funktion von $z^2 = e^{2i\pi v}$ angesehen, regulär für alle endlichen von Null verschiedenen Werte von z^2.

Ihre Nullstellen bilden nach § 8 die beiden Punktfolgen

$$z^2 = -h^{-1}, \quad -h^{-3}, \quad -h^{-5}, \quad \ldots, \tag{1}$$

$$z^2 = -h, \quad -h^3, \quad -h^5, \quad \ldots, \tag{1'}$$

von welchen die erste den Häufungspunkt $z^2 = \infty$, die zweite den Häufungspunkt $z^2 = 0$ besitzt. (Die Punkte $z^2 = \infty$, $z^2 = 0$ sind also wesentlich singuläre Stellen der Funktion.)

Nach einem Satz der allgemeinen Funktionentheorie[1]) stellt nun

$$\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\left(1 - \frac{x}{a_3}\right)\ldots$$

---

[1]) Vgl. Erster Abschnitt, 6. Kap. § 11. (A. d. H.)

eine ganze Funktion von x mit den Nullstellen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vor, wenn die Reihe

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots$$

absolut konvergiert. Daher ist

$$f_1 = (1 + h z^2)(1 + h^3 z^2)(1 + h^5 z^2) \ldots$$

eine ganze Funktion von z^2, welche die Punkte (1) zu Nullstellen hat. Ebenso wird

$$f_2 = (1 + h z^{-2})(1 + h^3 z^{-2})(1 + h^5 z^{-2}) \ldots$$

eine ganze Funktion von z^{-2} sein, die als Funktion von z^2 die Punkte (1′) zu Nullstellen besitzt.

Die Funktion

$$\begin{aligned} f(v) = f_1 f_2 &= \prod_{n=1}^{\infty}(1 + h^{2n-1} z^2)(1 + h^{2n-1} z^{-2}) \\ &= \Pi(1 + h^{\nu} z^2)(1 + h^{\nu} z^{-2}) \end{aligned}$$

ist daher, als Funktion von v betrachtet, eine ganze Funktion von v mit denselben Nullstellen wie $\vartheta_3(v)$. Wie verhält sich nun $f(v)$ bei Vermehrung von v um 1 oder um τ? Da $z^2 = e^{2i\pi v}$ bei Vermehrung von v um τ den Faktor h^2 erhält, ist offenbar

$$f(v + 1) = f(v)$$

und

$$\begin{aligned} f(v + \tau) &= \Pi(1 + h^{\nu+2} z^2)(1 + h^{\nu-2} z^{-2}) \\ &= \frac{1 + h^{-1} z^{-2}}{1 + h z^2} \cdot \Pi(1 + h^{\nu} z^2)(1 + h^{\nu} z^{-2}) = h^{-1} z^{-2} f(v). \end{aligned}$$

Genau so verhält sich aber (Verwandlungstabelle in § 8) $\vartheta_3(v)$ und folglich ist $\frac{\vartheta_3(v)}{f(v)}$ eine Funktion von v, welche keinen Pol und die Perioden 1 und τ besitzt und daher eine Konstante ist. Somit kommt

$$\vartheta_3(v) = C \cdot \Pi(1 + h^{\nu} z^2)(1 + h^{\nu} z^{-2}),$$

unter C eine Konstante, d. h. einen von v unabhängigen Wert verstanden. Nach der Verwandlungstabelle in § 8 folgt hieraus weiter:

$$\begin{aligned} \vartheta_0(v) &= \vartheta_3(v + \tfrac{1}{2}) = C \cdot \Pi(1 - h^{\nu} z^2)(1 - h^{\nu} z^{-2}), \\ \vartheta_2(v) &= \frac{1}{m}\vartheta_3\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = C \cdot h^{\frac{1}{4}} z\, \Pi(1 + h^{\nu+1} z^2)(1 + h^{\nu-1} z^{-2}), \\ \vartheta_1(v) &= -\vartheta_2(v + \tfrac{1}{2}) = -i C \cdot h^{\frac{1}{4}} \cdot z\, \Pi(1 - h^{\nu+1} z^2)(1 - h^{\nu-1} z^{-2}), \end{aligned}$$

oder in anderer Anordnung und nach leichten Umformungen:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \vartheta_1(v) &= C \cdot h^{\frac{1}{4}} \frac{z - z^{-1}}{i} \quad \Pi(1 - h^{g} z^2)(1 - h^{g} z^{-2}), \\ \vartheta_2(v) &= C \cdot h^{\frac{1}{4}} (z + z^{-1})\, \Pi(1 + h^{g} z^2)(1 + h^{g} z^{-2}), \\ \vartheta_3(v) &= \qquad C \cdot \Pi(1 + h^{\nu} z^2)(1 + h^{\nu} z^{-2}), \\ \vartheta_0(v) &= \qquad C \cdot \Pi(1 - h^{\nu} z^2)(1 - h^{\nu} z^{-2}), \end{aligned} \right.$$

wobei gemäß früherer Verabredung g die geraden Zahlen $2, 4, 6 \ldots$, und ν die ungeraden Zahlen $1, 3, 5, \ldots$ durchlaufen muß.

Da $z = e^{i\pi v}$ ist, können die Faktoren

$$\frac{z - z^{-1}}{i} \quad \text{resp.} \quad z + z^{-1}$$

durch

$$2 \sin \pi v \quad \text{resp.} \quad 2 \cos \pi v$$

ersetzt werden.

Um die Konstante C zu bestimmen, setzen wir in den Formeln (2) $v = 0$, nachdem die erste dieser Formeln durch v dividiert wurde. Dadurch kommt zunächst:

$$(3) \qquad \begin{cases} \vartheta_1' = 2\pi C \cdot h^{\frac{1}{4}} \Pi(1 - h^g)^2, \\ \vartheta_2 = \quad 2 C \cdot h^{\frac{1}{4}} \Pi(1 + h^g)^2, \\ \vartheta_3 = \qquad C \cdot \Pi(1 + h^\nu)^2, \\ \vartheta_0 = \qquad C \cdot \Pi(1 - h^\nu)^2. \end{cases}$$

Wir tragen diese Ausdrücke in die Relation § 9, (6)

$$\vartheta_1' = \pi \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_0$$

ein und erhalten

$$\Pi(1 - h^g)^2 = C^2 \Pi(1 + h^g)^2 (1 - h^{2\nu})^2.$$

Es ist aber weiter

$$\Pi(1 - h^g)^2 = \Pi(1 - h^{2g})^2 (1 - h^{2\nu})^2,$$

weil die geraden Zahlen g mit der Gesamtheit der Zahlen $2g$ und 2ν übereinstimmen. Somit folgt

$$C^2 \Pi(1 + h^g)^2 = \Pi(1 - h^{2g})^2 = \Pi(1 + h^g)^2 (1 - h^g)^2$$

und schließlich

$$(4) \qquad C = \Pi(1 - h^g),$$

wobei berücksichtigt ist, daß gemäß (IV) in § 6 der Nullwert ϑ_3 für $h = 0$ in $+1$ und also auch C nach (3) für $h = 0$ in $+1$ übergehen muß.

Für ϑ_1' ergibt sich nun aus (3) die Darstellung

$$(5) \qquad \vartheta_1' = 2\pi h^{\frac{1}{4}} \Pi(1 - h^g)^3$$

und demnach für Δ nach (9) des vorigen Paragraphen

$$(6) \qquad \Delta = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{12} h^2 \Pi(1 - h^g)^{24},$$

eine Darstellung, welche die Tatsache in Evidenz setzt, daß Δ für jede zulässige Wahl der Perioden 2ω, $2\omega'$ von Null verschieden ist.

§ 11. Einige zahlentheoretische Anwendungen der erhaltenen Resultate.

Da der Nullwert der Funktion ϑ_3 durch die Reihe

$$\vartheta_3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h^{n^2}$$

dargestellt wird, so ist

$$(1) \qquad \vartheta_3^4 = \sum h^{n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \Theta(m)\, h^m,$$

wo $\Theta(m)$ angibt, wie viele Lösungen die Gleichung

$$(2) \qquad m = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2$$

in ganzen Zahlen n_1, n_2, n_3, n_4 besitzt.

Nun ist andererseits nach § 9, (7) und (8)

$$\vartheta_3^4 = \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2 (e_1 - e_3) = \frac{4i}{\pi}\left(\frac{d \log \vartheta_0}{d\tau} - \frac{d \log \vartheta_2}{d\tau}\right) = \frac{4i}{\pi}\frac{d}{d\tau}\left(\log \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\right)$$

oder, da

$$h = e^{i\pi\tau}, \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dh}\cdot\frac{dh}{d\tau} = \frac{d}{dh}\cdot h i \pi$$

ist,

$$(3) \qquad \vartheta_3^4 = -4h\frac{d}{dh}\left(\log\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\right) = 4h\frac{d}{dh}\left(\log\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\right).$$

Setzen wir hierin die Produktdarstellungen (3) des vorigen Paragraphen für ϑ_2 und ϑ_0 ein, so wird

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0} = 2h^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\Pi(1+h^{g})^2}{\Pi(1-h^{r})^2} = 2h^{\frac{1}{4}}\frac{\Pi(1-h^{2g})^2}{\Pi[(1-h^{g})(1-h^{r})]^2} = 2h^{\frac{1}{4}}\frac{\Pi(1-h^{2g})^2}{\Pi(1-h^{r})^2},$$

wo r alle natürlichen Zahlen durchlaufen muß, und (3) geht über in

$$(3') \qquad \vartheta_3^4 = 1 + 8h\frac{d}{dh}\log\frac{\Pi(1-h^{2g})}{\Pi(1-h^{r})}.$$

Die Weiterführung der Rechnung gibt

$$\vartheta_3^4 = 1 + 8\sum\frac{r h^r}{1-h^r} - 8\sum\frac{2g h^{2g}}{1-h^{2g}}$$

$$= 1 + 8\sum_{r,r'} r h^{rr'} - 8\sum_{g,r'} 2g h^{2gr'} \qquad (r' = 1, 2, 3, \ldots)$$

und schließlich

$$(4) \qquad \vartheta_3^4 = 1 + 8\sum_{m=1}^{\infty}\Phi(m)h^m - 8\sum_{m=1}^{\infty}\Phi'(m)h^m.$$

Hier gibt $\Phi(m)$ die Summe aller Zahlen r, die bei allen möglichen Darstellungen von m in der Form $m = rr'$ auftreten, und $\Phi'(m)$ die Summe aller Zahlen $2g$, die bei allen möglichen Darstellungen

von m in der Form $m = 2gr'$ auftreten. Es bedeutet demnach $\Phi(m)$ die Summe aller Divisoren[1]) von m und $\Phi'(m)$ die Summe aller durch 4 teilbaren Divisoren von m.

Der Vergleich der beiden Entwicklungen (1) und (4) ergibt nun

$$\Theta(m) = 8(\Phi(m) - \Phi'(m)), \quad (m = 1, 2, 3, \ldots), \tag{5}$$

d. h.:

Eine natürliche Zahl m ist so oft als Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen darstellbar, als das 8fache der Summe derjenigen Divisoren von m beträgt, die nicht durch 4 teilbar sind.

Z. B. ist für $m = 3$ die Summe der nicht durch 4 teilbaren Divisoren $1 + 3 = 4$ und in der Tat hat 3 die folgenden 32 Darstellungen:

$$\begin{aligned} 3 &= 0^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 = (\pm 1)^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 \\ &= (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + (\pm 1)^2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2, \end{aligned}$$

Der Satz läßt sich noch in anderer Form aussprechen. Ist nämlich

$$m = 2^\alpha m_1,$$

wo m_1 ungerade ist, und sind $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r$ die ungeraden Divisoren von m_1, so sind diese zugleich alle nicht durch 4 teilbare Divisoren von m, wenn $\alpha = 0$, also m ungerade ist. Wenn dagegen $\alpha > 0$, also m gerade ist, so treten zu ihnen noch die Divisoren $2\delta_1, 2\delta_2, \ldots, 2\delta_r$ von m als nicht durch 4 teilbare hinzu. Also folgt:

Eine natürliche Zahl m ist so oft als Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen darstellbar als das 8fache oder 24fache der Summe ihrer ungeraden Divisoren beträgt, je nachdem m ungerade oder gerade ist.

Dieser tiefliegende zahlentheoretische Satz ist zuerst von *Jacobi* aus der Theorie der elliptischen Funktionen abgeleitet worden. Der berühmte Satz von *Lagrange*, daß jede positive ganze Zahl sich als Summe von vier Quadratzahlen darstellen läßt, ist natürlich in diesem *Jacobi*schen Satze enthalten.

Eine andere interessante Folgerung ziehen wir aus der Gleichung

$$\vartheta_3(v) = \prod (1 - h^{g})(1 + h^{\nu} z^2)(1 + h^{\nu} z^{-2}) = \sum h^{n^2} z^{2n}, \tag{6}$$

die für veränderliche Werte von h und z gilt, in diesen Variablen also eine reine Identität vorstellt.

Beiläufig bemerkt, kann sie auch als solche unabhängig von der Theorie der elliptischen Funktionen nachgewiesen werden.

[1]) 1 und m werden dabei auch als Divisoren von m betrachtet. (A. d. H.)

Setzen wir in (6)

$$z^2 = -x^{\frac{1}{2}}, \quad h = x^{\frac{3}{2}},$$

wobei x eine Variable bedeutet, so wird das Produkt, wenn wir $g = 2r$, $\nu = 2r - 1$ setzen,

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1 - x^{3r})\left(1 - x^{3r - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}}\right)\left(1 - x^{3r - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}}\right)$$

$$= \prod_{r=1}^{\infty}(1 - x^{3r})(1 - x^{3r-1})(1 - x^{3r-2}),$$

und die Summe wird

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^{\frac{3n^2}{2}}\left(-x^{\frac{1}{2}}\right)^n.$$

Es kommt daher, weil die Zahlen $3r$, $3r-1$, $3r-2$ zusammen wieder alle natürlichen Zahlen r ausmachen,

$$(7) \qquad \prod_{r=1}^{\infty}(1 - x^r) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n x^{\frac{3n^2+n}{2}} = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \dots .$$

Diese bemerkenswerte Gleichung rührt von *Euler* her, der sie auf empirischem Wege fand, und dem es erst nach langjährigen Bemühungen gelungen ist, sie zu beweisen.

Der Vergleich der beiden Darstellungen von ϑ_1' in den Formeln IV § 6 und (5) § 10 lehrt, wenn wir h^2 mit x bezeichnen, daß neben (7) die Entwicklung

$$(8) \qquad \prod_{r=1}^{\infty}(1 - x^r)^3 = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}(2r-1)\, x^{\frac{r^2-r}{2}} = 1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + \dots$$

gilt.

Eine weitere zahlentheoretische Anwendung werden wir im § 13 kennen lernen.

§ 12. Partialbruchzerlegungen von $\zeta(u)$ und $\wp(u)$ als Funktionen von z^2. Darstellungen von η, g_2, g_3.

Aus der Gleichung (§ 6, (II))

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\vartheta_1'} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \vartheta_1(v) \qquad \left(v = \frac{u}{2\omega}\right)$$

ergibt sich durch logarithmische Differentiation die folgende Darstellung von $\zeta(u)$:

$$(1) \qquad \zeta(u) = \frac{\eta u}{\omega} + \frac{1}{2\omega}\frac{d}{dv}(\log \vartheta_1(v)),$$

in welche wir die Produktentwicklung (2) § 10 von $\vartheta_1(v)$ eintragen wollen.

Auf diese Weise kommt nach leichten Umformungen:

$$(2)\qquad \zeta(u)=\frac{\eta u}{\omega}+\frac{i\pi}{2\omega}\frac{z+z^{-1}}{z-z^{-1}}+\frac{i\pi}{\omega}\sum_g\left(\frac{h^g z^{-2}}{1-h^g z^{-2}}-\frac{h^g z^2}{1-h^g z^2}\right)\qquad (u=2\omega v).$$

Diese Gleichung liefert offenbar die Partialbruchzerlegung der Funktion

$$\zeta(u)-\frac{\eta u}{\omega},$$

wenn diese Funktion als Funktion von

$$z^2=e^{2i\pi v}=e^{\frac{i\pi u}{\omega}}$$

angesehen wird.

Da

$$i\frac{z+z^{-1}}{z-z^{-1}}=i\frac{e^{i\pi v}+e^{-i\pi v}}{e^{i\pi v}-e^{-i\pi v}}=\cot\pi v$$

ist, läßt sich (2) auch in der Form

$$(2')\qquad \zeta(u)=\frac{\eta u}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}\cot\pi v+\frac{i\pi}{\omega}\sum_g\left(\frac{h^g z^{-2}}{1-h^g z^{-2}}-\frac{h^g z^2}{1-h^g z^2}\right)\qquad (u=2\omega v)$$

schreiben.

Die hier auftretenden Summen

$$S_1=\sum_g\frac{h^g z^2}{1-h^g z^2}\quad\text{und}\quad S_2=\sum_g\frac{h^g z^{-2}}{1-h^g z^{-2}}$$

konvergieren in jedem endlichen Bereich der z^2-Ebene, in welchem kein Glied der betreffenden Summe einen verschwindenden Nenner hat, absolut und gleichmäßig. Denn ist z. B. für die Summe S_1 der Bereich B ein solcher Bereich und M das Maximum von $|z^2|$ in diesem Bereich, so gilt

$$\left|\frac{h^g z^2}{1-h^g z^2}\right|\leq\frac{M\cdot|h|^g}{1-M\,|h^g|}<M'\cdot|h|^g,$$

sobald g genügend groß geworden ist und M' eine positive Zahl bedeutet, die um beliebig wenig größer als M fixiert worden ist. Demnach ist für den Bereich B

$$\sum_{g=G}^{\infty}\frac{h^g z^2}{1-h^g z^2}\ll M'\,|h|^G+M'\,|h|^{G+1}+\ldots\qquad (G\text{ genügend groß}),$$

woraus die absolute und gleichmäßige Konvergenz von S_1 im Bereiche B folgt. Die analoge Betrachtung gilt für S_2.

Wird nun z^2 auf den Kreisring

$$(3)\qquad |h^2|<|z^2|<|h^{-2}|$$

eingeschränkt, so ist für jede gerade natürliche Zahl g sowohl $h^g z^{-2}$ als auch $h^g z^2$ absolut kleiner als 1, und die Glieder der Summe in (2') können nach Potenzen von z entwickelt und dann die Terme, welche dieselbe Potenz von z^2 enthalten, zusammengezogen werden.

So erhalten wir

$$\zeta(2\omega v) = 2\eta v + \frac{\pi}{2\omega}\cot\pi v + \frac{i\pi}{\omega}\sum_{r,s}(h^{rs}z^{-2r} - h^{rs}z^{2r})$$

$$= 2\eta v + \frac{\pi}{2\omega}\cot\pi v + \frac{i\pi}{\omega}\sum_{r}\frac{h^{2r}}{1-h^{2r}}(z^{-2r} - z^{2r}),$$

oder

$$(4)\qquad \zeta(2\omega v) = 2\eta v + \frac{\pi}{2\omega}\cot\pi v + \frac{2\pi}{\omega}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h^{2r}}{1-h^{2r}}\sin(2r\pi v).$$

Den Punkten des Kreisringes (3) entsprechen in der v-Ebene die der Bedingung

$$|e^{2\pi i\tau}| < |e^{2i\pi v}| < |e^{-2i\pi\tau}|$$

genügenden Punkte. Setzt man

$$\tau = \tau_1 + i\tau_2, \quad v = v_1 + iv_2,$$

so wird diese Bedingung

$$-\tau_2 < v_2 < +\tau_2;$$

d. h. die Entwicklung (4) ist gültig für den Parallelstreifen der v-Ebene, welcher durch die Parallelen zur reellen Zahlenachse begrenzt wird, die durch die Punkte

$$\tau = \tau_1 + i\tau_2 \quad \text{und} \quad \tau_0 = \tau_1 - i\tau_2$$

hindurchgehen.

Wir wollen nun die beiden Seiten der Gleichung (4) an der Stelle $v = 0$ entwickeln und die beiden Entwicklungen vergleichen.

Die Entwicklung von $\zeta(2\omega v)$ lautet (Kap. 1, Tabellarische Übersicht (2)):

$$\zeta(2\omega v) = \frac{1}{2\omega v} - \frac{g_2}{60}(2\omega v)^3 - \frac{g_3}{140}(2\omega v)^5 - \dots .$$

Bei der Entwicklung der rechten Seite von (4) haben wir zu berücksichtigen, daß

$$\cot(\pi v) = \frac{1}{\pi v} - \frac{\pi v}{3} - \frac{(\pi v)^3}{45} - \frac{2(\pi v)^5}{45\cdot 21} - \dots$$

ist. Der Vergleich der Koeffizienten von v, v^3 und v^5 liefert nun die *folgenden Darstellungen von* η, g_2 *und* g_3:

$$(5)\qquad \begin{cases} \eta = \dfrac{\pi^2}{\omega}\left[\dfrac{1}{12} - 2\sum\limits_{r=1}^{\infty}\dfrac{rh^{2r}}{1-h^{2r}}\right], \\ g_2 = \left(\dfrac{\pi}{\omega}\right)^4\left[\dfrac{1}{12} + 20\sum\limits_{r=1}^{\infty}\dfrac{r^3h^{2r}}{1-h^{2r}}\right], \\ g_3 = \left(\dfrac{\pi}{\omega}\right)^6\left[\dfrac{1}{216} - \dfrac{7}{3}\sum\limits_{r=1}^{\infty}\dfrac{r^5h^{2r}}{1-h^{2r}}\right]. \end{cases}$$

Der Vergleich der höheren Potenzen von v ergibt ähnliche Darstellungen für die Summen

$$c_n = (2n-1)\sum{}' \frac{1}{w^{2n}} = (2n-1)\sum{}' \frac{1}{(2m\omega + 2m'\omega')^{2n}},$$

die wir indessen weiterhin nicht benutzen werden.

Durch Differentiation der Entwicklungen (2) und (4) ergeben sich analoge Entwicklungen von $\wp(u)$ und $\wp(2\omega v)$ mit denselben Gültigkeitsbereichen.

§ 13. Entwicklung von $\sqrt{\wp(u) - e_k}$.

Die Entwicklung (2) von $\zeta(u)$ im vorigen Paragraphen gestattet, die Funktionen $\sqrt{\wp(u) - e_k}$ in ähnliche Reihen zu entwickeln. Wir wollen hier insbesondere (vgl. § 6, III)

$$(1) \qquad \varphi(u) = \sqrt{\wp(u) - e_3} = \frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}\cdot\frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_1(v)} \qquad \left(v = \frac{u}{2\omega}\right)$$

betrachten, um in Ergänzung von § 11 von der entstehenden Entwicklung eine interessante *zahlentheoretische Anwendung* zu machen.

Die Funktion $\varphi(u)$ genügt den Gleichungen

$$(2) \qquad \varphi(u + 2\omega) = -\varphi(u), \quad \varphi(u + 2\omega') = \varphi(u),$$

wie die Verwandlungstabelle der ϑ-Funktionen in § 8 zeigt. Denn der Vermehrung von u um 2ω bzw. $2\omega'$ entspricht die Vermehrung von v um 1 bzw. τ. Die Funktion $\varphi(u)$ hat daher die Perioden 4ω und $2\omega'$, und da sie im Perioden-Parallelogramm

$$(0,\ 4\omega,\ 4\omega + 2\omega',\ 2\omega')$$

nur die beiden Pole $u = 0$, $u = 2\omega$ mit den Residuen 1 und -1 besitzt, ist demnach (Kap. 1, § 12)

$$(3) \qquad \begin{aligned} \varphi(u) &= \sqrt{\wp(u) - e_3} \\ &= \zeta(u/4\omega, 2\omega') - \zeta(u + 2\omega/4\omega, 2\omega') + C, \end{aligned}$$

wo C eine Konstante bedeutet. Da $\varphi(u) - \frac{1}{u}$ an der Stelle $u = 0$ verschwindet, ist

$$(4) \qquad C = \zeta(2\omega/4\omega, 2\omega'),$$

d. h. gleich dem Werte von η, der den Perioden 4ω, $2\omega'$ entspricht, welchen Wert wir zur Abkürzung mit $\bar{\eta}$ bezeichnen wollen (vgl. Kap. 1, § 11, (4)).

Die Entwicklung (2) des vorigen Paragraphen liefert nun, indem wir ω durch 2ω ersetzen, also $z^2 = e^{2i\pi\frac{u}{2\omega}}$ durch z und $h^2 = e^{2i\pi\frac{\omega'}{\omega}}$ durch h:

$$\zeta(u/4\omega, 2\omega') = \frac{\bar{\eta}u}{2\omega} + \frac{i\pi}{4\omega}\cdot\frac{z+1}{z-1} + \frac{i\pi}{2\omega}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{h^r z^{-1}}{1 - h^r z^{-1}} - \frac{h^r z}{1 - h^r z}\right),$$

und hieraus folgt

$$\zeta(u + 2\omega/4\omega, 2\omega')$$

$$= \frac{\bar{\eta} u}{2\omega} + \bar{\eta} - \frac{i\pi}{4\omega} \cdot \frac{-z+1}{z+1} - \frac{i\pi}{2\omega} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{h^r z^{-1}}{1 + h^r z^{-1}} - \frac{h^r z}{1 + h^r z} \right),$$

weil z in $-z$ übergeht, wenn u durch $u + 2\omega$ ersetzt wird. Die vorstehenden Entwicklungen ergeben nun nach Eintragung in (3) und leichter Umformung

$$(5) \qquad \sqrt{\wp(u) - e_3} = \frac{1}{2\omega} \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0} \cdot \frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_1(v)}$$

$$= \frac{i\pi}{\omega} \left[\frac{1}{z - z^{-1}} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{h^r z^{-1}}{1 - h^{2r} z^{-2}} - \frac{h^r z}{1 - h^{2r} z^2} \right) \right],$$

welches die gewünschte Entwicklung ist.

Setzen wir hierin $u = \omega$, also $z = e^{i\pi \frac{u}{2\omega}} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, so finden wir

$$\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{2\omega} \vartheta_3^2 = \frac{\pi}{\omega} \left[\frac{1}{2} + \sum_r \left(\frac{h^r}{1 + h^{2r}} + \frac{h^r}{1 + h^{2r}} \right) \right]$$

oder

$$(6) \qquad \vartheta_3^2 = 1 + 4 \sum_r \frac{h^r}{1 + h^{2r}} = 1 + 4 \sum_r \frac{h^r - h^{3r}}{1 - h^{4r}}.$$

Die linke Seite ist hier

$$(7) \qquad \vartheta_3^2 = (\sum h^{n^2})^2 = \sum_{n_1, n_2} h^{n_1^2 + n_2^2},$$

die rechte Seite

$$(8) \qquad 1 + 4 \sum \frac{h^r}{1 - h^{4r}} - 4 \sum \frac{h^{3r}}{1 - h^{4r}} = 1 + 4 \sum_{r, r'} h^{(4r' - 3)r} - 4 \sum_{r, r'} h^{(4r' - 1)r},$$

wo r' wie r alle natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ durchlaufen muß.

Vergleichen wir nun in den beiden vorstehenden Gleichungen (7) und (8) die Koeffizienten von h^m auf den rechten Seiten, so erhalten wir den Satz:

Eine natürliche Zahl m ist so oft als Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen darstellbar als das 4fache des Überschusses der Anzahl der Divisoren von m, welche die Form $4k + 1$ haben, über die Anzahl der Divisoren von m, welche die Form $4k + 3$ haben, beträgt.

Der *Fermat*sche Satz, daß jede Primzahl von der Form $4k + 1$ sich auf genau eine Weise[1]) als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen läßt, ist ein spezieller Fall des vorstehenden Satzes.

---

[1]) Dabei wird von der Reihenfolge der Basen der beiden Quadrate abgesehen. (A. d. H.)

3. Kapitel.

Die elliptischen Funktionen Jacobis.

Für manche Anwendungen der elliptischen Funktionen ist es zweckmäßig, statt der *Weierstraß*schen Funktion $\wp(u)$ die von *Jacobi* mit

$$\sin\operatorname{am}(u),\quad \cos\operatorname{am}(u),\quad \Delta\operatorname{am}(u) \tag{1}$$

(*Sinusamplitudinis, Cosinusamplitudinis, Deltaamplitudinis*) bezeichneten Funktionen zu gebrauchen. Da die Kenntnis dieser Funktionen überdies für das Verständnis namentlich der älteren Literatur über elliptische Funktionen erforderlich ist, wollen wir sie in diesem Kapitel näher betrachten. Was die Bezeichnung betrifft, so hat *Gudermann* statt der *Jacobi*schen Bezeichnungen (1) die kürzeren

$$\operatorname{sn} u,\quad \operatorname{cn} u,\quad \operatorname{dn} u \tag{2}$$

bzw. eingeführt. Wir werden die drei Funktionen (1) der Reihe nach mit

$$s(u),\quad c(u),\quad \Delta(u)\,[1] \tag{3}$$

bezeichnen.

§ 1. Definition der Funktionen $s(u), c(u), \Delta(u)$.

Es bezeichne

$$\tau = r + is \tag{1}$$

einen beliebig fixierten Wert, für welchen $s > 0$ ist.

Für ω wählen wir eine sogleich näher anzugebende, von τ abhängende Zahl, und für ω' sodann den Wert

$$\omega' = \omega\cdot\tau. \tag{2}$$

Wir definieren nun die *Jacobi*schen elliptischen Funktionen durch folgende Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} s(u) &= \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)} = 2\omega\cdot\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1'}\cdot\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)},\\ c(u) &= \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\cdot\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)},\\ \Delta(u) &= \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\cdot\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}.\end{aligned}\right. \qquad \left(v = \frac{u}{2\omega}\right) \tag{3}$$

Nach Kap. 2, § 6 ist dann

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt{\wp(u) - e_3} &= \frac{1}{s(u)},\\ \sqrt{\wp(u) - e_1} &= \frac{c(u)}{s(u)},\\ \sqrt{\wp(u) - e_2} &= \frac{\Delta(u)}{s(u)}.\end{aligned}\right. \tag{4}$$

[1]) $\Delta(u)$ hat natürlich nichts mit der Diskriminante Δ zu tun **(A. d. H.)**.

Eliminieren wir hieraus $\wp(u)$, so erkennen wir, daß $c(u)$ und $\Delta(u)$ in einfacher Weise algebraisch durch $s(u)$ ausdrückbar sind, indem

$$(5)\qquad \begin{cases} c^2(u) + (e_1 - e_3)s^2(u) = 1\,, \\ \Delta^2(u) + (e_2 - e_3)s^2(u) = 1 \end{cases}$$

ist. Nun haben wir ferner nach Kap. 2, § 9, (7)

$$(6)\quad e_1 - e_2 = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \vartheta_0^4, \quad e_1 - e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \vartheta_3^4, \quad e_2 - e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \vartheta_2^4,$$

wobei die Nullwerte der ϑ-Funktionen ϑ_0, ϑ_2, ϑ_3, etwa vermöge der Formeln (IV) in § 6 des Kap. 2, als Funktionen von τ sich darstellen.

Wir wählen ω so, daß der Faktor $(e_1 - e_3)$ in der ersten Gleichung (5) gleich 1 wird, nehmen nämlich

$$(7)\qquad \omega = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2 = \frac{\pi}{2}[1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \ldots]^2 \quad (h = e^{i\pi\tau}),$$

so daß nach (6)

$$(8)\qquad e_1 - e_2 = \frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_3^4}, \quad e_1 - e_3 = 1\,, \quad e_2 - e_3 = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}$$

wird. Die Gleichungen (5) lauten jetzt

$$(9)\qquad \begin{cases} c^2(u) + s^2(u) = 1\,, \\ \Delta^2(u) + \varkappa^2 s^2(u) = 1\,, \end{cases}$$

wenn zur Abkürzung

$$(10)\qquad \varkappa = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}$$

gesetzt wird.

Da nach Fixierung von τ gemäß (7) und (2) ω und ω' bestimmte Werte haben, so hängen die Funktionen $s(u)$, $c(u)$, $\Delta(u)$ außer von u nur von τ ab, was wir nötigenfalls dadurch zum Ausdruck bringen werden, daß wir die Funktionen bzw. mit

$$s(u/\tau), \quad c(u/\tau), \quad \Delta(u/\tau)$$

bezeichnen.

Bezüglich der Bezeichnungen ist ferner noch folgendes zu bemerken:

Die durch (10) als Funktion von τ eingeführte Größe $\varkappa$ heißt der *Modul* der Funktionen $s(u)$, $c(u)$, $\Delta(u)$, die Größe

$$(10')\qquad \varkappa' = \frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2}$$

das *„Komplement"* des Moduls. Nach (8) besteht zwischen $\varkappa$ und $\varkappa'$ die Relation

$$(11)\qquad \varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1.$$

Jacobi bezeichnet die Werte von ω und ω' bzw. mit K und iK', so daß also

$$K = \omega = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2, \quad iK' = \omega' = \omega\cdot\tau = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2\cdot\tau \tag{12}$$

ist. Wir werden indessen an den Bezeichnungen ω und ω' festhalten, müssen aber immer eingedenk sein, daß in diesem Kapitel ω und ω' Funktionen von τ sind.

Endlich wollen wir hier unter $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{\varkappa'}$, $\sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}$ stets die Werte

$$\sqrt{\varkappa} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}, \quad \sqrt{\varkappa'} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}, \quad \sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2} \tag{13}$$

verstehen, die eindeutig von τ abhängen.

Die in (4) auftretende Funktion $\wp(u)$ besitzt die von τ abhängenden Fundamentalperioden 2ω und $2\omega'$, und die Werte e_1, e_2, e_3 sind ebenfalls Funktionen von τ, die aus (8) in Verbindung mit $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ leicht berechnet werden können.

Die Definitionsgleichungen (3) von $s(u)$, $c(u)$, $\Delta(u)$ lassen sich vermöge der Gleichungen

$$2\omega\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1'} = \pi\vartheta_3^2\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1'} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}, \quad \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2} = \sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}, \quad \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} = \sqrt{\varkappa'} \tag{14}$$

auch in die Gestalt setzen

$$\left\{\begin{aligned} s(u) &= \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\cdot\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}, \\ c(u) &= \sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}\cdot\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}, \\ \Delta(u) &= \sqrt{\varkappa'}\cdot\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}. \end{aligned}\right. \qquad \left(v = \frac{u}{2\omega}\right). \tag{15}$$

Übrigens zeigen die Gleichungen (3), in Rücksicht auf die bekannten Eigenschaften der σ- und σ_k-Funktionen:

Die Funktion $s(u)$ ist ungerade und ihre Entwicklung nach aufsteigenden Potenzen von u beginnt mit dem Gliede u. Die Funktionen $c(u)$ und $\Delta(u)$ sind gerade, und es ist $c(0) = \Delta(0) = 1$.

§ 2. Die Funktionen $s(u)$, $c(u)$, $\Delta(u)$ als elliptische Funktionen.

Vermöge der Definitionsgleichungen (15) des vorigen Paragraphen übertragen sich die Tabellen in § 8 des Kapitels 2 von den ϑ-Funktionen ohne weiteres auf die Funktionen $s(u)$, $c(u)$, $\Delta(u)$. Wir erhalten so:

Tabelle I. Verwandlungsformeln der Funktionen $s(u)$, $c(u)$, $\Delta(u)$.

	$u+\omega$	$u+\omega'$	$u+\omega+\omega'$	$u+2\omega$	$u+2\omega'$	$u+2\omega+2\omega'$
s	$\frac{c(u)}{\Delta(u)}$	$\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{1}{s(u)}$	$\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{\Delta(u)}{c(u)}$	$-s(u)$	$s(u)$	$-s(u)$
c	$-\varkappa'\frac{s(u)}{\Delta(u)}$	$-\frac{i}{\varkappa}\cdot\frac{\Delta(u)}{s(u)}$	$-i\frac{\varkappa'}{\varkappa}\cdot\frac{1}{c(u)}$	$-c(u)$	$-c(u)$	$c(u)$
Δ	$\varkappa'\cdot\frac{1}{\Delta(u)}$	$-i\cdot\frac{c(u)}{s(u)}$	$i\varkappa'\cdot\frac{s(u)}{c(u)}$	$\Delta(u)$	$-\Delta(u)$	$-\Delta(u)$

Die drei letzten Vertikalreihen zeigen, daß $s(u)$ die Perioden $4\omega'$, $2\omega'$, $c(u)$ die Perioden 4ω, $2\omega+2\omega'$, $\Delta(u)$ die Perioden 2ω, 4ω besitzt.

Tabelle II. Nullstellen, Pole und Perioden der Funktionen $s(u)$, $c(u)$, $\Delta(u)$.

	Nullstellen	Pole	Perioden
$s(u)$	$2n\cdot\omega+2n'\cdot\omega'$	$2n\omega+(2n'+1)\omega'$	4ω, $2\omega'$
$c(u)$	$(2n+1)\omega+2n'\omega'$	$2n\omega+(2n'+1)\omega'$	4ω, $2\omega+2\omega'$
$\Delta(u)$	$(2n+1)\omega+(2n'+1)\omega'$	$2n\omega+(2n'+1)\omega'$	2ω, $4\omega'$

In den nachfolgenden Figuren 67, 68, 69 ist für jede der Funktionen das zu den angegebenen Perioden gehörende Parallelogramm (0) gezeichnet und die in dasselbe fallenden Nullstellen und Pole der betreffenden Funktion, die ersteren durch kleine Kreise, die letzteren durch Kreuze, kenntlich gemacht.

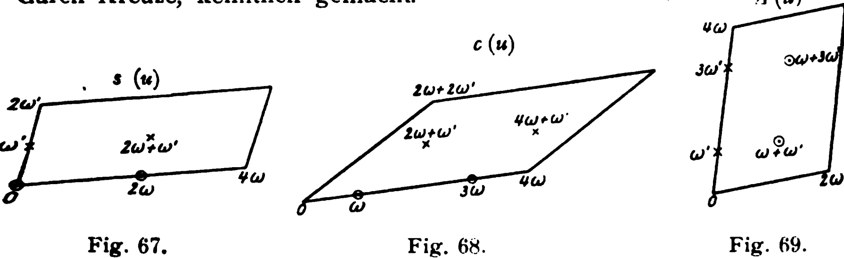


Fig. 67. Fig. 68. Fig. 69.

Hieraus geht nun hervor:

Die Funktionen $s(u)$, $c(u)$, $\Delta(u)$ *sind elliptische Funktionen zweiten Grades mit den Perioden* $(4\omega, 2\omega')$ *bzw.* $(4\omega, 2\omega+2\omega')$ bzw. $(2\omega, 4\omega')$ *und den bezüglichen Polsummen* 2ω, 0, 0.

Aus der Tatsache, daß die Funktionen den Grad 2 besitzen, folgt, daß die angegebenen Perioden jeweils Fundamentalperioden sind. (Kap. 1, § 14.)

§ 3. Die Differentialgleichungen von $s(u), c(u), \Delta(u)$.

Es ist

$$\wp'(u) = -2\sqrt{\wp(u)-e_1}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_2}\cdot\sqrt{\wp(u)-e_3} = -\frac{2c(u)\Delta(u)}{[s(u)]^3}$$

nach § 1, (4). Andererseits folgt aus $\wp(u) - e_3 = \frac{1}{s^2(u)}$ die Gleichung

$$\wp'(u) = -\frac{2s'(u)}{[s(u)]^3}$$

und durch Vergleich der beiden Ausdrücke für $\wp'(u)$:

$$s'(u) = c(u)\cdot\Delta(u). \tag{1}$$

Durch Differentiation der Gleichungen

$$\begin{cases} c^2(u) = 1 - s^2(u) \\ \Delta^2(u) = 1 - \varkappa^2 s^2(u) \end{cases} \tag{2}$$

und Benutzung von (1) folgen die zweite und dritte Gleichung des Systems:

$$\begin{cases} s'(u) = c(u)\Delta(u), \\ c'(u) = -s(u)\Delta(u), \\ \Delta'(u) = -\varkappa^2 s(u)c(u). \end{cases} \tag{3}$$

Aus (3) gewinnen wir durch Quadrieren und Berücksichtigung von (2) die *Differentialgleichungen* von $s(u)$, $c(u)$, $\Delta(u)$:

$$\begin{cases} [s'(u)]^2 = (1 - s^2(u))(1 - \varkappa^2 s^2(u)), \\ [c'(u)]^2 = (1 - c^2(u))(\varkappa'^2 + \varkappa^2 c^2(u)), \\ [\Delta'(u)]^2 = -(1 - \Delta^2(u))(\varkappa'^2 - \Delta^2(u)). \end{cases} \tag{4}$$

§ 4. Die Additionstheoreme von $s(u), c(u), \Delta(u)$.

Betrachten wir, unter v einen beliebig aber fest angenommenen Wert verstanden, die Funktionen

$$\varphi_1(u) = s(u)s(u+v), \quad \varphi_2(u) = c(u)c(u+v), \quad \varphi_3(u) = \Delta(u)\Delta(u+v), \tag{1}$$

so besitzen dieselben nach Tabelle I in § 2 die Perioden 2ω und $2\omega'$ und in dem mit diesen Perioden gebildeten Parallelogramm (0) die Pole

$$u \equiv \omega', \quad u \equiv -v + \omega' \pmod{2\omega, 2\omega'}.$$

Die Funktionen sind also elliptische Funktionen zweiten Grades mit denselben beiden Polen. Daher werden $\varphi_2(u) + A\varphi_1(u)$ und $\varphi_3(u) + B\varphi_1(u)$ Konstante sein, wenn die Konstanten A und B so gewählt werden, daß die Funktionen $\varphi_2(u) + A\varphi_1(u)$ und $\varphi_3(u) + B\varphi_1(u)$ den Punkt ω' nicht mehr zum Pol haben. Es bestehen also zwei Gleichungen der Form

$$\begin{cases} c(u)c(u+v) + A s(u)s(u+v) = A_1 \\ \Delta(u)\Delta(u+v) + B s(u)s(u+v) = B_1, \end{cases} \tag{2}$$

unter A, A_1, B, B_1 Konstante, d. h. von u unabhängige Werte verstanden.

Indem wir $u = 0$ setzen, ergibt sich

$$A_1 = c(v), \quad B_1 = \Delta(v).$$

Sodann erhalten wir durch Differentiation der Gleichungen (2) nach u und darauf folgende Substitution $u = 0$ unter Berücksichtigung der Gleichungen (3) im vorigen Paragraphen:

$$c'(v) + A\, s(v) = 0 \text{ od. } A = \Delta(v),$$
$$\Delta'(v) + B\, s(v) = 0 \text{ od. } B = \varkappa^2 c(v).$$

Die Gleichungen (2) lauten also definitiv:

$$(3) \qquad \begin{cases} c(u)c(u+v) + \Delta(v)s(u)s(u+v) = c(v) \\ \Delta(u)\Delta(u+v) + \varkappa^2 c(v)s(u)s(u+v) = \Delta(v). \end{cases}$$

Setzen wir hierin $-u$ statt u und $v + u$ statt v, so kommt

$$(4) \qquad \begin{cases} c(u)c(v) - \Delta(u+v)s(u)s(v) = c(u+v) \\ \Delta(u)\Delta(v) - \varkappa^2 c(u+v)s(u)s(v) = \Delta(u+v). \end{cases}$$

Aus den letzten Gleichungen können wir $c(u+v)$ und $\Delta(u+v)$ berechnen und durch Eintragung des berechneten Wertes von $c(u+v)$ in die erste Gleichung (3) auch $s(u+v)$. Die Ausführung der Rechnung liefert die *Additionstheoreme* von $s(u)$, $c(u)$, $\Delta(u)$ in der Gestalt

$$(5) \qquad \begin{cases} s(u+v) = \dfrac{s(u)\,c(v)\,\Delta(v) + s(v)\,c(u)\,\Delta(u)}{1 - \varkappa^2 s^2(u)\, s^2(v)} \\[2ex] c(u+v) = \dfrac{c(u)\,c(v) - s(u)\,\Delta(u)\,s(v)\,\Delta(v)}{1 - \varkappa^2 s^2(u)\, s^2(v)} \\[2ex] \Delta(u+v) = \dfrac{\Delta(u)\,\Delta(v) - \varkappa^2 s(u)\,c(u)\,s(v)\,c(v)}{1 - \varkappa^2 s^2(u)\, s^2(v)}. \end{cases}$$

§ 5. Die trigonometrischen Funktionen als spezielle Fälle der Funktionen $s(u)$, $c(u)$, $\Delta(u)$.

Die Gleichungen § 1 (3) oder (15) zeigen, ausführlich geschrieben, die Abhängigkeit der Funktionen $s(u)$, $c(u)$, $\Delta(u)$ von u und τ:

$$s(u/\tau) = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \cdot \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)} = \frac{1 + 2h + \ldots}{2(h^{\frac{1}{4}} + h^{\frac{9}{4}} + \ldots)} \cdot \frac{2[h^{\frac{1}{4}} \sin v\pi - \ldots]}{1 - 2h \cos 2v\pi + \ldots},$$

$$c(u/\tau) = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2} \cdot \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)} = \frac{1 - 2h + \ldots}{2(h^{\frac{1}{4}} + h^{\frac{9}{4}} + \ldots)} \cdot \frac{2[h^{\frac{1}{4}} \cos v\pi + \ldots]}{1 - 2h \cos 2v\pi + \ldots}, \qquad (h = e^{i\pi\tau})$$

$$\Delta(u/\tau) = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} \cdot \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)} = \frac{1 - 2h + \ldots}{1 + 2h + 2h^4 + \ldots} \cdot \frac{1 + 2h \cos 2v\pi + \ldots}{1 - 2h \cos 2v\pi + \ldots},$$

wobei $v = \frac{u}{2\omega}$, $2\omega = \pi \vartheta_3^2$ zu setzen ist.

Wenn wir nun $\tau = r + is$ dadurch ins Unendliche übergehen lassen, daß wir r festhalten, während s nach $+\infty$ wächst, so wird

$$h = e^{i\pi\tau} = e^{i\pi r} \cdot e^{-\pi s}$$

in Null übergehen, 2ω geht in π über, da $\vartheta_3 = 1 + 2h + 2h^4 + \ldots$ nach 1 konvergiert. Die Periode $2\omega'$ rückt ins Unendliche, da $2\omega' = 2\omega \cdot \tau$ ist.

Die vorstehenden Darstellungen von $s(u)$, $c(u)$, $\Delta(u)$ *lassen nun erkennen, daß bei diesem Grenzübergang*

$$s(u|\tau) \text{ in } \sin u, \quad c(u|\tau) \text{ in } \cos u, \quad \Delta(u|\tau) \text{ in } 1$$

übergeht.

Da

$$\varkappa = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2} = \left[\frac{2(h^{\frac{1}{4}} + h^{\frac{9}{4}} + \ldots)}{1 + 2h + \ldots}\right]^2$$

in Null übergeht, so werden die Additionstheoreme (5) des vorigen Paragraphen in die elementaren Formeln

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v, \quad \cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

übergehen, wie zu erwarten stand. *Aus den Differentialgleichungen des* § 3 *werden zugleich die bekannten für* $\sin u$ *und* $\cos u$ *geltenden Differentialgleichungen.*

4. Kapitel.

Die elliptischen Modulfunktionen.

Die in der Theorie der elliptischen Funktionen auftretenden Größen, wie die Invarianten g_2, g_3, Δ, der Modul $\varkappa$ der *Jacobi*schen elliptischen Funktionen, die Nullwerte der ϑ-Funktionen usw., die nur von den Perioden oder vom Periodenverhältnis abhängen, haben zu der ausgedehnten Theorie der *elliptischen Modulfunktionen* Anlaß gegeben. Wir wollen hier die ersten Elemente dieser Theorie entwickeln und zwar namentlich zu dem Zwecke, eine sich unmittelbar darbietende, wichtige Frage zu erledigen. Diese Frage ist die folgende: *Ist es möglich, die Perioden* ω_1, ω_2 *so zu wählen, daß die mit ihnen gebildete Funktion* $\wp(u|\omega_1, \omega_2)$ *Invarianten* g_2, g_3 *besitzt, deren Werte mit vorgeschriebenen Werten zusammenfallen?*

Diese Frage kommt offenbar auf die nach der Lösbarkeit der Gleichungen

$$g_2 = 60 \sum' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4}, \quad g_3 = 140 \sum' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^6}$$

hinaus, in welchen g_2, g_3 gegebene, ω_1, ω_2 zu bestimmende Werte bezeichnen, die der Bedingung genügen sollen, daß $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ nicht reell ist.

§ 1. Äquivalenz der Größenpaare und der Größen.

In § 15 des ersten Kapitels haben wir festgesetzt, daß zwei Größenpaare

$$(\omega_2', \omega_1') \quad \text{und} \quad (\omega_2, \omega_1)$$

äquivalent heißen sollen, wenn die Gesamtheit der aus dem einen Paare gebildeten Perioden $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ mit der Gesamtheit der aus dem andern Paare gebildeten Perioden $m_1'\omega_1' + m_2'\omega_2'$ zusammenfällt. Dort wurde auch gezeigt, daß hierfür notwendig und hinreichend die Existenz von vier ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ist, für welche die Gleichungen

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \omega_2' = \alpha\omega_2 + \beta\omega_1, \\ \omega_1' = \gamma\omega_2 + \delta\omega_1, \end{cases} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

bestehen. Wir beweisen nun folgenden Satz:

Satz 1. *Zu jedem Paare* (ω_2', ω_1'), *für welches* $\frac{\omega_2'}{\omega_1'}$ *nicht reell ist, gibt es ein äquivalentes Paar* (ω_2, ω_1), *welches den Bedingungen*

$$\text{(2)} \qquad |\omega_2| \geqq |\omega_1|, \quad |\omega_2 + \omega_1| \geqq |\omega_2|, \quad |\omega_2 - \omega_1| \geqq |\omega_2|$$

genügt.

Um dies zu zeigen, ordnen wir die Periodenpunkte $m_1'\omega_1' + m_2'\omega_2'$ nach nicht abnehmendem Abstande vom Nullpunkt in die Reihe

$$\text{(3)} \qquad 0, \; w_1, \; w_2, \; w_3, \; \ldots$$

und bezeichnen mit w_k den ersten auf w_1 folgenden Punkt, der mit w_1 und dem Nullpunkt nicht in gerader Linie liegt. Nehmen wir

$$\text{(4)} \qquad w_1 = \omega_1, \quad w_k = \omega_2,$$

so befriedigen ω_1 und ω_2 die Bedingungen (2), denn $w_k + w_1$ und $w_k - w_1$ sind Punkte der Reihe (3), die hinter w_k stehen, weil sie mit w_1 und dem Nullpunkt nicht in einer Geraden liegen. Nun kann ferner nach der Bestimmungsweise der Punkte (4) in dem Dreiecke mit den Ecken $0, \omega_1, \omega_2$ kein von diesen Ecken verschiedener Punkt aus der Reihe (3) auftreten. Folglich können wir das Parallelogramm $0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2$ ebensogut wie das Parallelogramm $0, \omega_1', \omega_1' + \omega_2', \omega_2'$ für die Funktionen mit den Perioden ω_1', ω_2' gebrauchen (Kap. 1, § 2) oder: das Paar (ω_2', ω_1') ist dem Paare (ω_2, ω_1) äquivalent. Das in Satz 1 auftretende Paar (ω_2, ω_1) kann so angenommen werden, daß in den Gleichungen (1) die Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ wird. Denn andernfalls könnten wir an die Stelle des Paares (ω_2, ω_1) das Paar $(\omega_2, -\omega_1)$ setzen.

Wir führen nun weiter den Begriff der *Äquivalenz zweier Größen* ein.

Die beiden Größen τ' und τ heißen *äquivalent*, wenn es vier ganze Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gibt, die den Gleichungen

$$(5) \qquad \tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \varepsilon$$

genügen, wo ε einen der Werte $+1$ und -1 bedeutet.

Im Falle $\varepsilon = +1$ sagen wir, τ' und τ seien *eigentlich* äquivalent, im Falle $\varepsilon = -1$ sagen wir, τ' und τ seien *uneigentlich* äquivalent.

Beispielsweise sind τ und

$$\tau' = \tau + 1 = \frac{1 \cdot \tau + 1}{0 \cdot \tau + 1}$$

eigentlich äquivalent; ebenso τ und

$$\tau' = \frac{-1}{\tau} = \frac{0 \cdot \tau - 1}{1 \cdot \tau + 0}.$$

Wir beweisen nun über die Äquivalenz zweier Größen folgende beiden Sätze:

Satz 2. *Ist τ eine komplexe Größe, τ' eine ihr äquivalente Größe, so liegen die Punkte τ' und τ auf der gleichen oder auf verschiedenen Seiten der Achse der reellen Zahlen, je nachdem die Äquivalenz eine eigentliche oder eine uneigentliche ist.*

Sei nämlich $\tau = r + is$, $\tau' = r' + is' = \dfrac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} = \dfrac{(\alpha r + \beta) + i \cdot \alpha s}{(\gamma r + \delta) + i \cdot \gamma s}$, so findet man

$$s' = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma r + \delta)^2 + \gamma^2 s^2} \cdot s,$$

woraus ersichtlich ist, daß s' das nämliche oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzt wie s, je nachdem $\alpha\delta - \beta\gamma$ positiv oder negativ ist.

Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise wollen wir von zwei Punkten τ und τ' in der komplexen Zahlenebene sagen, sie seien *äquivalent*, wenn die durch sie repräsentierten Größen τ und τ' es sind. Es gilt dann

Satz 3. *Zu einem in der oberen Halbebene beliebig fixierten Punkte τ' gibt es stets einen (eigentlich) äquivalenten Punkt τ in derselben Halbebene, für welchen*

$$(6) \qquad |\tau| \geqq 1, \quad |\tau + 1| \geqq |\tau|, \quad |\tau - 1| \geqq |\tau|$$

ist.

Nach Satz 1 existiert nämlich zu dem Größenpaar $(\tau', 1)$ ein äquivalentes (ω_2, ω_1), so beschaffen, daß

$$(7) \qquad \begin{cases} \tau' = \alpha\omega_2 + \beta\omega_1, \\ 1 = \gamma\omega_2 + \delta\omega_1, \end{cases} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

und zugleich die Bedingungen (2) erfüllt sind. Setzen wir dann

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau,$$

so genügt τ, wie aus (2) folgt, den Bedingungen (6), und es ist, wegen (7),

$$\tau' = \frac{\alpha\omega_2 + \beta\omega_1}{\gamma\omega_2 + \delta\omega_1} = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}.$$

Die Bedingungen (6) lassen sich in einfacher Weise geometrisch interpretieren. $|\tau| \geqq 1$ besagt, daß der Punkt τ auf dem Rande oder außerhalb des Kreises mit dem Mittelpunkt Null und dem Radius 1 liegt. Die Bedingung $|\tau - 1| \geqq |\tau|$ besagt, daß der Punkt τ vom Punkte 1 keine kleinere Entfernung besitzt als vom Nullpunkt, d. h. daß er links von der Geraden oder auf der Geraden liegt, die im Punkt $\frac{1}{2}$ senkrecht zur Achse der reellen Zahlen errichtet ist. Analog bedeutet $|\tau + 1| \geqq \tau$, daß der Punkt τ auf oder rechts von der Geraden liegt, die im Punkte $-\frac{1}{2}$ senkrecht zur Achse der reellen Zahlen steht. Der genannte Kreis und die beiden erwähnten Geraden begrenzen nun ein Gebiet G in der oberen Halbebene (vgl. die Fig. 70). Zwei gegenüberliegende Punkte τ und $\tau + 1$ auf den geradlinigen Begrenzungslinien AC und $A'C'$ von G sind äquivalent; ebenso je zwei gegenüberliegende Punkte τ

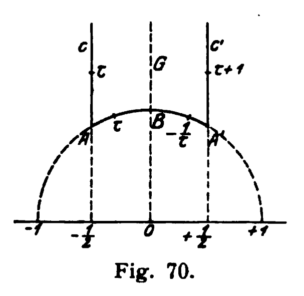


Fig. 70.

und $-\frac{1}{\tau}$ auf den Begrenzungsteilen AB und BA' von G. Setzen wir daher fest, daß von den Randpunkten des Gebietes G die auf den Randteilen AC und AB liegenden Punkte (B inklusive) zum Gebiete gerechnet werden sollen, die übrigen, auf den Randteilen BA' und $A'C'$ liegenden, aber nicht, so gilt zufolge Satz 3:

Zu jedem Punkt τ' in der oberen Halbebene gibt es einen äquivalenten Punkt τ, der dem Gebiete G angehört.

Die Punkte A, B, A' und den unendlich fernen Punkt, in welchem AC und $A'C'$ zusammenlaufen, wollen wir als „Ecken" des Gebietes G bezeichnen. Wir sehen also G als ein „Viereck" an. Die Ecke B repräsentiert den Punkt $\tau = i$, die Ecke A den Punkt $\tau = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \varrho$, die Ecke A' den Punkt $\tau = \varrho + 1 = -\varrho^2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$. Der Winkel, unter welchem die Seiten AB und AC in A zusammenstoßen, ist offenbar $\frac{\pi}{3}$.

§ 2. Die elementaren Modulformen.

Die Variablen ω_1, ω_2 mögen der einen Einschränkung unterliegen, daß

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau = r + is \tag{1}$$

eine positive zweite Koordinate s besitzen, der Punkt τ also in der oberen Halbebene liegen soll. Es sind dann

$$\left\{\begin{aligned} g_2 &= g_2(\omega_1, \omega_2) = 60 \sum{}' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4}, \\ g_3 &= g_3(\omega_1, \omega_2) = 140 \sum{}' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^6}, \\ &\Delta(\omega_1, \omega_2) = g_2^3 - 27\, g_3^2 \end{aligned}\right. \tag{2}$$

eindeutige, homogene, stets endliche Funktionen der beiden Variablen ω_1, ω_2. Wir wollen g_2, g_3, Δ als die „elementaren Modulformen" bezeichnen.

Nach Kap. 2, § 10, (6) und § 12, (5) ist

$$\left\{\begin{aligned} g_2 &= \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^4 \left[\frac{1}{12} + 20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 h^{2n}}{1-h^{2n}}\right] \\ &= \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^4 \left[\frac{1}{12} + 20\, h^2 + \ldots + 20\, \zeta_3(n) h^{2n} + \ldots\right], \\ g_3 &= \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^6 \left[\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 h^{2n}}{1-h^{2n}}\right] \qquad (h = e^{i\pi\tau}) \\ &= \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^6 \left[\frac{1}{216} - \frac{7}{3} h^2 - \ldots - \frac{7}{3} \zeta_5(n) h^{2n} - \ldots\right], \\ \Delta &= \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^{12} h^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - h^{2n})^{24} = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^{12} [h^2 - 24\, h^4 + \ldots]. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Hier bedeuten $\zeta_3(n)$ und $\zeta_5(n)$ die Summen der dritten bzw. fünften Potenzen der Divisoren der natürlichen Zahl n. Die Darstellungen (3) sind für alle in Betracht kommenden Werte der Variablen ω_1, ω_2 gültig und lassen ebenso wie (2) erkennen, daß g_2, g_3, Δ homogen von den bezüglichen Graden -4, -6, -12 sind und daß Δ (als unendliches Produkt) stets von Null verschieden ist.

§ 3. Die absolute Invariante $J(\tau)$.

Wir bilden nun aus g_2 und Δ die nur vom Periodenverhältnis τ abhängende Funktion

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{\Delta}, \tag{1}$$

die auch durch die Gleichung

$$J(\tau) - 1 = \frac{27\, g_3^2}{\Delta} \tag{1'}$$

definiert werden kann. $J(\tau)$ nennen wir die *„absolute“ Invariante;* dieselbe soll als Funktion von τ nun näher untersucht werden.

Es ist nach § 2

$$(2)\qquad J(\tau) = \frac{\left[\frac{1}{12} + 20h^2 + \dots\right]^3}{h^2 \Pi (1 - h^{2n})^{24}} = \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{12^3} + c_1 h^2 + \dots\right],$$

wo die auftretende Potenzreihe von $h^2 = e^{2i\pi\tau}$, solange $|h^2| < 1$ ist, konvergiert, weil Δ beständig von Null verschieden bleibt.

Wir haben also zunächst:

Satz 1. *$J(\tau)$ ist eine in der oberen Halbebene reguläre Funktion von τ.*

Da g_2, g_3, Δ sich nicht ändern, wenn (ω_2, ω_1) durch ein äquivalentes Paar (ω_2', ω_1') ersetzt wird, so gilt ferner:

Satz 2. *Sind τ' und τ zwei äquivalente Punkte der oberen Halbebene, so ist*

$$(3)\qquad J(\tau') = J(\tau).$$

Die für uns wichtigste Eigenschaft der Funktion $J(\tau)$, zu deren Beweis wir uns nun wenden, ist aber diese:

Satz 3. *Bedeutet a einen gegebenen endlichen Wert, so besitzt die Gleichung*

$$(4)\qquad J(\tau) - a = 0$$

eine und nur eine Lösung τ im Gebiete G.

Schneiden wir von G durch eine Parallele CC' zur Achse der reellen Zahlen das Gebiet $G' = CABA'C'$ ab, so werden alle Lösungen der Gleichung (4), die sich im Gebiete G finden, notwendig dem Gebiete G' angehören, sobald der Abstand c der Parallelen CC' von der Achse der reellen Zahlen genügend groß genommen ist. Denn ist

$$\tau = r + is,$$

wo $s \geqq c$, so wird

$$|h^2| = |e^{2i\pi r - 2\pi s}| \leqq e^{-2\pi c},$$

also durch genügend große Wahl von c beliebig klein und folglich nach (2) der absolute Betrag von $J(\tau)$ beliebig groß, z. B. $|J(\tau)| > |a|$. Dann kann aber eine Lösung der Gleichung (4) im Gebiete G sicher nicht außerhalb des Gebietes G' vorhanden sein.

Wir wollen nun zunächst annehmen, daß auf dem Rande von G' niemals $J(\tau) - a = 0$ wird. Dann ist

die Anzahl der Lösungen der Gleichung (4), wo das Integral positiv durch die Berandung von G' erstreckt wird. Das Integral zerlegen wir nach dem Schema

$$\int_A^B - \int_{A'}^B + \int_{A'}^{C'} - \int_A^C + \int_{C'}^C,$$

wo die ersten beiden Integrale durch die Kreisbögen AB bzw. $A'B$, die übrigen geradlinig zu nehmen sind. Substituiert man im ersten Integrale $-\frac{1}{\tau}$ für τ, so geht es in das zweite über; ebenso geht das dritte Integral, wenn man $\tau + 1$ für τ setzt, in das vierte über, denn es bestehen nach Satz 2 die Gleichungen

$$J\left(-\frac{1}{\tau}\right) = J(\tau), \quad J(\tau + 1) = J(\tau). \tag{5}$$

Diese Integrale heben sich also auf, und es kommt

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'}^{C} d \lg (J(\tau) - a). \tag{6}$$

Durchläuft nun

$$\tau = r + is$$

die geradlinige Strecke $C'C$, so beschreibt

$$h^2 = e^{2\pi i r} \cdot e^{-2\pi s} = e^{2\pi i r} e^{-2\pi c}$$

einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $e^{-2\pi c}$, welcher durch Vergrößerung von c beliebig klein gemacht werden kann. Das Integral (6) gibt daher an, wenn wir $J(\tau) - a$ als Funktion von h^2 betrachten, von welcher Ordnung diese Funktion im Nullpunkt unendlich wird. Daher ist nach (2)

$$N = 1,$$

d. h. $J(\tau) - a$ wird im Gebiete G genau einmal Null, w. z. b. w.

Etwas umständlicher wird der Beweis unseres Satzes, wenn wir die Annahme, $J(\tau) - a$ bleibe auf dem Rande von G' beständig von Null verschieden, nicht machen. Wir verfahren dann so: Wir markieren auf dem Rande von G' die Punkte

$$A,\ B,\ A',\ p,\ p',\ p_1,\ p_1',\ \ldots \tag{7}$$

die so gewählt werden sollen, daß unter ihnen diejenigen Randpunkte vorhanden sind, für welche $J(\tau) - a$ verschwindet (Fig. 71). p und p' sollen dabei symmetrisch zur Achse des Imaginären liegen, ebenso p_1 und p_1' usw. Die Punkte $p', p_1', \ldots$ scheiden wir durch Kreisstücke aus dem Gebiete G' aus, die so klein gewählt werden, daß in ihnen,

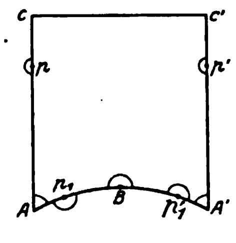


Fig. 71.

vom Mittelpunkt abgesehen, $J(\tau)-a$ nicht 0 wird; die Punkte $p, p_1, \ldots$ dagegen umgeben wir nach dem Äußeren von G' hin mit ebensolchen kleinen Kreisstücken; endlich werden auch noch A, B, A' durch Kreisbögen ausgeschlossen. So entstehe aus G' das Gebiet G''.

Die um die Punkte (7) gelegten Kreisbögen bezeichnen wir bezüglich mit

$$(A),\ (B),\ (A'),\ (p),\ (p'),\ (p_1),\ (p_1'),\ \ldots$$

und haben dann in verständlicher Schreibweise, wenn wir die sich aufhebenden Integralteile gleich unterdrücken,

$$(8)\qquad 2\pi i N = \int_{G''} d\lg(J(\tau)-a)$$

$$= \int_{C'}^{C} + \int_{(A)} + \int_{(B)} + \int_{(A')} + \int_{(p)} + \int_{(p')} + \int_{(p_1)} + \int_{(p_1')} + \cdots,$$

wo nun N die Anzahl der Nullstellen von $J(\tau)-a$ im Gebiete G'' bedeutet.

Wegen der Gleichungen (5) heben sich die Integrale über (p) und (p') auf, ebenso über (p_1) und (p_1') usw. Verschwindet nun die Funktion $J(\tau)-a$ nicht in den Ecken A, B, A', so können die Integrale über (A), (B), (A') fortgelassen werden, und (8) geht über in

$$2\pi i N = \int_{C'}^{C},$$

also in (6), womit $N=1$ bewiesen ist.

Es bleibt noch der Fall zu behandeln, daß $J(\tau)-a$ in den Ecken verschwindet.

Für $\tau = i$ ist

$$(9)\qquad \frac{\omega_1^6 g_3}{140} = \sum{}' \frac{1}{(m_1+m_2 i)^6} = -\sum{}' \frac{1}{(-m_1 i+m_2)^6}$$

$$= -\sum{}' \frac{1}{(m_1+m_2 i)^6} = 0,$$

da m_2, $-m_1$ dieselben Wertpaare wie m_1, m_2 durchlaufen; also

$$g_3 = 0, \qquad J(i) = 1.$$

Für $\tau = \varrho$ ist

$$(10)\quad \frac{\omega_1^4 g_2}{60} = \sum{}' \frac{1}{(m_1+m_2\varrho)^4} = \frac{1}{\varrho}\sum{}' \frac{1}{(m_1\varrho^2+m_2)^4} = \frac{1}{\varrho}\sum{}' \frac{1}{(-m_1\varrho-m_1+m_2)^4}$$

$$= \frac{1}{\varrho}\sum{}' \frac{1}{(m_1+m_2\varrho)^4} = 0,$$

da $-m_1+m_2$, $-m_1$ dieselben Wertpaare wie m_1, m_2 durchlaufen; also

$$g_2 = 0, \qquad J(\varrho) = 0.$$

Für $a = 1$ verschwindet also $J(\tau) - a$ in B, aber nicht in A d A'. Folglich ist für $a = 1$

$$(11)\qquad 2\pi i N = \int_{C'}^{C} + \int_{(B)}.$$

Wegen $J\left(-\frac{1}{\tau}\right) = J(\tau)$ ist aber, wenn (B') den Bogen (B) zu einem Vollkreis (K) ergänzt,

$$(12)\qquad \int_{(B)} d\lg(J(\tau)-1) = \int_{(B')} d\lg\left(J\left(-\frac{1}{\tau}\right) - 1\right) = \frac{1}{2}\int_{(K)} d\lg(J(\tau) - 1).$$

Nach $(1')$ verschwindet nun $J(\tau) - 1$ in $\tau = i$ von gerader Ordnung 2ν $(\nu \geqq 1)$. Nach (11) und (12) ist aber

$$N = 1 - \nu,$$

also, da N seiner Bedeutung nach $\geqq 0$ ist,

$$N = 0, \qquad \nu = 1.$$

In G'' verschwindet daher $J(\tau) - 1$ nicht; diese Funktion hat also in G nur die eine Nullstelle $\tau = i$.

Auf dieselbe Art zeigt man, daß die Gleichung $J(\tau) = 0$ in G nur die eine Lösung $\tau = \varrho$ besitzt.

Damit ist Satz 3 bewiesen.

§ 4. Die Gleichungen $g_2(\omega_1, \omega_2) = c_2$, $g_3(\omega_1, \omega_2) = c_3$.

Es seien jetzt c_2 und c_3 gegebene Werte, für welche

$$c_2^3 - 27\, c_3^2 = c$$

von Null verschieden ist.

Die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} g_2(\omega_1, \omega_2) = c_2, \\ g_3(\omega_1, \omega_2) = c_3 \end{cases}$$

seien nach ω_1 und ω_2 aufzulösen.

1. Es sei $c_2 = 0$. Setzt man $\tau = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \varrho$, so ist nach § 3, (

$$g_2(\omega_1, \omega_1 \varrho) = 0.$$

Bestimmt man noch ω_1 aus

$$\omega_1^6 = \frac{140}{c_3} \sum{}' \frac{1}{(m_1 + m_2 \varrho)^6},$$

so ist (1) erfüllt.

2. Es sei $c_3 = 0$. Für $\tau = i$ ist nach § 3, (9) die Glei

$$g_3(\omega_1, \omega_1 i) = 0$$

erfüllt. Die Lösung von (1) wird dann durch

$$\omega_1^4 = \frac{60}{c_2} \Sigma' \frac{1}{(m_1 + m_2 i)^4}$$

geliefert.

3. Es sei $c_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$.

Die Gleichungen (1) sind dann und nur dann erfüllt, wenn die Gleichungen

$$(2) \qquad \frac{g_2(\omega_1, \omega_2)}{g_3(\omega_1, \omega_2)} = \frac{c_2}{c_3}, \qquad \frac{g_2^3(\omega_1, \omega_2)}{g_2^3(\omega_1, \omega_2) - 27 g_3^2(\omega_1, \omega_2)} = \frac{c_2^3}{c}$$

bestehen.

Betrachten wir nun ω_1 und $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau$ als zu bestimmende Größen, so schreiben sich die Gleichungen (2) in der Form

$$\omega_1^2 = \frac{c_2}{c_3} \frac{140 \Sigma' \frac{1}{(m_1 + m_2 \tau)^6}}{60 \Sigma' \frac{1}{(m_1 + m_2 \tau)^4}},$$

$$J(\tau) = \frac{c_2^3}{c}.$$

Nach § 3, Satz 3 hat die letztere Gleichung eine Lösung τ; aus der ersteren ergibt sich dann ω_1 durch Wurzelziehen und ω_2 aus $\omega_2 = \omega_1 \tau$.

Damit ist die zu Beginn dieses Kapitels gestellte Frage in bejahendem Sinne beantwortet:

Es ist stets möglich, die Perioden ω_1, ω_2 so zu wählen, daß die Invarianten g_2, g_3 einer mit diesen Perioden gebildeten Funktion $\wp(u/\omega_1, \omega_2)$ vorgeschriebene Werte c_2, c_3 mit $c_2^3 - 27 c_3^2 \neq 0$ besitzen.

§ 5. Die Funktion $\varkappa^2(\tau)$.

Im 3. Kapitel, § 3, haben wir gesehen, daß die elliptische Funktion $s(u)$ der Differentialgleichung

$$(1) \qquad [s'(u)]^2 = (1 - s^2(u))(1 - \varkappa^2 s^2(u))$$

genügt. $\varkappa^2$ war dabei als Funktion von τ definiert durch die Gleichung

$$(2) \qquad \varkappa^2 = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},$$

und es ist $\varkappa^2$ von 0 und 1 verschieden, da die Werte e_1, e_2, e_3 voneinander verschieden sind. Zu jedem τ (mit positiv imaginärem Teil) gehört also ein von 0 und 1 verschiedener Wert von $\varkappa^2$ und eine Funktion $s(u)$. Wir fragen nun, ob umgekehrt zu jedem von 0 und 1 verschiedenen $\varkappa^2$ die Differentialgleichung (1) durch eine elliptische

Funktion $s(u)$ befriedigt werden kann. *Es ist also zu untersuchen, ob für jedes von* 0 *und* 1 *verschiedene* a *die Gleichung*

(3) $$\varkappa^2(\tau) = a$$

durch ein τ *mit positiv imaginärem Teil gelöst werden kann.*

Wir setzen

(4) $$e_3 = -\frac{a+1}{3}, \quad e_1 = e_3 + 1, \quad e_2 = e_3 + a, \quad \text{also} \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

und mit Rücksicht auf Kap. 1, § 7, (16),

(5) $$g_2 = -4(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1), \qquad g_3 = 4 e_1 e_2 e_3 .$$

Dann sind die Zahlen e_1, e_2, e_3 voneinander verschieden, und daher ist

$$g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0 .$$

§ 4 lehrt nun, daß die Gleichungen (5), also auch (4) durch zwei Perioden ω_1, ω_2 befriedigt werden können. Setzt man $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau$ und trägt (4) in (2) ein, so erkennt man, daß dieses τ der Gleichung (3) genügt.

5. Kapitel.

Elliptische Gebilde.

§ 1. Das *Weierstrass*sche Gebilde.

Sind x und y zwei komplexe Variable, die durch eine algebraische Gleichung mit konstanten Koeffizienten

(1) $$G(x, y) = 0$$

verbunden sind, so nennen wir die Gesamtheit der Wertepaare, welche der Gleichung (1) genügen, ein *algebraisches Gebilde.* Jedes Wertepaar (x, y) heißt eine *Stelle* oder ein *Punkt des Gebildes.* Gibt es *reelle* Wertepaare (x, y), die zu dem Gebilde gehören, so werden diese durch die Punkte der algebraischen Kurve $G(x, y) = 0$ dargestellt, wenn wir x, y als rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene deuten.

Wir wollen uns nun hier mit dem algebraischen Gebilde

(2) $$y^2 = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = G_4(x)$$

beschäftigen, wobei wir die Konstanten $a_0, \ldots, a_4$ nur der einen Bedingung unterwerfen, daß $G_4(x) = 0$ *keine Doppelwurzel* hat.

Damit ist insbesondere der Fall $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ ausgeschlossen; sonst würde nämlich die Doppelwurzel ∞ vorliegen. Die rechte Seite von (2) ist also ein Polynom 3ten oder 4ten Grades. Das durch (2) dargestellte algebraische Gebilde nennen wir das *elliptische Grundgebilde.*

In diesem Paragraphen betrachten wir den speziellen Fall, wo es sich um das Gebilde

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3, \tag{3}$$

das *Weierstrasssche Gebilde*, handelt. Hierin bedeuten g_2 und g_3 beliebige Zahlen, die nur der Bedingung

$$\Delta = g_2{}^3 - 27 g_3{}^2 \neq 0$$

unterliegen.

Wir haben im vorigen Kapitel bewiesen: Die Größen ω_1 und ω_2 können so bestimmt werden, daß

$$60 \Sigma' \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^4} = g_2, \qquad 140 \Sigma' \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^6} = g_3$$

wird und $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ nicht reell ist.

Bildet man mit diesen Größen ω_1, ω_2 die Funktion $\wp(u)$, so ist

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2 \wp(u) - g_3,$$

und folglich wird

$$x = \wp(u), \qquad y = \wp'(u) \tag{4}$$

ein Punkt des Gebildes (3) sein. Wir behaupten, daß die Stellen des Gebildes und die Punkte eines Periodenparallelogramms der Funktion $\wp(u)$ eindeutig umkehrbar aufeinander bezogen sind. Zunächst entspricht vermöge (4) jedem Punkt eines Periodenparallelogramms ein Punkt des Gebildes (wenn die Stelle $x = \infty$, $y = \infty$ zu dem Gebilde gerechnet wird). Ferner hat die Gleichung $x = \wp(u)$ im Periodenparallelogramm genau zwei Lösungen u_1 und u_2; für diese ist $\wp'(u_1) = -\wp'(u_2)$. Gehört also u_1 zu (x, y), so gehört u_2 zu $(x, -y)$; für $y \neq 0$ gehört daher zu (x, y) genau ein Punkt des Periodenparallelogramms. Für $y = 0$ aber ist $u_1 = u_2$, so daß auch in diesem Falle der Stelle $(x, 0)$ des Gebildes genau ein Punkt u_1 des Parallelogramms entspricht.

Das Ergebnis dieses Paragraphen können wir nun leicht auf den allgemeinen Fall (2) ausdehnen. Das geschieht in §§ 2, 3.

§ 2. Das Gebilde $y^2 = G_3(x)$.

Es sei

$$y^2 = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = G_3(x) \qquad (a_1 \neq 0), \tag{1}$$

wo das Polynom $G_3(x)$ drei *verschiedene* Nullstellen haben möge. Wir setzen

$$x = \frac{x_1 + b}{a}, \qquad y = \frac{y_1}{a};$$

dann geht (1) über in

$$(2) \qquad y_1^2 = \frac{a_1}{a} x_1^3 + \left(3\frac{a_1}{a} b + a_2\right) x_1^2 + \cdots.$$

Nun wählen wir a und b derart, daß x_1^3 den Faktor 4 und x_1^2 den Faktor 0 erhält:

$$a = \frac{a_1}{4}, \qquad b = -\frac{a_2}{12}.$$

Hierdurch erhält (2) die Form

$$y_1^2 = 4x_1^3 - g_2 x_1 - g_3,$$

wobei sich die Koeffizienten g_2 und g_3 leicht durch $a_1, \ldots, a_4$ ausdrücken lassen. Die Diskriminante $g_2^3 - 27g_3^2$ ist dabei $\neq 0$, da $G_3(x) = 0$ lauter einfache Wurzeln hat. Nach § 1 wird daher das Gebilde (1) durch

$$(3) \qquad x = \frac{4}{a_1}\left(\wp(u) - \frac{a_2}{12}\right) = \varphi(u), \quad y = \frac{4\wp'(u)}{a_1} = \varphi'(u)$$

dargestellt, wo $\wp(u)$ die zu den Invarianten g_2, g_3 gehörige $\wp$-Funktion bedeutet. $\varphi(u)$ ist also eine *elliptische Funktion zweiten Grades mit dem Doppelpol* $u = 0$. Die Gleichungen (3) ergeben jede Stelle des Gebildes (1) genau einmal, wenn u alle Lagen in einem Periodenparallelogramm annimmt.

§ 3. Das Gebilde $y^2 = G_4(x)$.

Schließlich sei das Gebilde

$$(1) \qquad y^2 = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = G_4(x)$$

gegeben, wo $G_4(x) = 0$ vier *verschiedene* Wurzeln hat.

Wir setzen

$$x = \frac{1}{x_1} + c, \quad y = -\frac{y_1}{x_1^2}$$

und finden

$$\begin{aligned}(2) \qquad y_1^2 &= a_0(1 + cx_1)^4 + a_1 x_1(1 + cx_1)^3 + a_2 x_1^2(1 + cx_1)^2 \\ &\quad + a_3 x_1^3(1 + cx_1) + a_4 x_1^4 \\ &= b_1 x_1^3 + b_2 x_1^2 + b_3 x_1 + b_4,\end{aligned}$$

falls c eine Lösung der Gleichung $G_4(x) = 0$ bedeutet. Da $G_4(x)$ lauter einfache Nullstellen hat, so gilt dasselbe für das Polynom (2); aus demselben Grunde ist $b_1 = G_4'(c) \neq 0$. Nach dem Ergebnis des vorigen Paragraphen läßt sich nun das Gebilde

$$y_1^2 = b_1 x_1^3 + b_2 x_1^2 + b_3 x_1 + b_4$$

darstellen durch

$$x_1 = \frac{4}{b_1}\left(\wp(u) - \frac{b_2}{12}\right), \quad y_1 = \frac{4\wp'(u)}{b_1}.$$

Das Gebilde (1) wird also dargestellt durch

$$x = \frac{b_1}{4\left(\wp(u) - \frac{b_2}{12}\right)} + c = \varphi(u), \quad y = -\frac{b_1 \wp'(u)}{4\left(\wp(u) - \frac{b_2}{12}\right)^2} = \varphi'(u).$$

Das Ergebnis fassen wir noch einmal zusammen:

Satz: *Die Punkte des elliptischen Grundgebildes*

$$y^2 = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \tag{3}$$

lassen sich darstellen in der Form

$$x = \varphi(u) = \frac{a\wp(u) + b}{c\wp(u) + d},$$

$$y = \varphi'(u) = \frac{(ad - bc)\wp'(u)}{(c\wp(u) + d)^2} \qquad (ad - bc \neq 0).$$

$\varphi(u)$ *ist also eine elliptische Funktion* 2ten *Grades und hat die Polsumme Null. Ist die rechte Seite von* (3) *ein Polynom* 3ten *Grades, also* $a_0 = 0$, *so ist* $\varphi(u)$ *eine ganze lineare Funktion von* $\wp(u)$.

Durch die Substitution

$$x = \frac{a x_1 + b}{c x_1 + d}, \quad y = \frac{(ad - bc) y_1}{(c x_1 + d)^2}$$

geht (3) über in

$$y_1^2 = 4 x_1^3 - g_2 x_1 - g_3.$$

§ 4. Das *Legendre*sche Gebilde.

Das Gebilde

$$y^2 = (1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2), \tag{1}$$

wo $\varkappa^2$ von 0 und 1 verschieden ist, wollen wir das *Legendresche Gebilde* nennen, weil es der Form der elliptischen Integrale zugrunde liegt, die *Legendre* bei seinen klassischen Untersuchungen benutzte. Dasselbe fällt natürlich unter die im vorigen Paragraphen behandelten Gebilde. Man kann aber auch ganz direkt zeigen, daß dieses Gebilde durch elliptische Funktionen dargestellt werden kann.

Nach § 5 des vorigen Kapitels läßt sich nämlich die Gleichung

$$\varkappa^2(\tau) = a \qquad (a \neq 0 \text{ und } \neq 1)$$

stets durch ein τ mit positiv imaginärem Teil lösen. Die zu diesem τ gehörige Funktion $s(u)$ genügt dann der Differentialgleichung

$$(s'(u))^2 = (1 - s^2(u))(1 - a s^2(u)).$$

Daher läßt sich das Gebilde (1) darstellen durch

$$x = s(u), \quad y = s'(u).$$

§ 5. Die Hauptform der *Riemann*schen Fläche des Gebildes $y^2 = G_4(x)$ [1].

Wir wollen im folgenden den inneren Zusammenhang der Stellen, aus denen sich das elliptische Grundgebilde zusammensetzt, genauer studieren. Hierzu dient die von *Riemann* herrührende Darstellung der mehrdeutigen Funktionen durch die nach ihm benannten Flächen, welche wir aber hier nur für den uns speziell interessierenden Fall in Betracht ziehen wollen.

Eine Fläche F heißt Riemannsche Fläche des elliptischen Gebildes

$$y^2 = A_0 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 = G_4(x), \tag{1}$$

wenn die Punkte der Fläche eindeutig umkehrbar den Stellen des Gebildes zugeordnet sind und zwar so, daß einer stetigen Lagenänderung des Punktes auf der Fläche F eine stetige Änderung des zugehörigen Wertepaares (x, y) entspricht, solange x und y endlich bleiben.

Aus dieser Definition folgt, wie sogleich noch näher ausgeführt werden soll, daß die *Riemann*sche Fläche ***nicht eindeutig bestimmt*** ist, sondern in den mannigfaltigsten Arten herstellbar ist.

Zunächst erhalten wir unmittelbar eine besonders einfache Gestalt der *Riemann*schen Fläche des Gebildes (1), wenn wir die Darstellung des Gebildes in der Form

$$x = \varphi(u), \quad y = \varphi'(u) \tag{2}$$

heranziehen. Dabei bedeutet $\varphi(u)$ eine elliptische Funktion zweiten Grades mit der Polsumme Null.

Die Punkte (x, y) des Gebildes sind durch die Gleichungen (2) eindeutig umkehrbar den Punkten des Periodenparallelogramms $abcd$ zugeordnet. Von den Randpunkten des Parallelogramms sind dabei nur die Punkte auf den Seiten ab, ad zum Parallelogramm zu rechnen, exklusive der Punkte b und d. Nehmen wir die Randpunkte mit hinzu, so verhält sich die Sache so, daß immer je zwei gegenüber liegende Punkte, wie μ und μ' oder ν und ν', denselben Punkt des elliptischen Gebildes repräsentieren und daß insbesondere die vier Ecken a, b, c, d alle vier einem und demselben Punkt des Gebildes entsprechen (Fig. 72). Es wird dann also die Eindeutigkeit gestört, insofern gewisse Punkte des Gebildes zwei verschiedenen

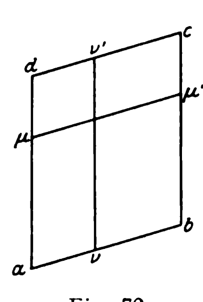


Fig. 72.

[1]) Eine eingehendere Behandlung der *Riemann*schen Flächen findet man im 3. Abschnitt. (A. d. H.)

Punkten und ein Punkt des Gebildes sogar vier Punkten der Parallelogrammfläche korrespondieren.

Die Mehrdeutigkeit können wir aber auf folgende Weise wieder beseitigen. Wir denken uns das Parallelogramm aus einem vollkommen biegsamen und dehnbaren Material hergestellt. Wir bringen dasselbe zunächst durch geeignete Dehnung in die Form eines Rechtecks (Fig. 73). Sodann biegen wir die Rechtecksfläche in die Gestalt eines Zylinders derart, daß die Seite cb auf die Seite ad fällt, wodurch sich je zwei Punkte μ, μ' in einen einzigen Punkt vereinigen

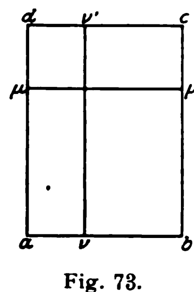


Fig. 73.

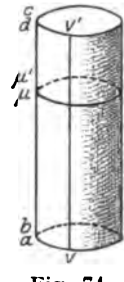


Fig. 74.

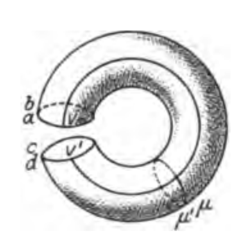


Fig. 75.

(Fig. 74). Nunmehr biegen wir die Zylinderfläche in einen Kreisring oder Torus, wobei nun auch je zwei entsprechende Punkte ν und ν', sowie die vier Punkte a, b, c, d zur Deckung gelangen (Fig. 75).

Auf die Punkte dieses Kreisringes sind nun die Stellen des elliptischen Gebildes eindeutig umkehrbar und stetig bezogen.

Dabei ist noch zu bemerken, daß wir *zwei* Stellen im Periodenparallelogramm, also auch auf dem Kreisringe haben, an welchen $x = \infty$, $y = \infty$ wird, wenn a_0 von Null verschieden ist, im andern Falle nur *eine* solche Stelle.

Im ersteren Falle müssen wir also, um eine durchgängig eindeutig umkehrbare Beziehung zwischen den Stellen des elliptischen Gebildes und den Punkten des Kreisringes zu haben, das Wertepaar $x = \infty$, $y = \infty$ zweimal als Stelle des elliptischen Gebildes rechnen.

Den Kreisring wollen wir als die „*Hauptform*" der *Riemann*schen Fläche des elliptischen Grundgebildes (1) bezeichnen.

Man beachte, daß den Parallelen zu dem einen Seitenpaar ab, cd des Periodenparallelogramms auf dem Kreisringe die „Meridiankreise" entsprechen, den Parallelen zu dem anderen Seitenpaar ad, bc die „Breitenkreise".

§ 6. Die zweiblättrige Form der *Riemann*schen Fläche von $y^2 = G_4(x)$.

Wir wenden uns nun zu der Form der *Riemann*schen Fläche unseres Gebildes (1), welche die ursprünglich von *Riemann* angegebene und in der älteren Literatur fast ausschließlich verwendete ist. Folgende Bemerkungen schicken wir zweckmäßig voraus.

Die Funktion

$$y = \sqrt{x - a}$$

hat für jeden von a verschiedenen Wert von x zwei entgegengesetzt gleiche Werte; sie ist also eine *zweideutige* Funktion von x.

Ist x_0 ein von a verschiedener Wert, so können wir

$$y = \sqrt{(x_0 - a) + (x - x_0)} = \sqrt{x_0 - a} \cdot \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0 - a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

nach aufsteigenden Potenzen von $x - x_0$ entwickeln; die entstehende Potenzreihe wird den einen oder den andern der beiden Werte von $\sqrt{x - a}$ ergeben, je nachdem wir für den Faktor $\sqrt{x_0 - a}$ den einen oder den andern seiner beiden Werte wählen. Man sieht also:

In der Umgebung einer von a verschiedenen Stelle x_0 zerfällt der Wertevorrat von $y = \sqrt{x - a}$ in zwei Systeme, von denen jedes durch eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - x_0$ darstellbar ist.

Wenn wir x eine stetige Linie $x_1 \ldots x_2$ beschreiben lassen, die nicht durch den Punkt a geht, so können wir jeder Lage von x auf der Linie einen der beiden Werte von $y = \sqrt{x - a}$ zuordnen. Verlangen wir aber, daß y sich stetig ändern soll, so ist y in jedem Punkte der Linie $x_1 \ldots x_2$ offenbar völlig bestimmt, wenn wir für den Anfangspunkt x_1 festgesetzt haben, welchen der beiden Werte von $\sqrt{x_1 - a}$ hier y besitzen soll. Setzen wir

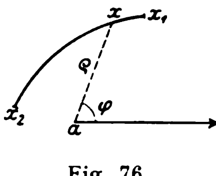


Fig. 76.

$$x - a = \varrho \cdot e^{i\varphi},$$

so ist der Winkel φ längs der Kurve $x_1 \ldots x_2$ eindeutig bestimmt, wenn wir ihn für den Anfangspunkt x_1 willkürlich fixiert haben und längs der Kurve sich *stetig* ändern lassen (Fig. 76).

Beachten wir, daß

$$\sqrt{x - a} = \sqrt{\varrho} \cdot e^{\frac{i\varphi}{2}}$$

ist, so erkennen wir sofort, indem wir x_2 mit x_1 zusammenfallen lassen:

Beim Durchlaufen einer geschlossenen Kurve, die den Punkt a ausschließt, nimmt $y = \sqrt{x - a}$ seinen ursprünglichen Wert wieder an

Beim Durchlaufen einer einfach geschlossenen Kurve, die den Punkt a einschließt, geht $y = \sqrt{x-a}$ in seinen entgegengesetzten Wert $-\sqrt{x-a}$ über.

Diese Sätze lassen sich sofort auf eine Quadratwurzel aus einer beliebigen ganzen rationalen Funktion von x übertragen.

Insbesondere folgt für

$$y = \sqrt{A_0 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4}$$
$$= \sqrt{A_0} \cdot \sqrt{x-a_1} \cdot \sqrt{x-a_2} \cdot \sqrt{x-a_3} \cdot \sqrt{x-a_4} \qquad (A_0 \neq 0),$$

daß

1. *in der Umgebung einer von a_1, a_2, a_3, a_4 verschiedenen Stelle x_0 der Wertevorrat von y in zwei Systeme zerfällt, von denen jedes durch eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - x_0$ darstellbar ist*

$$y = \mathfrak{P}(x - x_0), \quad y = -\mathfrak{P}(x - x_0),$$

2. *beim Durchlaufen einer einfach geschlossenen Linie y in seinen ursprünglichen Wert oder in seinen entgegengesetzten Wert $-y$ übergeht, je nachdem die Linie eine gerade oder eine ungerade Anzahl der Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 einschließt.*

Die Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 heißen die „*Verzweigungspunkte*" von y. Wir haben hier den Fall $A_0 \neq 0$ vorausgesetzt. Ist $A_0 = 0$, so bleiben vorstehende Sätze gültig, nur daß dann $a_4 = \infty$ zu nehmen ist. Wir denken uns nunmehr in die komplexe Zahlenebene (oder Zahlenkugel) vom Punkte a_1 zum Punkte a_2 einen *Schnitt* angebracht. Jeder Punkt λ, der von dem Schnitte getroffen wird, erscheint nach Ausführung des Schnittes einmal auf dem linken Rand des Schnittes, ein zweites Mal auf dem rechten Rand; wir unterscheiden diese zwei Punkte, die denselben Wert λ von x repräsentieren, durch die Bezeichnung λ^+, λ^- voneinander (Fig. 77).

Fig. 77.

In derselben Weise führen wir einen Schnitt vom Punkte a_3 zum Punkte a_4, der jedoch so gewählt wird, daß er den Schnitt $a_1 \ldots a_2$ nicht trifft. Die Punkte der beiden Schnittränder, welche denselben Wert μ von x repräsentieren, seien wieder mit μ^+, μ^- bezeichnet.

Die mit den Schnitten $a_1 a_2$, $a_3 a_4$ versehene Ebene (oder Kugel) wollen wir mit E bezeichnen. Die Punkte auf den Rändern der Schnitte bilden die „*Begrenzung*" von E.

Fixieren wir irgendeinen Punkt x_0 in der Ebene E und ordnen wir diesem Punkte einen der beiden zugehörigen Werte von y — wir wollen ihn mit y_0 bezeichnen — zu. Gehen wir von x_0 stetig nach x auf einem im Innern von E verlaufenden Wege C, so wird y_0

stetig in einen der beiden x entsprechenden Werte von y übergehen. Dieser Wert von y ist nun unabhängig von dem gewählten Wege. Denn sei C_1 ein anderer Weg, so bildet derselbe mit C eine geschlossene Linie, die notwendig eine gerade Anzahl der Punkte a_1, a_3, a_4 einschließt (Fig. 28). Gehen wir also von x_0 längs C nach x, so geht y_0 etwa stetig in y über, gehen wir weiter von x längs C_1 nach x_0, so geht y wieder stetig in den Wert y_0 zurück. Durchlaufen wir daher C_1 in umgekehrter Richtung (von x_0 nach x), so wird y_0 in y übergehen. Ordnen wir jedem Punkte x der Ebene E denjenigen Wert von y zu, der in der angegebenen Weise entsteht, so haben wir dadurch eine *eindeutige* Funktion in der Ebene E bestimmt.

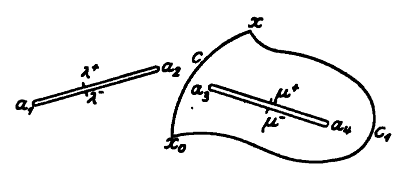


Fig. 78.

Man bemerkt sofort, daß den Randpunkten λ^+ und λ^- (oder μ^+ und μ^-) entgegengesetzte Werte von y entsprechen.

Wir denken uns nun ein zweites Exemplar E' der Ebene (oder Kugel) E genommen und dasselbe dicht über die Ebene E parallel zu ihr gelegt, so daß zwei denselben Wert x repräsentierende Punkte senkrecht übereinander liegen. Wenn y der Wert ist, welcher dem Punkte x in der Ebene E zugeordnet wurde, so soll dem Punkte x der Ebene E' der Wert $-y$ zugeordnet werden. Was die Punkte auf den Schnitträndern betrifft, so ist folgendes klar. Dem Punkte λ^+

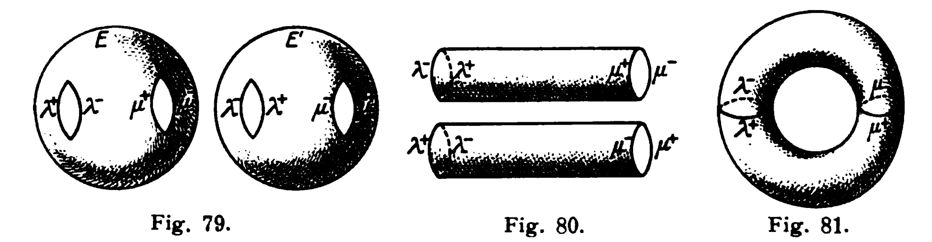


Fig. 79. Fig. 80. Fig. 81.

in der Ebene E ist derselbe Wert y zugeordnet, wie dem Punkte λ^- in der Ebene E' und umgekehrt dem Punkte λ^- der Ebene E derselbe Wert y, wie dem Punkte λ^+ in der Ebene E'. Entsprechendes gilt von den Randpunkten μ^+ und μ^-.

Heften wir nun den linken Rand jedes Schnittes in der Ebene E an den rechten Rand des entsprechenden Schnittes der Ebene E' und vice versa, und zwar so, daß entsprechende Randpunkte aufeinanderfallen, so entsteht eine aus den beiden Ebenen E und E' bestehende Fläche, auf deren Punkte die Stellen (x, y) des elliptischen Grundgebildes eindeutig umkehrbar bezogen sind. Wir nennen E und E' die *Blätter* der Fläche, die Linien $a_1 a_2$ und $a_3 a_4$, bei deren

Überschreiten man aus einem Blatt in das andere gelangt, die *Verzweigungs-* oder *Übergangslinien.*

Diese Fläche ist die gewöhnlich als Riemannsche Fläche des elliptischen Grundgebildes bezeichnete Fläche. Wir können von ihr, wie man an den beistehenden Figuren leicht einsieht, durch stetige Deformation zur Hauptform übergehen. Man denke sich nämlich E und E' als Kugeln, auf denen die Verzweigungsschnitte zu Kreisen erweitert sind (Fig. 79); dann ziehe man diese Kugeln zu Zylindern aus (Fig. 80), und schließlich biege man die beiden Zylinder zu einer Ringfläche zusammen, wobei man die einander zugeordneten Randteile von E' und E zur Deckung bringt (Fig. 81). Die Ufer der Schnitte $a_1 a_2$ und $a_3 a_4$ gehen dann auf der Ringfläche in je einen Meridiankreis über.

6. Kapitel.

Elliptische Integrale.

§ 1. Definitionen.

Es sei

$$y^2 = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4, \tag{1}$$

wo das Polynom auf der rechten Seite keine mehrfache Nullstelle besitzt; y ist also die Quadratwurzel aus einem Polynom 3ten oder 4ten Grades in x.

In jedem Punkte der *Riemann*schen Fläche F des Gebildes (1) haben sowohl x als auch y einen ganz bestimmten Wert; man sagt: Auf der *Riemann*schen Fläche F sind x und y *eindeutige Funktionen des Ortes.* Ist $R(x, y)$ irgendeine rationale Funktion von x und y, so wird auch sie in jedem Punkte der Fläche F einen ganz bestimmten Wert besitzen, also eine eindeutige Funktion des Ortes auf F sein.

Wir betrachten zwei Punkte p_1, p_2 der Fläche F und verbinden sie durch irgendeine Linie. Da längs dieser Linie in jedem Punkte sowohl x als auch y einen ganz bestimmten Wert haben, so hat das Integral

$$J = \int_{p_1(x_1, y_1)}^{p_2(x_2, y_2)} R(x, y)\, dx, \tag{2}$$

genommen über die Linie $p_1 p_2$, jedenfalls dann einen ganz bestimmten Wert, falls x und $R(x, y)$ auf dem Integrationswege endlich bleiben. Aber auch wenn x oder $R(x, y)$ auf der Linie $p_1 \ldots p_2$ Unendlichkeitsstellen haben, kann das Integral einen endlichen Wert haben, es ist

dann eben ein uneigentliches Integral[1]). Wir nennen das Inte ein *bestimmtes elliptisches Integral.*

Lassen wir in (2) die obere Grenze p_2 variabel und füg eine willkürliche Konstante hinzu, so erhalten wir eine Funkt $x = x_2$

$$J = \int R(x, y)\, dx,$$

welche der Differentialgleichung

$$\frac{dJ}{dx} = R(x, y)$$

genügt. Wir nennen sie ein *unbestimmtes elliptisches Integra*

§ 2. Die unbestimmten elliptischen Integrale

Wir wollen versuchen, *beliebige unbestimmte elliptische I durch gewisse spezielle unter ihnen auszudrücken.*

Nach Kap. 5, § 3 läßt sich durch eine Substitution

$$(1)\qquad x = \frac{ax' + b}{cx' + d}, \quad y = \frac{y'}{(cx' + d)^2} \qquad (ad -$$

die Gleichung

$$y^2 = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

in die Form

$$(2)\qquad y'^2 = 4x'^3 - g_2 x' - g_3$$

transformieren. Nun ist

$$\frac{dx}{dx'} = \frac{1}{(cx' + d)^2};$$

durch die Substitution (1) geht also das elliptische Integral

$$z = \int R(x, y)\, dx$$

über in

$$(3)\qquad z = \int \overline{R}(x', y')\, dx',$$

wo $\overline{R}$ wieder eine rationale Funktion ist und zwischen x' Gleichung (2) besteht. Wir setzen

$$x' = \wp(u), \quad y' = \wp'(u);$$

dann geht (3) über in

$$z = \int \overline{R}\left(\wp(u),\ \wp'(u)\right) \wp'(u)\, du = \int F(u)\, du,$$

wo $F(u)$ eine elliptische Funktion bedeutet.

---

[1]) Man definiert ein uneigentliches Integral als Grenzwert ein z. B.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{h=1} \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{1-x}},$$

wobei h von links gegen 1 rückt.

Nach Kap. 1, § 12 läßt sich nun aber die *allgemeinste elliptische Funktion* $F(u)$ darstellen in der Form

$$F(u) = C + \sum_a \{A\zeta(u-a) + A_1\wp(u-a) + A_2\wp'(u-a) + \dots + A_r\wp^{(r-1)}(u-a)\};$$

zwischen den Residuen A besteht dabei die Gleichung

$$\Sigma A = 0.$$

Also wird

$$z = \int F(u)du = Cu + \Sigma[A\int\zeta(u-a)du + A_1\int\wp(u-a)du + A_2\wp(u-a) + \dots + A_r\wp^{(r-2)}(u-a)] + C_1,$$

oder, da

$$\zeta(u-a) = \frac{d\log\sigma(u-a)}{du}, \quad \wp(u-a) = -\frac{d\zeta(u-a)}{du}$$

ist,

$$(4)\quad \begin{cases} z = C_1 + Cu + \Sigma A\log\sigma(u-a) - \Sigma A_1\zeta(u-a) \\ \quad + \Sigma(A_2\wp(u-a) + \dots + A_r\wp^{(r-2)}(u-a)). \end{cases}$$

Die letzte Summe ist als elliptische Funktion rational durch $\wp(u)$ und $\wp'(u)$, d. h. durch x und y ausdrückbar[1]).

Wir bringen die rechte Seite von (4) noch auf eine andere Gestalt, um das Integral z durch möglichst wenige Terme transzendenter Natur auszudrücken. Zunächst bemerken wir, daß

$$\zeta(u-a) - \zeta(u)$$

die Perioden ω_1 und ω_2 besitzt. Wir ersetzen deshalb

$$\Sigma A_1\zeta(u-a) \quad \text{durch} \quad \zeta(u)\cdot\Sigma A_1 + \Sigma A_1[\zeta(u-a) - \zeta(u)].$$

Sodann wollen wir

$$\Sigma A\log\sigma(u-a) = \Sigma A\log\sigma(u-a) - \log\sigma(u)\Sigma A$$

ersetzen durch

$$\Sigma A\left[\log\frac{\sigma(a-u)}{\sigma(u)\sigma(a)} + \frac{\sigma'(a)}{\sigma(a)}u\right].$$

Der Unterschied zwischen beiden Summen ist offenbar eine lineare Funktion von u. Wir bemerken noch, daß in der vorstehenden Summe gegebenenfalls das $a = 0$ entsprechende Glied zu unterdrücken ist. Die Gleichung (4) läßt sich nunmehr so schreiben:

$$(4^*)\quad \begin{cases} z = c + c_1u + c_2\zeta(u) + \Sigma A\left[\log\frac{\sigma(a-u)}{\sigma(u)\sigma(a)} + \frac{\sigma'(a)}{\sigma(a)}u\right] \\ \quad + R_1(\wp(u), \wp'(u)), \end{cases}$$

wo R_1 eine rationale Funktion bedeutet.

[1]) Der Einfachheit halber schreiben wir wieder x, y statt x', y'. (A d. H.)

Es setzt sich also das allgemeinste elliptische Integral linear zusammen aus Gliedern der Form

$$u,\quad \zeta(u),\quad \log\frac{\sigma(a-u)}{\sigma(u)\sigma(a)}+\frac{\sigma'(a)}{\sigma(a)}u$$

und aus einer rationalen Funktion von $x=\wp(u)$, $y=\wp'(u)$.

Diese einzelnen Glieder sind selbst elliptische Integrale. Nämlich:

(I) $$u=\int du=\int\frac{d\wp(u)}{\wp'(u)}=\int\frac{dx}{y}.$$

Dieses Integral $\int\frac{dx}{y}$ heißt *elliptisches Normalintegral erster Gattung.*

(II) $$\zeta(u)=-\int\wp(u)\,du=-\int\frac{x\,dx}{y}.$$

Dieses Integral $\int\frac{x\,dx}{y}$ heißt *elliptisches Normalintegral zweiter Gattung.*

Um auch

$$\log\frac{\sigma(a-u)}{\sigma(u)\sigma(a)}+\frac{\sigma'(a)}{\sigma(a)}u=\log\frac{\sigma(a-u)}{\sigma(u)\sigma(a)}+\zeta(a)u$$

als elliptisches Integral darzustellen, benutzen wir die Gleichung

$$\frac{1}{2}\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}=\zeta(u+v)-\zeta(u)-\zeta(v),$$

die wir in § 12 des 1. Kapitels ableiteten. Wir setzen in derselben $v=-a$ und integrieren dann nach u; auf diese Weise kommt

$$\int\frac{1}{2}\frac{\wp'(u)+\wp'(a)}{\wp(u)-\wp(a)}du=\int\zeta(u-a)du-\int\zeta(u)du+\int\zeta(a)du$$
$$=\log\sigma(a-u)-\log\sigma(u)+\zeta(a)\cdot u-\log\sigma(a)$$

bei geeigneter Verfügung über die Integrationskonstante. Setzen wir noch

$$\wp(u)=x,\quad \wp'(u)=y,\quad \wp(a)=x_0,\quad \wp'(a)=y_0,$$

so kommt

(III) $$\log\frac{\sigma(a-u)}{\sigma(u)\sigma(a)}+\frac{\sigma'(a)}{\sigma(a)}u=\int\frac{1}{2}\frac{y+y_0}{x-x_0}\frac{dx}{y}.$$

Dieses Integral heißt *elliptisches Normalintegral dritter Gattung.* Dasselbe hängt von einer willkürlich bleibenden Stelle $x_0=\wp(a)$, $y_0=\wp'(a)$ des elliptischen Grundgebildes ab.

Das hauptsächlichste Ergebnis unserer Untersuchung fassen wir in folgenden Satz zusammen:

Wenn y definiert ist durch die Gleichung

$$y^2=4x^3-g_2x-g_3,$$

so läßt sich das allgemeinste Integral der Form

$$z=\int R(x,y)dx$$

darstellen als eine lineare Funktion von Integralen der Gestalt

$$\int \frac{dx}{y}, \quad \int \frac{x\,dx}{y}, \quad \int \frac{1}{2} \frac{y+y_0}{x-x_0} \frac{dx}{y},$$

vermehrt um eine rationale Funktion von x und y.

D. h. es ist

$$\int R(x, y)dy = c_1 \int \frac{dx}{y} + c_2 \int \frac{x\,dx}{y} + \Sigma A \int \frac{1}{2} \frac{y+y_0}{x-x_0} \frac{dx}{y} + R_2(x, y).$$

In der Summe auf der rechten Seite wechseln von Glied zu Glied die Konstanten A, x_0, y_0.

§ 3. Die bestimmten elliptischen Integrale.

Wir wollen in diesem Paragraphen untersuchen, in welcher Weise der Wert eines elliptischen Integrales

$$\int_{p_1}^{p_2} R(x, y)\,dx$$

von dem p_1 mit p_2 verbindenden Integrationswege abhängt.

Nach § 2 dürfen wir uns dabei auf die Betrachtung der Normalintegrale

$$J_1 = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dx}{y}, \quad J_2 = \int_{p_1}^{p_2} \frac{x\,dx}{y}, \quad J_3 = \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{2} \frac{y+y_0}{x-x_0} \frac{dx}{y} \quad (y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3)$$

beschränken.

Die Hauptform der *Riemann*schen Fläche denken wir uns durch Zusammenbiegung aus dem Periodenparallelogramm entstanden. Bezeichnen wir mit A^+, A^-, B^+, B^- die Seiten des Parallelogramms, so finden wir dieselben auf der *Riemann*schen Fläche in der Weise wieder, daß A^+ mit A^- in der Linie A und B^+ mit B^- in der Linie B zur Deckung gelangt sind. (In der Figur 82 ist der Einfachheit halber das Periodenparallelogramm als Rechteck gezeichnet.) Die Gesamtheit der nicht auf A und B liegenden Punkte der *Riemann*schen Fläche nennen wir T. Die aus A^+ entstandene Seite der Linie A nennen wir die *positive*, die aus A^- entstandene die *negative*. Einen Punkt p von A nennen wir p^+ oder p^-, je nachdem wir ihn uns durch Hineinrücken eines Punktes von T auf die positive oder die negative Seite von A entstanden denken. Dieselben Festsetzungen mögen für B gelten.

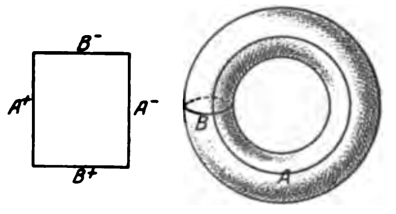


Fig. 82.

Jedem Punkte p von T entspricht ein bestimmter Punkt $u = u(p$ des Periodenparallelogramms. Dann ist längs A

$$u(p^-) - u(p^+) = \omega_1$$

und längs B

$$u(p^-) - u(p^+) = \omega_2.$$

Liegt eine Linie $p \dots p_2$ ganz in T, so entspricht ihr eine im Innern des Periodenparallelogramms liegende Linie $u_1 \dots u_2$, und es ist

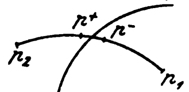


Fig. 83.

$$J_1 = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dx}{y} = \int_{u_1}^{u_2} du = u(p_2) - u(p_1).$$

Überschreitet dagegen $p_1 \dots p_2$ die Linie A, und zwar von der negativen zur positiven Seite, so ist (Fig. 83)

$$J_1 = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dx}{y} = \int_{p_1}^{p^-} + \int_{p^+}^{p_2} = u(p^-) - u(p_1) + u(p_2) - u(p^+)$$
$$= u(p_2) - u(p_1) + \omega_1.$$

Überschreitet $p_1 \dots p_2$ die Linie A von der positiven zur negativen Seite, so ist

$$J_1 = u(p_2) - u(p_1) - \omega_1.$$

Ebenso gilt natürlich, wenn der Weg $p_1 \dots p_2$ die Linie B einmal überschreitet,

$$J_1 = u(p_2) - u(p_1) \pm \omega_2,$$

wo das positive oder negativen Vorzeichen steht, je nachdem B von der negativen zur positiven oder von der positiven zur negativen Seite überschritten wird.

Führt nun der Integrationsweg ganz beliebig von p_1 nach p_2, so zerlegen wir ihn durch Zwischenpunkte $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(k)}$ in die Wege $p_1 \dots p^{(1)}, p^{(1)} \dots p^{(2)}, \dots, p^{(k)} \dots p_2$, so daß jeder dieser Wege nur einen Punkt mit einer der Linien A, B gemein hat. *Dann ist*

$$J_1 = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dx}{y} = \int_{p_1}^{p^{(1)}} + \int_{p^{(1)}}^{p^{(2)}} + \dots + \int_{p^{(k)}}^{p_2} = u(p_2) - u(p_1) + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2,$$

wo m_1 angibt, wieviel häufiger der Integrationsweg die Linie A von der negativen zur positiven Seite als in umgekehrter Richtung durchkreuzt, und m_2 dieselbe Bedeutung für B besitzt.

Insbesondere folgt also

$$\int_C \frac{dx}{y} = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2,$$

wenn C eine geschlossene Kurve ist.

Der Wert des über eine geschlossene Kurve erstreckten elliptischen Integrals erster Gattung ist also gleich einer Periode.

Läßt sich eine solche geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt zusammenziehen, so ist nach dem Satze von *Cauchy* offenbar

$$\int_C \frac{dx}{y} = 0.$$

Die eigentlichen Perioden kommen also dadurch zustande, daß es auf dem Kreisring geschlossene Linien gibt, die sich nicht stetig auf einen Punkt zusammenziehen lassen.

Wir betrachten jetzt das bestimmte Normalintegral 2ter *Gattung*

$$J_2 = \int_{p_1}^{p_2} \frac{x\,dx}{y}.$$

Liegt die Integrationskurve ganz in T, so ist

$$J_2 = \int_{u(p_1)}^{u(p_2)} \wp(u)\,du = -\zeta(u(p_2)) + \zeta(u(p_1)).$$

Längs A ist nun $u(p^-) - u(p^+) = \omega_1$, also

$$\zeta(u(p^-)) - \zeta(u(p^+)) = \eta_1;$$

und entsprechend längs B

$$\zeta(u(p^-)) - \zeta(u(p^+)) = \eta_2.$$

Daraus folgt für den Fall einer beliebigen Linie $p_1 \dots p_2$

$$J_2 = \int_{p_1}^{p_2} \frac{x\,dx}{y} = \zeta(u(p_1)) - \zeta(u(p_2)) - m_1\eta_1 - m_2\eta_2,$$

wo m_1 *und* m_2 *die oben beim Integral erster Gattung erklärte Bedeutung haben.* Man nennt η_1 und η_2 auch die *Perioden* des Integrals zweiter Gattung, da sie dieselbe Rolle spielen, wie ω_1 und ω_2 beim Integral erster Gattung.

Endlich untersuchen wir das Normalintegral 3ter *Gattung*

$$J_3 = \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{2}\,\frac{y+y_0}{x-x_0}\,\frac{dx}{y}.$$

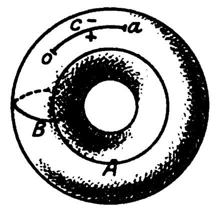


Fig. 84.

Es sei $x_0 = \wp(a)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß die Punkte $u = 0$ und $u = a$ im *Innern* des Periodenparallelogramms liegen. Wir verbinden sie durch eine Kurve. Dieser entspricht auf dem Kreisring eine Linie C, auf welcher wir wieder eine positive und eine negative Seite unterscheiden (Fig. 84).

Vermeidet der Weg $p_1 \ldots p_2$ alle drei Kurven A, B, C, so ist

$$J_3 = \int_{u(p_1)}^{u(p_2)} \{\zeta(u-a) - \zeta(u) + \zeta(a)\}\, du = \left[\log \frac{\sigma(a-u)}{\sigma(u)\,\sigma(a)} + \zeta(a)\, u\right]_{u(p_1)}^{u(p_2)},$$

und hier hat die rechts stehende Differenz einen ganz bestimmten Wert, da in dem von $u = 0$ nach $u = a$ aufgeschnittenen Periodenparallelogramm der rechts auftretende Logarithmus eindeutig ist.

Jetzt möge der Weg $p_1 \ldots p_2$ die Kurve C treffen. Zunächst seien $p_1 = p^+$, $p_2 = p^-$ ein und derselbe Punkt auf der positiven und der negativen Seite von C. Der Weg $p^+ \ldots p^-$ umschließt einen der beiden Pole 0 und a des Integranden

$$\zeta(u-a) - \zeta(u) + \zeta(a).$$

Diese Pole sind nach Kap. 1, § 11 von der ersten Ordnung und haben das Residuum -1 bzw. $+1$. Folglich ist für diesen Fall bei geeigneter Fixierung der positiven Seite von C

$$J_3 = 2\pi i.$$

Dieselbe Betrachtung stellen wir für die Linien A und B an. Integrieren wir zunächst von einem Punkte p^+ von A zum zugehörigen Punkt p^- von A, ohne dabei B oder C zu treffen, so ist

$$J_3 = \left[\log \frac{\sigma(a-u)}{\sigma(u)\,\sigma(a)} + \zeta(a)\, u\right]_{u(p^+)}^{u(p^-)};$$

ferner ist $u(p^-) - u(p^+) = \omega_1$ und nach Kap. 1, § 13

$$\sigma(u + \omega_1) = -\, e^{\eta_1 (u + \frac{1}{2}\omega_1)}\, \sigma(u),$$

also

$$\log \frac{\sigma(a - u + \omega_1)}{\sigma(u - \omega_1)\,\sigma(a)} + \zeta(a)(u - \omega_1) = \log \left\{ \frac{-\, e^{\eta_1 (a - u + \frac{1}{2}\omega_1)}}{-\, e^{-\eta_1 (u - \frac{1}{2}\omega_1)}} \frac{\sigma(a-u)}{\sigma(u)\,\sigma(a)} \right\}$$

$$+ \zeta(a) u - \zeta(a)\omega_1 = \log \frac{\sigma(a-u)}{\sigma(u)\,\sigma(a)} + a\eta_1 + \zeta(a) u - \zeta(a)\omega_1;$$

und daher mit Rücksicht auf die Vieldeutigkeit des Logarithmus

$$J_3 = -\, a\eta_1 + \zeta(a)\,\omega_1 + n_1\, 2\pi i = \Omega_1.$$

n_1 ist hierbei eine ganze Zahl, die wir nicht näher bestimmen wollen.

Integrieren wir von einem Punkte p^+ von B zurück nach p^-, so ergibt sich ebenso

$$J_3 = -\, a\eta_2 + \zeta(a)\,\omega_2 + n_2\, 2\pi i = \Omega_2.$$

Die Konstanten Ω_1 und Ω_2 spielen für das bestimmte Normalintegral dritter Gattung dieselbe Rolle, wie die Werte ω_1, ω_2 bzw. η_1, η_2 für die Integrale erster und zweiter Gattung; sie heißen daher auch *Perioden*.

Ist nun schließlich ein ganz beliebiger Integrationsweg von p_1 nach p_2 vorgeschrieben, der nur die Punkte $u = 0$ und $u = a$ ver-

meidet, so verbinden wir p_1 mit p_2 durch eine Hilfslinie, die A, B und C nicht trifft, und nennen den Wert des über sie erstreckten Integrales $\bar{J}_3$. Diesen Wert hatten wir an erster Stelle ermittelt.

Dann ist

$$J_3 = \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{2} \frac{y+y_0}{x-x_0} \frac{dx}{y} = \bar{J}_3 + m\, 2\pi i + m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2$$

mit ganzzahligen m, m_1, m_2. Hierbei haben m_1 und m_2 die frühere Bedeutung, und m gibt an, um wieviel häufiger der Integrationsweg $p_1 \ldots p_2$ die Linie C von der negativen zur positiven Seite überschreitet, als in umgekehrter Richtung; die Bedeutungen von m, m_1, m_2 sind also ganz analog. Der Beweis ergibt sich wie früher durch Zerlegung des Integrationsweges in solche Stücke, die genau einmal eine der Kurven A, B, C schneiden.

7. Kapitel.

Die Transformation der elliptischen Funktionen.

§ 1. Lineare Transformation der *Weierstraß*schen Funktionen.

Wenn

$$(1) \qquad \bar{\omega}_2 = \alpha\omega_2 + \beta\omega_1, \qquad \bar{\omega}_1 = \gamma\omega_2 + \delta\omega_1$$

gesetzt wird, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ bezeichnen, so sagt man, $(\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_1)$ gehen aus (ω_2, ω_1) durch *lineare Transformation* hervor. Wir beschäftigen uns hier zunächst mit der Frage, wie sich die *Weierstraßschen Funktionen* bei linearer Transformation der Perioden verhalten. Es war

$$\sigma(u/\omega_1, \omega_2) = u \,\Pi' \left\{ \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2} \right\} \qquad (w = m_1\omega_1 + m_2\omega_2).$$

Wenn wir ω_1, ω_2 durch $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ ersetzen, so ändert sich die Gesamtheit der Perioden w gar nicht. Also ist

$$(2) \qquad \sigma(u/\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = \sigma(u/\omega_1, \omega_2).$$

Ebenso erkennt man die Richtigkeit der Gleichungen

$$(3) \qquad \zeta(u/\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = \zeta(u/\omega_1, \omega_2), \quad \wp(u/\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = \wp(u/\omega_1, \omega_2).$$

Die Funktionen $\sigma(u)$, $\zeta(u)$, $\wp(u)$ *sind also bei linearer Transformation der Perioden invariant*[1]).

Wie wir schon in Kap. 4 konstatierten, sind auch g_2, g_3, $\Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2$ invariant.

[1]) Vgl. Kap. 1, § 15.

Wie verhalten sich die Größen

$$\eta_1 = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\middle|\omega_1, \omega_2\right), \qquad \eta_2 = 2\zeta\left(\frac{\omega_2}{2}\middle|\omega_1, \omega_2\right)?$$

Bezeichnen wir mit $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ die Werte, in welche η_1, η_2 übergehen, falls ω_1, ω_2 durch $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ ersetzt werden, so ist

$$\bar{\eta}_2 = 2\zeta\left(\frac{\alpha\omega_2+\beta\omega_1}{2}\middle|\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2\right) = 2\zeta\left(\frac{\alpha\omega_2+\beta\omega_1}{2}\middle|\omega_1, \omega_2\right),$$

$$\bar{\eta}_1 = 2\zeta\left(\frac{\gamma\omega_2+\delta\omega_1}{2}\middle|\omega_1, \omega_2\right).$$

Nun folgt aus

$$\zeta(u + \alpha\omega_2 + \beta\omega_1/\omega_1, \omega_2) = \zeta(u/\omega_1, \omega_2) + \alpha\eta_2 + \beta\eta_1$$

für $u = -\frac{\alpha\omega_2+\beta\omega_1}{2}$

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \bar{\eta}_2 = \alpha\eta_2 + \beta\eta_1, & \text{und entsprechend} \\ \bar{\eta}_1 = \gamma\eta_2 + \delta\eta_1. \end{cases}$$

Es erfahren also η_1, η_2 dieselbe Transformation wie ω_1, ω_2.

Die Größen

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\middle|\omega_1, \omega_2\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\middle|\omega_1, \omega_2\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\middle|\omega_1, \omega_2\right)$$

erfahren offenbar bei linearer Transformation der Perioden eine Vertauschung.

§ 2. Lineare Transformation der ϑ-Funktionen.

Aus den Formeln des Kap. 2 (§ 6 (II) und § 9 (9)) folgt

$$\text{(1)} \qquad \vartheta_1(v/\tau) = \sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}\, e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2}\sigma(u), \qquad \left(v = \frac{u}{\omega_1}, \ \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

Bilden wir dieselbe Gleichung statt für die Perioden ω_1, ω_2 für die Perioden $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$, die mit ω_1, ω_2 durch die Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen verbunden sind, so folgt

$$\text{(1}'\text{)} \qquad \vartheta_1(\bar{v}/\bar{\tau}) = \sqrt{\frac{\bar{\omega}_1}{2\pi}}\sqrt[8]{\bar{\Delta}}\, e^{-\frac{\bar{\eta}_1}{2\bar{\omega}_1}u^2}\sigma(u), \qquad \left(\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{u}{\bar{\omega}_1} = v\cdot\frac{\omega_1}{\bar{\omega}_1} = \frac{v}{\gamma\tau+\delta} \\ \bar{\tau} &= \frac{\bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_1} = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta} \end{aligned}\right).$$

Dividieren wir (1′) durch (1), so folgt, weil $\bar{\Delta} = \Delta$ ist,

$$\vartheta_1\left(\frac{v}{\gamma\tau+\delta}\middle|\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \vartheta_1(v/\tau)\cdot\sqrt{\frac{\bar{\omega}_1}{\omega_1}}\cdot\varepsilon\cdot e^{\left(\frac{\eta_1}{2\omega_1}-\frac{\bar{\eta}_1}{2\bar{\omega}_1}\right)u^2},$$

wo ε eine 8te Einheitswurzel bezeichnet. Nun ist

$$\frac{\eta_1}{\omega_1} - \frac{\bar{\eta}_1}{\bar{\omega}_1} = \frac{\eta_1(\gamma\omega_2+\delta\omega_1)-(\gamma\eta_2+\delta\eta_1)\omega_1}{\omega_1\bar{\omega}_1} = \frac{\gamma(\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1)}{\omega_1\bar{\omega}_1} = \frac{\gamma\cdot 2\pi i}{\omega_1\bar{\omega}_1}, \quad u = \omega_1 v$$

so daß wir folgende Formel für die lineare Transformation von ϑ_1 erhalten:

$$\vartheta_1\left(\frac{v}{\gamma\tau+\delta}\,\middle|\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=\varepsilon\sqrt{\gamma\tau+\delta}\,e^{\frac{i\pi\gamma}{\gamma\tau+\delta}v^2}\,\vartheta_1(v/\tau). \tag{2}$$

Auf die Bestimmung der 8ten Einheitswurzel ε beziehen sich eine große Zahl von Arbeiten. Die gründlichste Untersuchung hierüber hat *Dedekind* in einer Erläuterung zu einer nachgelassenen Arbeit *Riemanns* ausgeführt.

Dividieren wir (2) durch $\vartheta_1(v/\tau)$ und setzen dann $v=0$, so kommt

$$\varepsilon\sqrt{\gamma\tau+\delta}=\frac{1}{\gamma\tau+\delta}\cdot\frac{\vartheta_1'\left(0\,\middle|\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)}{\vartheta_1'(0/\tau)}. \tag{3}$$

Nun war (Kap. 2., § 10 (5))

$$\vartheta_1'(0/\tau)=2\pi h^{\frac{1}{4}}\Pi(1-h^{2n})^3 \qquad (h=e^{i\pi\tau}).$$

Daher kommt

$$\varepsilon\sqrt{\gamma\tau+\delta}=\frac{1}{\gamma\tau+\delta}\cdot\frac{h'^{\frac{1}{4}}\Pi(1-h'^{2n})^3}{h^{\frac{1}{4}}\Pi(1-h^{2n})^3} \qquad \left(h=e^{i\pi\tau},\ h'=e^{i\pi\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}}\right). \tag{3'}$$

Wir heben noch die speziellen Fälle der Transformationen

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,1\\ 0\,1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,&-1\\ 1,&0\end{pmatrix}$$

hervor, aus welchen sich, wie man leicht beweisen kann, durch Zusammensetzung die allgemeinste lineare Transformation ableiten läßt. Diesen speziellen Transformationen entsprechen die Gleichungen

$$\vartheta_1(v/\tau+1)=\varepsilon_1\vartheta_1(v/\tau) \tag{4a}$$

$$\vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)=\varepsilon_2\sqrt{\tau}\,e^{\frac{i\pi}{\tau}v^2}\,\vartheta_1(v/\tau). \tag{4b}$$

Im Falle (4a) ist nach (3'), weil $h'=e^{i\pi(\tau+1)}=e^{i\pi}\cdot h$, also $h'^{\frac{1}{4}}=e^{\frac{i\pi}{4}}h^{\frac{1}{4}}$ ist,

$$\varepsilon_1=e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Im Falle (4b) hat man, wenn unter ε_2' eine achte Einheitswurzel verstanden wird,

$$\varepsilon_2\sqrt{\tau}=\varepsilon_2'\sqrt{\frac{\tau}{i}}=\frac{1}{\tau}\cdot\frac{h'^{\frac{1}{4}}\Pi(1-h'^{2n})^3}{h^{\frac{1}{4}}\Pi(1-h^{2n})^3} \qquad \left(h=e^{i\pi\tau},\ h'=e^{-\frac{i\pi}{\tau}}\right).$$

Für $\tau=i$ wird $h=h'$. Wählt man daher für $\sqrt{\frac{\tau}{i}}$ in der oberen τ-Halbebene diejenige Bestimmung der Quadratwurzel, die sich für $\tau=i$ auf $+1$ reduziert, so kommt $\varepsilon_2'=\frac{1}{i}$.

Man findet daher definitiv

$$(5)\quad \begin{cases} \vartheta_1(v/\tau+1) = e^{\frac{i\pi}{4}}\vartheta_1(v/\tau), \\ \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\,/-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\tau}{i}}\,e^{\frac{i\pi}{\tau}\cdot v^2}\vartheta_1(v/\tau). \end{cases}$$

Von der Funktion ϑ_1 können wir zu den drei anderen ϑ tionen durch die Gleichungen (Kap. 2, § 8)

$$\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}/\tau\right) = \vartheta_2(v/\tau), \quad \vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}/\tau\right) = i\,e^{-\frac{i\pi\tau}{4}-i\pi v}\vartheta_0(v/\tau),$$

$$\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}/\tau\right) = e^{-\frac{i\pi\tau}{4}-i\pi v}\vartheta_3(v/\tau)$$

übergehen. So finden wir aus (5)

$$(5')\quad \begin{cases} \vartheta_2(v/\tau+1) = e^{\frac{i\pi}{4}}\vartheta_2(v/\tau), \quad \vartheta_3(v/\tau+1) = \vartheta_0(v/\tau), \\ \vartheta_0(v/\tau+1) = \vartheta_3(v/\tau), \\ \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}/-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\,e^{\frac{i\pi}{\tau}v^2}\vartheta_0(v/\tau), \quad \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}/-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\,e^{\frac{i\pi}{\tau}v^2}\vartheta_3 \\ \vartheta_0\left(\frac{v}{\tau}/-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\,e^{\frac{i\pi}{\tau}v^2}\vartheta_2(v/\tau). \end{cases}$$

Für $v = 0$ ist also insbesondere nach (5)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2\tau} = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i\pi n^2}{\tau}},$$

Diese Formel tritt in vielen Anwendungen auf.

Ist

$$\tau = r + is,$$

so ist

$$-\frac{1}{\tau} = \frac{-1}{r+is} = \frac{-r+is}{r^2+s^2}$$

und also

$$|h| = |e^{i\pi\tau}| = e^{-\pi s}, \qquad |h'| = \left|e^{-\frac{i\pi}{\tau}}\right| = e^{-\pi\frac{s}{r^2+s^2}}.$$

Es wird daher $|h'| < |h|$ sein, wenn $r^2+s^2 < 1$, d. i. $|\tau| < 1$ diesem Falle konvergieren daher die Reihen $\vartheta_\alpha\left(\frac{v}{\tau}/-\frac{1}{\tau}\right)$ bes die Reihen $\vartheta_\alpha(v/\tau)$, und unsere Transformationsformeln werden *zweckmäßig zu numerischen Rechnungen* benutzt. Allgemein ge (Kap. 4, § 1) die Formel (2) den Wert von τ zu ersetzen durch de valenten Wert $\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta} = r+is$, wo (vgl. Kap. 4, § 1) $-\frac{1}{2} \leqq r <$ $r^2+s^2 \geqq 1$ ist. Das Minimum von s ist dann $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und dah

$$|h'| \leqq e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

§ 3. Transformation 2ter Ordnung.

Wenn

$$(1)\qquad \begin{cases} \bar\omega_2 = a\,\omega_2 + b\,\omega_1 \\ \bar\omega_1 = c\,\omega_2 + d\,\omega_1 \end{cases}$$

ist, wo a, b, c, d ganze Zahlen der Determinante

$$(2)\qquad ad - bc = n > 0$$

bezeichnen, so sagen wir, $(\bar\omega_2, \bar\omega_1)$ *gehen durch Transformation* n^{ter} *Ordnung aus* (ω_2, ω_1) *hervor.*

Transformation erster Ordnung ist also gleichbedeutend mit „linearer" Transformation.

Wir wollen nun den einfachsten Fall $n = 2$ betrachten. Wir beweisen zunächst:

Es gibt ein zu $(\bar\omega_2, \bar\omega_1)$ *äquivalentes Paar* $(\bar\Omega_2, \bar\Omega_1)$ *und ein zu* (ω_2, ω_1) *äquivalentes Paar* (Ω_2, Ω_1), *so daß*

$$(1')\qquad \bar\Omega_2 = \Omega_2, \quad \bar\Omega_1 = 2\,\Omega_1$$

ist.

Beim Beweise unterscheiden wir zwei Fälle. Da $ad - bc = 2$ ist, so können c und d nur 1 oder 2 zum gemeinsamen Teiler haben. Ist nun *erstens* 2 Teiler von c und d, so ist

$$\bar\omega_2 = a\,\omega_2 + b\,\omega_1 = \Omega_2,$$

$$\bar\omega_1 = 2\left(\frac{c}{2}\,\omega_2 + \frac{d}{2}\,\omega_1\right) = 2\,\Omega_1.$$

Ist *zweitens* 1 der größte gemeinsame Teiler von c und d, so sei

$$\alpha d - \beta c = 1\ ^{1)},$$

woraus

$$(a - 2\alpha)\,d - (b - 2\beta)\,c = 0, \quad \frac{a - 2\alpha}{b - 2\beta} = \frac{c}{d},$$

$$a = 2\alpha + tc, \quad b = 2\beta + td$$

folgt, wo t eine ganze Zahl ist. Man hat dann

$$\bar\omega_2 = (2\alpha + tc)\,\omega_2 + (2\beta + td)\,\omega_1, \qquad \bar\omega_1 = c\,\omega_2 + d\,\omega_1,$$

also

$$\bar\omega_2 - t\,\bar\omega_1 = 2\,(\alpha\,\omega_2 + \beta\,\omega_1), \qquad \bar\omega_1 = c\,\omega_2 + d\,\omega_1.$$

---

[1]) Sind c und d zwei teilerfremde ganze Zahlen, so läßt sich nach den einfachsten Sätzen der Zahlentheorie die Diophantische Gleichung

$$\alpha d - \beta c = 1$$

stets in ganzen Zahlen α, β lösen. (A. d. H.)

Setzen wir nun

$$\bar{\Omega}_2 = \bar{\omega}_1, \qquad \bar{\Omega}_1 = -\bar{\omega}_2 + t\bar{\omega}_1,$$
$$\Omega_2 = c\,\omega_2 + d\,\omega_1, \quad \Omega_1 = -(\alpha\,\omega_2 + \beta\,\omega_1),$$

so folgt

$$\bar{\Omega}_2 = \Omega_2, \quad \bar{\Omega}_1 = 2\,\Omega_1.$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

Wollen wir nun untersuchen, in welchem Zusammenhange

$$\wp(u/\omega_1, \omega_2) \quad \text{und} \quad \wp(u/\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$$

stehen, so berücksichtigen wir, daß

$$\wp(u/\omega_1, \omega_2) = \wp(u/\Omega_1, \Omega_2) \quad \text{und} \quad \wp(u/\bar{\omega}_1\ \bar{\omega}_2) = \wp(u/\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2)$$

ist. Bezeichnen wir $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$ jetzt neuerdings mit $2\,\omega$, $2\,\omega'$, so ist

$$\Omega_1 = \omega, \quad \Omega_2 = 2\,\omega',$$

und wir haben also nur noch die Aufgabe, festzustellen, in welchem Zusammenhange

$$\wp = \wp(u/2\,\omega, 2\,\omega') \quad \text{und} \quad \bar{\wp} = \wp(u/\omega, 2\,\omega') \tag{3}$$

miteinander stehen.

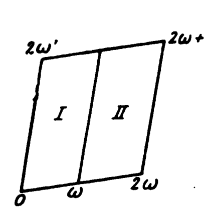


Fig. 85.

Das Periodenparallelogramm von $\wp$ setzt sich aus zwei Periodenparallelogrammen von $\bar{\wp}$ zusammen (Fig. 85).

Wir können $\bar{\wp}$ als elliptische Funktion 4[ten] Grades mit den Perioden 2ω, $2\,\omega'$ ansehen, die an den Stellen $u = 0$ und $u = \omega$ von der 2[ten] Ordnung unendlich wird. Bezeichnen wir die zu $\bar{\wp}$ gehörenden Größen mit überstrichenen Buchstaben, so wird

$$\bar{\wp} - \bar{e}_3 \qquad (\bar{e}_3 = \wp(\omega'/\omega, 2\,\omega'))$$

an denselben Stellen unendlich wie $\bar{\wp}$ und 2fach Null für

$$u = \omega', \quad u = \omega' + \omega.$$

Dieselben Null- und Unendlichkeitsstellen wie $\bar{\wp} - \bar{e}_3$ besitzt

$$(\wp(u) - e_3)(\wp(u + \omega) - e_3).$$

Also ist für konstantes M

$$\bar{\wp}(u) - \bar{e}_3 = M(\wp(u) - e_3)(\wp(u + \omega) - e_3).$$

M ergibt sich durch Entwicklung an der Stelle $u = 0$, und zwar gleich $\frac{1}{e_1 - e_3}$, so daß also

$$(4)\begin{cases} \wp(u/\omega, 2\,\omega') - \wp(\omega'/\omega, 2\,\omega') \\ = \frac{1}{e_1 - e_3}(\wp(u/2\,\omega, 2\,\omega') - \wp(\omega'/2\,\omega, 2\,\omega'))(\wp(u+\omega/2\,\omega, 2\,\omega') - \wp(\omega'/2\,\omega, 2\,\omega')) \end{cases}$$

folgt. Da $\wp(u+\omega)-e_1$ an der Stelle $u=\omega$ von zweiter Ordnung ∞, bei $u=0$ aber von zweiter Ordnung 0 wird und $\frac{1}{\wp(u)-e_1}$ dasselbe Verhalten zeigt, so ist, wie das Einsetzen des Wertes $u=\omega'$ lehrt, $\wp(u+\omega)-e_1=\frac{(e_2-e_1)(e_3-e_1)}{\wp(u)-e_1}$, und *durch* (4) *ist* $\bar{\wp}$ *rational durch* $\wp$ *dargestellt.* Aus der Gleichung (4), die wir kürzer so schreiben:

$$(4') \qquad (\bar{\wp}(u)-\bar{e}_3)=\frac{1}{e_1-e_3}(\wp(u)-e_3)(\wp(u+\omega)-e_3),$$

entsteht durch Vertauschung von ω mit ω'

$$(4'') \qquad (\bar{\bar{\wp}}(u)-\bar{e}_1)=\frac{1}{e_3-e_1}(\wp(u)-e_1)(\wp(u+\omega')-e_1),$$

wo $\bar{\bar{\wp}}(u)=\wp(u/2\,\omega,\,\omega')$, $\bar{e}_1=\wp(\omega/2\,\omega,\,\omega')$ gesetzt ist.

§ 4. Zusammenhangsformeln der *Weierstraß*schen mit den *Jacobi*schen elliptischen Funktionen.

Für das Folgende ist es notwendig, nochmals auf den Zusammenhang zwischen den *Jacobi*schen und *Weierstraß*schen Funktionen zurückzukommen.

Bezeichnen $\omega_1=2\,\omega$, $\omega_2=2\,\omega'$ die Perioden, mit denen $\wp(u)$ gebildet ist, und $s(u)$, $c(u)$, $\Delta(u)$, die mit $\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{\omega'}{\omega}=\tau$ gebildeten elliptischen Funktionen *Jacobis*, so können wir diese folgendermaßen durch $\wp(u)$ ausdrücken. Es war (Kap. 2, § 9 (7) und Kap. 3, § 1 (12))

$$(1) \qquad \begin{aligned} 2\,K &= \pi\,\vartheta_3^2=2\,\omega\sqrt{e_1-e_3}, \\ 2\,i\,K' &= \tau\cdot 2\,K=2\,\omega'\sqrt{e_1-e_3}, \end{aligned} \qquad \varkappa^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}, \quad \varkappa'^2=\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}.$$

Hieraus folgt, daß $s^2(u\sqrt{e_1-e_3})$, $c^2(u\sqrt{e_1-e_3})$, $\Delta^2(u\sqrt{e_1-e_3})$ dieselben Perioden $2\,\omega$, $2\,\omega'$ wie $\wp(u)$ haben. Die Funktion $s^2(u\sqrt{e_1-e_3})$ hat den Doppelpol $u=\omega'$, die Doppelnullstelle $u=0$, und den Wert 1 für $u=\omega$. Daraus folgt

$$\wp(u+\omega')-e_2=C\cdot s^2(u\sqrt{e_1-e_3})=(e_2-e_3)\,s^2(u\sqrt{e_1-e_3}).$$

Entsprechende Überlegungen gelten für c^2 und Δ^2, so daß *folgende Gleichungen bestehen*:

$$(2) \qquad \begin{cases} \wp(u+\omega')-e_1=(e_3-e_1)\,\Delta^2(u\sqrt{e_1-e_3}) \\ \wp(u+\omega')-e_2=(e_3-c_2)\,c^2(u\sqrt{e_1-e_3}) \\ \wp(u+\omega')-e_3=(e_2-s_3)\,s^2(u\sqrt{e_1-e_3}). \end{cases}$$

Vermehrt man u um $\omega, \omega', \omega + \omega'$ und benutzt die Tabelle I in Kap. 3 § 2, so erhält man ein weiteres System von Gleichungen, welches wir mit (2) in folgender *Tabelle* übersichtlich zusammenstellen:

	u	$u+\omega$	$u+\omega+\omega'$	$u+\omega'$
$\wp - e_1$	$(e_1-e_3)\frac{c^2}{s^2}$	$(e_1-e_3)\frac{s^2}{c^2}$	$(e_2-e_1)\frac{1}{\Delta^2}$	$(e_3-e_1)\,\Delta^2$
$\wp - e_2$	$(e_1-e_3)\frac{\Delta^2}{s^2}$	$(e_1-e_2)\frac{1}{c^2}$	$\frac{(e_1-e_2)(e_3-e_2)}{e_1-e_3}\cdot\frac{s^2}{\Delta^2}$	$(e_3-e_2)\,c$
$\wp - e_3$	$(e_1-e_3)\frac{1}{s^2}$	$(e_1-e_3)\frac{\Delta^2}{c^2}$	$(e_2-e_3)\frac{c^2}{\Delta^2}$	$(e_2-e_3)\,s^2$

Das gemeinsame Argument der hier auftretenden Funktionen s, c, Δ ist $u\sqrt{e_1 - e_3}$.

§ 5. Die *Landen*sche Transformation.

Benutzen wir die Tabelle des vorigen Paragraphen und nehmen der Deutlichkeit halber das Periodenverhältnis τ mit in die Bezeichnung der Funktionen s, c, Δ auf, so folgt aus (4') in § 3

$$(\bar{e}_1 - \bar{e}_3)\frac{1}{s^2(u\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_3}/2\tau)} = \frac{1}{s^2(u\sqrt{e_1-e_3}/\tau)}\cdot(e_1-e_3)\cdot\frac{\Delta^2(u\sqrt{e_1-e_3}/\tau)}{c^2(u\sqrt{e_1-e_3}/\tau)}$$

und hieraus

$$s(mu/2\tau) = m\cdot\frac{s(u/\tau)\,c\,(u/\tau)}{\Delta\,(u/\tau)} \qquad \left(m=\sqrt{\frac{\bar{e}_1-\bar{e}_3}{e_1-e_3}}\right). \tag{1}$$

Nach (1) des vorigen Paragraphen ist, wenn $\bar{K}, \bar{K}'$ die zu $s(u/2\tau)$ gehörenden Werte von K, K' bezeichnen,

$$2\bar{K} = \omega\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_3} = K\cdot m, \quad 2i\bar{K}' = 2\omega'\sqrt{\bar{e}_1-\bar{e}_3} = 2iK'\cdot m, \quad \text{d. i.}$$

$$\bar{K} = m\cdot\frac{K}{2}, \quad \bar{K}' = m\cdot K'. \tag{2}$$

Die Werte von m und $\bar{\varkappa}$, dem Modul von $s(u/2\tau)$, lassen sich nun durch $\varkappa$, den Modul von $s(u/\tau)$, ausdrücken. Wir setzen zu dem Zwecke in (1) $u = \frac{K}{2}$, also $mu = \bar{K}$. Dann kommt

$$1 = m\cdot\frac{s\left(\frac{K}{2}\right)c\left(\frac{K}{2}\right)}{\Delta\left(\frac{K}{2}\right)}. \tag{3}$$

Aus $s(u+K) = \frac{c(u)}{\Delta(u)}$, $\Delta(u+K) = \varkappa' \frac{1}{\Delta(u)}$ folgt nach Kap. 3, § 2, für $u = -\frac{K}{2}$, $\Delta^2\left(\frac{K}{2}\right) = \varkappa'$, und demnach wegen (3)

$$1 = m\, s^2\left(\frac{K}{2}\right) = m\left(\frac{1-\Delta^2\left(\frac{K}{2}\right)}{\varkappa^2}\right) = m\,\frac{1-\varkappa'}{\varkappa^2}.$$

Es wird also

$$m = \frac{\varkappa^2}{1-\varkappa'} = \frac{1-\varkappa'^2}{1-\varkappa'} = 1+\varkappa'.$$

Substituiert man $u + iK'$ für u in (1), so folgt nach Kap. 3, § 2

$$-\frac{1}{\bar{\varkappa}}\,\frac{1}{s(mu/2\tau)} = m\cdot\frac{1}{\varkappa^2}\,\frac{\Delta u}{s(u)\,c(u)} \qquad \text{oder} \qquad s(mu/2\tau) = \frac{\varkappa^2}{m\bar{\varkappa}}\,\frac{s(u)\,c(u)}{\Delta(u)}.$$

Daher gilt nach (1)

$$\frac{\varkappa^2}{m\bar{\varkappa}} = m, \quad \bar{\varkappa} = \frac{\varkappa^2}{m^2} = \frac{1-\varkappa'^2}{(1+\varkappa')^2} = \frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}.$$

Wir haben also definitiv, wenn wir die zum Modul $\varkappa$ gehörenden Funktionen mit $s(u,\varkappa)$, $c(u,\varkappa)$, $\Delta(u,\varkappa)$ bezeichnen,

$$s\left((1+\varkappa')u, \frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right) = (1+\varkappa')\frac{s(u,\varkappa)\,c(u,\varkappa)}{\Delta(u,\varkappa)} \qquad (\varkappa^2+\varkappa'^2 = 1). \tag{4}$$

Dies ist die sogenannte Landensche Transformation, die indessen meistens in einer anderen Form dargestellt wird, zu der wir jetzt übergehen wollen.

Setzen wir

$$s(u,\varkappa) = x, \quad s((1+\varkappa')u, \bar{\varkappa}) = y,$$

so wird aus (4) nach Kap. 3, § 2 (9)

$$y = (1+\varkappa')\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-\varkappa^2 x^2}} \tag{4'}$$

und nach Kap. 3, § 3 (4)

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} = du, \qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\bar{\varkappa}^2y^2)}} = (1+\varkappa')\,du.$$

Vermöge der Substitution (4') wird daher

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\bar{\varkappa}^2y^2)}} = (1+\varkappa')\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}. \tag{5}$$

Sind $\varkappa$ und $\varkappa'$ reell und liegen sie zwischen 0 und 1, so wird:

$$\bar{\varkappa} = \frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'} = \frac{1-\varkappa'^2}{(1+\varkappa')^2} = \frac{\varkappa^2}{(1+\varkappa')^2} < \varkappa^2,$$

und die *Gleichung* (5) *führt also die Berechnung eines elliptischen Integrals mit dem Modul* $\varkappa$ *auf die eines elliptischen Integrals mit einem kleineren Modul* $\bar{\varkappa}$ *zurück.* Durch wiederholte Anwendung der *Landen*schen Transformation kann man den Modul immer mehr und mehr verkleinern. Ist der Modul so klein geworden, daß er vernachlässigt werden kann, so ist dann $\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\bar{\varkappa}^2 y^2)}}$ durch $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y$ ersetzbar, so daß also die mehrfach wiederholte *Landen*sche Transformation zur Berechnung der elliptischen Integrale dienen kann.

§ 6. Das arithmetisch-geometrische Mittel.

Die Landensche Transformation gestattet insbesondere eine einfache Berechnung des zwischen den festen Grenzen 0 *und* 1 *erstreckten Integrals*

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}},\text{[1]} \tag{1}$$

wobei $\varkappa$ *als eine gegebene zwischen* 0 *und* 1 *liegende reelle Zahl vorausgesetzt wird.*

Die Gleichung $\bar{K} = \frac{m}{2} K = \frac{1+\varkappa'}{2} K$ aus § 5 liefert

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = \frac{2}{1+\varkappa'} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\bar{\varkappa}^2 x^2)}} \qquad \left(\bar{\varkappa} = \frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right). \tag{2}$$

Das Integral (1) geht durch die Substitution $x = \sin\varphi$ über in

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - \varkappa^2 \sin^2\varphi}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \varkappa'^2 \sin^2\varphi}},$$

so daß die Gleichung (2) so geschrieben werden kann:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \varkappa'^2 \sin^2\varphi}} = \frac{2}{1+\varkappa'} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \bar{\varkappa}'^2 \sin^2\varphi}}, \tag{2'}$$

[1] Die Richtigkeit von (1) erkennt man, indem man $x = s(u)$ setzt und Kap. 3, § 2 benutzt (A. d. H.).

wobei

$$\bar{\varkappa}' = \sqrt{1 - \bar{\varkappa}^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right)^2} = \frac{2\sqrt{\varkappa'}}{1+\varkappa'} \tag{3}$$

ist.

Es sei nun $\varkappa' = \frac{b}{a}$, wo a eine beliebig gewählte positive Zahl bedeutet. Es ist dann $b = a\varkappa'$ positiv und $< a$. Es wird nun $\bar{\varkappa}' = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{b_1}{a_1}$, mit

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}. \tag{4}$$

Aus (2′) folgt

$$\frac{K}{a} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{2}{a+b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \frac{b_1^2}{a_1^2}\sin^2\varphi}} = \tag{5}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_1^2\cos^2\varphi + b_1^2\sin^2\varphi}}.$$

Bilden wir nun die Folgen

$$\begin{cases} a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots \\ b,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots \end{cases} \tag{6}$$

nach der Maßgabe, daß

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

gesetzt wird, so zeigen wir leicht, daß $\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = M(a,b)$ eine bestimmte endliche Zahl ist. Es ist nämlich

$$a_1 = \frac{a+b}{2} < \frac{a+a}{2} = a, \quad b_1 = \sqrt{ab} > \sqrt{bb} = b,$$

$$0 < \frac{a_1 - b_1}{a-b} = \frac{\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}}{a-b} = \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a-b} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} < \frac{1}{2};$$

und allgemein folgen aus $a_n > b_n$ die Ungleichungen

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < a_n, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > b_n,$$

$$0 < \frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} < \frac{1}{2},$$

so daß die Folgen der a_n und b_n beschränkt und monoton sind und gegen eine gemeinsame Grenze konvergieren.

Die Gleichung (5) gibt nun, durch Übergang zur Grenze $n = \infty$,

$$\frac{K}{a} = \lim_{n=\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2\varphi + b_n^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{M(a,b)\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2M(a,b)}$$

und demnach

$$(7) \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{M(a, a\varkappa')} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M(1, \varkappa')}.$$

Durch Vertauschung von $\varkappa$ mit $\varkappa'$ kommt

$$(7') \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa'^2 \sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{M(a, a\varkappa)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{M(1, \varkappa)}.$$

Da das *arithmetisch-geometrische* Mittel $M(a, b)$ leicht mit großer Genauigkeit berechnet werden kann, so können bei gegebenem $\varkappa$ nach (7) und (7′) K und K' und hieraus $\tau = \frac{iK'}{K}$, $h = e^{i\pi\tau}$ bestimmt werden, worauf dann auch die ϑ-Reihen, sowie $s(u)$, $c(u)$, $\Delta(u)$ berechnet werden können.

Dritter Abschnitt.

Geometrische Funktionentheorie.

Im ersten Abschnitt wurde das Gebäude der allgemeinen Funktionentheorie nach dem Vorgange von *Weierstrass* konsequent auf der Grundlage der Potenzreihen errichtet; der explizite gegebene ***analytische Ausdruck*** der Funktion war also der Ausgangspunkt der Untersuchungen. Man kann nun bei der Entwicklung der Funktionentheorie noch einen ganz anderen, in vieler Hinsicht einfacheren Weg einschlagen, indem man versucht, die analytischen Funktionen durch ihre ***inneren Eigenschaften*** zu charakterisieren, wobei dann die Bedeutung des expliziten Ausdrucks mehr zurücktritt. Die Untersuchungen, welche sich unter diesen Gesichtspunkten zum großen Teil im Anschluß an *Riemanns* bahnbrechende Arbeiten entwickelt haben, beruhen in wesentlichen Punkten auf der Durchsetzung der Funktionentheorie mit geometrischen Gedanken; ihre Bedeutung liegt nicht nur in wichtigen neuen Resultaten, sondern auch in ihren engen ***Beziehungen zu hydrodynamischen und anderen physikalischen Anwendungen.***

Es soll das Ziel der folgenden Kapitel sein, einen einführenden Überblick über die wichtigsten Gedanken dieser ***„geometrischen Funktionentheorie"*** zu geben, ohne daß dabei die genaue Kenntnis der vorangehenden Abschnitte vorausgesetzt wird.

1. Kapitel.

Vorbereitende Betrachtungen.

§ 1. Kurvenintegrale. *Greensche* Formel.

Es seien

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

zwei im Intervall $t_1 \leqq t \leqq t_2$ stetige reelle Funktionen von t mit stetigen nirgends gleichzeitig verschwindenden ersten Ableitungen $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$. Deutet man x, y als Koordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, so durchläuft der Punkt mit den Koordinaten x und y eine *Kurve* C, welche eine sich stetig drehende Tangente besitzt und die wir *glatt* nennen wollen. Sind nun $a(x, y)$ und $b(x, y)$

stetige reelle Funktionen von x und y in einem die Kurve C enthaltenden Gebiete, so verstehen wir unter dem *Kurvenintegral*

$$J = \int_C a\,dx + b\,dy$$

das bestimmte Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \{a(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t) + b(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)\}\,dt.$$

Diese Definition dehnt sich ohne weiteres auch auf den Fall aus, daß die Kurve C aus mehreren Kurvenstücken $C_1, \ldots, C_n$ zusammengesetzt ist, deren jedes den obigen Bedingungen genügt; wir schreiben dann

$$\int_C a\,dx + b\,dy = \int_{C_1} + \cdots + \int_{C_n}.$$

Im folgenden soll unter C stets eine Kurve dieser Art verstanden werden, die ***„stückweise glatt"*** *heißen soll.*

Das Kurvenintegral multipliziert sich mit -1, wenn man den Durchlaufungssinn der Kurve ändert, d. h. die Variable t von der oberen Grenze t_2 zur unteren Grenze t_1 laufen läßt.

Im allgemeinen wird das Kurvenintegral J seinen Wert ändern, wenn an Stelle von C eine andere Kurve gewählt wird, welche dieselben Punkte miteinander verbindet. Man wird also im allgemeinen erwarten müssen, daß der Wert des Kurvenintegrals außer von den Funktionen $a(x, y)$, $b(x, y)$ und den Koordinaten der Endpunkte des Integrationsweges noch von diesem selber, d. h. von den Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ abhängig ist. Wir wollen untersuchen, *unter welchen Bedingungen der Wert des Kurvenintegrals vom Wege unabhängig wird oder, was auf dasselbe herauskommt, der Wert des um eine geschlossene Kurve herumerstreckten Integrals Null ist.*

Wir machen dabei die Voraussetzung, daß die Funktionen a und b stetige partielle erste Ableitungen $\frac{\partial a}{\partial y}$ und $\frac{\partial b}{\partial x}$ in den betrachteten Gebieten besitzen.

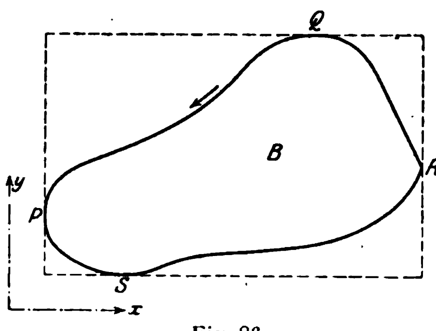


Fig. 86.

Es sei nun C eine solche geschlossene Kurve, welche von jeder Parallelen zu einer der Koordinatenachsen nur in höchstens zwei Punkten getroffen wird (Fig. 86). Den von C begrenzten *Bereich* bezeichnen wir mit B. Sind dann

$$y = \chi_1(x), \qquad y = \chi_2(x)$$

die Gleichungen der Randkurven PQR und PSR und p bzw. r die Abszisse von P bzw. R (vgl. die Figur), so wird

$$(1)\qquad \iint\limits_B \frac{\partial a}{\partial y}\,dx\,dy = \int_p^r\left(\int_{y=\chi_1}^{y=\chi_2}\frac{\partial a}{\partial y}\,dy\right)dx = \int_p^r\{a(x,\chi_2(x)) - a(x,\chi_1(x))\}\,dx$$

$$= +\int\limits_{PQR} a\,dx - \int\limits_{PSR} a\,dx = -\int\limits_C a\,dx,$$

wobei der Bereich in *„positivem Sinne"*, d. h. wie in der Figur durch den Pfeil angegeben, so umlaufen wird, daß dabei das Innere zur Linken bleibt[1]). Sind andererseits

$$x = \omega_1(y), \qquad x = \omega_2(y)$$

die Gleichungen der Randkurven QPS und QRS sowie q bzw. s die Ordinate von Q bzw. S, so wird

$$(2)\qquad \iint\limits_B \frac{\partial b}{\partial x}\,dx\,dy = \int_s^q\left(\int_{x=\omega_1}^{x=\omega_2}\frac{\partial b}{\partial x}\,dx\right)dy = \int_s^q\{b(\omega_2(y),y) - b(\omega_1(y),y)\}\,dy$$

$$= \int\limits_{SRQ} b\,dy + \int\limits_{QPS} b\,dy = \int\limits_C b\,dy.$$

Aus (1) und (2) folgt ***die Gaußsche Integralformel***

$$(3)\qquad \iint\limits_B \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)dx\,dy = \int\limits_C a\,dx + b\,dy.$$

Daraus erhalten wir als Nebenergebnis die *fundamentale* ***Formel von Green***, indem wir

$$b = \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad a = -\,\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

setzen, wobei φ eine Funktion mit stetigen ersten Ableitungen, ψ eine solche mit stetigen zweiten Ableitungen in dem Gebiete B einschließlich des Randes bedeutet. Es ergibt sich, wenn wir den *„Laplaceschen Ausdruck"*

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

einführen,

$$\iint\limits_B \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$= -\iint\limits_B \varphi\,\Delta\psi\,dx\,dy + \int\limits_C \varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dy - \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dx\right).$$

---

[1]) Würde man die Rolle von x und y vertauschen, so müßte man auch den Umlaufssinn umkehren.

Wir können das Kurvenintegral noch etwas anders schreiben: wenn wir die in positivem Umlaufssinne gemessene Bogenlänge s als Integrationsvariable einführen, dann wird

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \cos(\nu x), \qquad \frac{\partial x}{\partial s} = -\cos(\nu y),$$

wobei (νx), (νy) die Winkel zwischen der positiven x- bzw. y-Achse und der nach ***außen*** weisenden Normalen ν der Kurve bedeutet; daher können wir die Klammer im Integranden kurz in die Form $\frac{\partial \psi}{\partial \nu} ds$ setzen, so daß die *Greensche Formel* die endgültige Gestalt erhält:

$$(3\text{a}) \quad \iint\limits_B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dx\,dy = -\iint\limits_B \varphi\, \Delta\psi\, dx\,dy + \int\limits_C \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} ds.$$

Die Gültigkeit der Formeln (3) und (3a) erstreckt sich auch auf solche von einer Kurve C begrenzten Bereiche B, welche sich aus endlich vielen der eben charakterisierten Art zusammensetzen lassen; denn addieren wir die für die einzelnen Teilbereiche $B_1, \ldots, B_n$ gültigen aus (3) und (3a) entspringenden Formeln, so heben sich die Randintegrale über die im Innern von B liegenden Randstücke der Teilbereiche fort, weil diese Stücke zweimal in verschiedenem Sinne durchlaufen werden (vgl. Fig. 87).

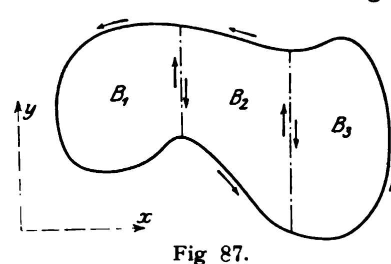


Fig 87.

Es sei ferner schon an dieser Stelle hervorgehoben, daß der aus endlich vielen Bereichen der zugrunde gelegten Art zusammengesetzte Bereich B auch mehrere voneinander getrennte Randkurven C besitzen darf (wie z. B. der Kreisring); bei einem solchen *„mehrfach zusammenhängenden“* Bereiche, wie sie später ausführlich noch besprochen werden sollen, ist unter dem im positiven Sinne um den Rand erstreckten Integral die Summe der betreffenden Integrale über die Randkurven C zu verstehen, wobei jede einzelne so zu durchlaufen ist, daß das Innere des Gebietes dabei zur Linken bleibt.

In Zukunft werden bei Benutzung der Formeln (3) *und* (3a) *nur solche Bereiche der eben erklärten Art auftreten.*

Die oben gestellte Frage läßt sich nunmehr durch den *Satz* beantworten:

Sind in einem von einer geschlossenen Kurve begrenzten Gebiete G die Funktionen

$$a(x, y), \quad b(x, y), \quad \frac{\partial a}{\partial y}, \quad \frac{\partial b}{\partial x}$$

stetig, so ist das Kurvenintegral

$$\int_C a\,dx + b\,dy \tag{4}$$

dann und nur dann für alle in G liegenden stückweise glatten, geschlossenen Kurven C gleich Null, wenn überall in G die Bedingung

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} \tag{5}$$

erfüllt ist.

Beweis: Zunächst ist die Bedingung (5) wegen der Formel (3) *hinreichend*. Wäre ferner der Ausdruck $\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}$ an einer Stelle x_0, y_0 im Inneren von G nicht gleich Null, sondern etwa positiv, so müßte er wegen seiner Stetigkeit auch im Innern eines hinreichend klein zu nehmenden, noch in G liegenden um den Punkt x_0, y_0 geschlagenen Kreises positiv sein; identifizieren wir die Kurve C mit der Peripherie dieses Kreises, so würde sofort aus (3) folgen, daß das Kurvenintegral $\int a\,dx + b\,dy$, über C erstreckt, *positiv* ist. Somit ergibt sich die Bedingung (5) auch als *notwendig* für das Verschwinden des Kurvenintegrals.

Nach dem so bewiesenen Satze ist das zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 erstreckte Kurvenintegral $\int_{P_1P_2} a\,dx + b\,dy$ nur von den Koordinaten x_1, y_1; x_2, y_2 der Endpunkte abhängig, solange die verbindende Kurve C in dem Gebiete G bleibt, in welchem die Gleichung (5) gilt. *Fassen wir bei festem Anfangspunkt P_1 die Koordinaten $x_2 = x$, $y_2 = y$ des Endpunktes P_2 als Variable auf, so wird unter dieser Beschränkung*

$$\int_{P_1P_2} a\,dx + b\,dy = J(x, y)$$

eine Funktion von x und y, für welche die Gleichungen

$$a(x, y) = \frac{\partial J}{\partial x}, \quad b(x, y) = \frac{\partial J}{\partial y}$$

gelten.

§ 2. Strömungen.

Eine „*stationäre ebene Strömung*“ einer inkompressiblen Flüssigkeit in einem Gebiete G ist definiert, wenn für jeden Punkt x, y desselben *Richtung* und *Geschwindigkeit* der Bewegung durch einen „*Geschwindigkeitsvektor*“ $\mathfrak{v}$ gegeben sind.

Wir bezeichnen die beiden Komponenten des Vektors $\mathfrak{v}$ nach den Koordinatenrichtungen mit

$$\mathfrak{v}_x = p(x, y), \quad \mathfrak{v}_y = q(x, y).$$

Ist C eine *geschlossene doppelpunktlose stückweise glatte Kurve* im Gebiete G, bezeichnet s die *Bogenlänge* auf dieser Kurve und $\mathfrak{v}_s$ die Komponente des Vektors $\mathfrak{v}$ in Richtung der Tangente, wobei der Tangente ein nach wachsenden Werten von s weisender Richtungssinn beigelegt wird, so bezeichnet man das Integral

$$M = \int_C \mathfrak{v}_s \, ds$$

als die *Wirbelstärke der Kurve* C. Die Bogenlänge s soll dabei so gerechnet werden, daß man bei wachsendem s das Innere der Kurve umläuft, indem man es zur Linken läßt.

Die Strömung heißt *wirbelfrei*, wenn die Wirbelstärke für jede in G verlaufende geschlossene Kurve den Wert *Null* besitzt. Aus den Resultaten des vorigen Paragraphen erhalten wir nun leicht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Wirbelfreiheit der Strömung. Wir setzen dabei ein für allemal voraus, daß die Funktionen p und q stetige erste und zweite Ableitungen nach x und y besitzen. Nun ist

$$\mathfrak{v}_s = p \cos(s, x) + q \cos(s, y) = p \frac{dx}{ds} + q \frac{dy}{ds};$$

also erhalten wir für die Wirbelstärke

$$M = \int_C \left(p \frac{dx}{ds} + q \frac{dy}{ds}\right) ds = \int_C p \, dx + q \, dy.$$

Es ist also für die Wirbelfreiheit notwendig und hinreichend, daß die Differentialgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \tag{1}$$

besteht. Dann sind, wie am Schluß von § 1 gezeigt wurde, *p und q die partiellen Ableitungen einer Funktion $u(x, y)$:*

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1a}$$

Die Funktion $u(x, y)$ heißt das Geschwindigkeitspotential der Strömung.

Wir nennen die Strömung *quellenfrei*, wenn in jedes Teilgebiet von G in jedem Zeitabschnitt ebensoviel Flüssigkeit hinein- wie hinausfließt. Wird die Komponente von $\mathfrak{v}$ normal zur Randkurve C eines solchen Bereichs mit $\mathfrak{v}_\nu$ bezeichnet, wobei die positive Richtung der Normalen nach außen gezählt werden soll, so stellt der Ausdruck

$$Q = \int_C \mathfrak{v}_\nu \, ds$$

die Verminderung der Flüssigkeitsmenge im Gebiet während der Zeit-

einheit dar. Bei Quellenfreiheit muß also dieses Integral für jede in G gelegene geschlossene Kurve C verschwinden. Nun wird

$$\mathfrak{v}_\nu = p\cos(\nu, x) + q\cos(\nu, y) = -p\cos(s, y) + q\cos(s, x)$$
$$= -p\frac{dy}{ds} + q\frac{dx}{ds};$$

es ergibt sich also die Bedingung

$$Q = \int_C \left(p\frac{dy}{ds} - q\frac{dx}{ds}\right)ds = \int -q\,dx + p\,dy = 0.$$

Nach dem Satze von § 1 folgt daher: *Für die Quellenfreiheit der Strömung ist die Bedingung*

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial y} \tag{2}$$

notwendig und hinreichend.

Wir betrachten nun eine quellen- und wirbelfreie Strömung. Führen wir das Geschwindigkeitspotential $u(x, y)$ ein, so ergibt sich aus (1 a) und (2)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{3}$$

Jede quellen- und wirbelfreie Strömung besitzt ein Geschwindigkeitspotential, welches der „Laplaceschen Differentialgleichung" oder „Potentialgleichung" (3) *genügt.*

Längs der *Kurven gleichen Potentials* $u =$ konst. findet keine Flüssigkeitsbewegung statt.

Es gilt nämlich für die Geschwindigkeitskomponente $\mathfrak{v}_s$ in jeder Richtung s die Beziehung

$$\mathfrak{v}_s = p\frac{dx}{ds} + q\frac{dy}{ds},$$

d. h. aber wegen (1 a)

$$\mathfrak{v}_s = \frac{du}{ds},$$

woraus sich sofort ergibt, daß längs einer Kurve $u =$ konst. die Geschwindigkeitskomponente Null ist. Wir nennen diese Kurven gelegentlich auch *Niveaulinien* oder *Äquipotentiallinien.* Die Flüssigkeit strömt überall *senkrecht* zu diesen Linien.

Durch die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{4}$$

wird nun eine neue Funktion $v(x, y)$ bis auf eine additive Konstante bestimmt; es erfüllen nämlich die beiden Funktionen

$$a = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad b = \frac{\partial u}{\partial x}$$

wegen (3) die Bedingungen (5) des § 1, so daß durch das Kurvenintegral

$$v = \int -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

eine bei festem Anfangspunkt nur von den Koordinaten x, y des Endpunktes abhängige Funktion $v(x, y)$ bestimmt wird, für welche die Relationen (4) gelten. Aus (4) folgt

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

also

$$\Delta v = 0; \tag{5}$$

ferner ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

d. h. die Kurven $u =$ konst. und die Kurven $v =$ konst. stehen aufeinander senkrecht. Die Kurven $v =$ konst. stellen also die *Stromlinien* der Flüssigkeitsbewegung dar. Funktionen, welche der *Laplace*schen Differentialgleichung genügen, heißen schlechthin *Potentialfunktionen*, und zwar *regulär* in jedem Gebiet, in welchen sie mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetig sind. Die Funktion v nennen wir die zu u *konjugierte* Potentialfunktion; wegen des antisymmetrischen Charakters der Gleichungen (3), (4), (5) ist ebenso $-u$ die zu v konjugierte Potentialfunktion.

Die vorangehenden Betrachtungen, rückwärts durchlaufen, lehren uns, daß auch umgekehrt jede in einem Gebiete reguläre Potentialfunktion u in diesem Gebiete eine Strömung der obigen Art definiert.

Schließlich sei noch bemerkt, daß unsere analytischen Formeln sich ebenso wie durch eine *Flüssigkeitsströmung* auch durch *Strömung der Wärme* oder der *Elektrizität* deuten lassen, wobei dann u die Temperatur bzw. das elektrische Potential bedeutet.

Selbstverständlich werden wir von allen diesen Vorstellungen keinen andern als heuristischen Gebrauch zu machen haben.

2. Kapitel.

Die regulären analytischen Funktionen.

§ 1. Differenzierbarkeit von Funktionen einer komplexen Variablen.

Es sei G ein Gebiet der Zahlenebene. Ist dann jedem Punkt $z = x + iy$ dieses Gebietes eine komplexe Zahl $\zeta = u + iv$ zugeordnet, so sagen wir, ζ sei in G eine *Funktion* der variablen Größe z.

Dann sind also u und v reelle Funktionen der beiden reellen Variablen x und y. Wir schränken diesen allgemeinen Funktionsbegriff zunächst durch die Forderung der *Stetigkeit* ein, indem wir verlangen, daß u und v stetige Funktionen von x und y sind. Wir fordern weiter, und das wird entscheidend sein, daß die Funktion ζ eine *differenzierbare* Funktion von z ist. Um diese Forderung zu präzisieren, erinnern wir uns an die Definition des Differentialquotienten einer Funktion τ der *reellen* Veränderlichen t. Der Differentialquotient $\frac{d\tau}{dt}$ ist definiert als der Grenzwert des Ausdruckes $\frac{\tau(t+h)-\tau(t)}{h}$ für unbegrenzt gegen 0 abnehmendes h, vorausgesetzt, daß dieser Grenzwert unabhängig davon existiert, wie die reelle Zahl h gegen Null strebt. Genau entsprechend definieren wir nun: *ζ heißt eine im Punkte z differenzierbare Funktion von z, wenn für jede gegen Null konvergierende Folge komplexer, nicht verschwindender Zahlen h der Grenzwert*

$$\lim_{h=0} \frac{\zeta(z+h)-\zeta(z)}{h}$$

existiert und nicht von der speziellen Wahl der Folge abhängt.

Für die Differenzierbarkeit der Funktion ζ ist es keineswegs hinreichend, daß u und v differenzierbare Funktionen von x und y sind. Setzen wir z. B. einfach $\zeta = x = \Re z$[1]), so wird, wenn h nur reelle Werte durchläuft,

$$\lim_{h=0} \frac{\zeta(z+h)-\zeta(z)}{h} = \lim_{h=0} \frac{h}{h} = 1$$

werden; andererseits wird, wenn h nur rein imaginäre Werte durchläuft,

$$\lim_{h=0} \frac{\zeta(z+h)-\zeta(z)}{h} = \lim_{h=0} \frac{0}{h} = 0 \neq 1 .$$

Wir müssen also noch weitere Bedingungen für die Differenzierbarkeit der Funktion $\zeta = u + iv$ aufsuchen.

Läßt man h reelle Werte durchlaufen, so ist

$$\lim_{h=0} \frac{\zeta(z+h)-\zeta(z)}{h} = \frac{\partial(u+iv)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} .$$

Durchläuft dagegen h rein imaginäre Werte, so wird

$$\lim_{h=0} \frac{\zeta(z+h)-\zeta(z)}{h} = \frac{\partial(u+iv)}{\partial(iy)} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) .$$

---

[1]) Mit $\Re\zeta$ bzw. $\Im\zeta$ bezeichnen wir den reellen bzw. den durch i dividierten imaginären Teil einer komplexen Zahl $\zeta = \Re\zeta + i\Im\zeta$.

Damit also $\zeta(z)$ differenzierbar ist, muß die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

d. h.

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

bestehen. Wir erhalten also das Resultat: ***Für die Differenzierbarkeit der Funktion $\zeta = u + iv$ in einem Gebiet ist das Bestehen der Differentialgleichungen (1) notwendig.*** Die für die ganze Funktionentheorie fundamentalen Relationen (1) heißen die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.*

Diese Differentialgleichungen stimmen überein mit den Relationen (4) des § 2 aus dem vorangehenden Kapitel.

Indem wir nunmehr noch die Voraussetzung machen, daß die ersten Ableitungen der Funktionen u und v nach x und y stetig sind, wollen wir umgekehrt nachweisen, daß die Bedingungen (1) für die Differenzierbarkeit der Funktion $\zeta(z)$ ***hinreichen.***

Setzen wir $h = j + ik$, so erhalten wir unter Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\zeta(z+h)-\zeta(z)}{h}\\
&= \frac{u(x+j,\ y+k)-u(x,\ y)+i\{v(x+j,\ y+k)-v(x,\ y)\}}{j+ik}\\
&= \frac{j u_x(x+\Theta j,\ y+\Theta k)+k u_y(x+\Theta j,\ y+\Theta k)}{j+ik}\\
&\quad + i\frac{j v_x(x+\Theta' j,\ y+\Theta' k)+k v_y(x+\Theta' j,\ y+\Theta' k)}{j+ik}\\
&\qquad\qquad (0<\Theta<1,\quad 0<\Theta'<1)^{1)},
\end{aligned}$$

also wegen (1)

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{j u_x(x+\Theta j,\ y+\Theta k)+ik u_x(x+\Theta' j,\ y+\Theta' k)}{j+ik}\\
&\quad + i\frac{j v_x(x+\Theta' j,\ y+\Theta' k)+ik v_x(x+\Theta j,\ y+\Theta k)}{j+ik};
\end{aligned}$$

mithin wegen der Stetigkeit von u_x und v_x

$$\lim_{h=0} Q = \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y},$$

und dieser Grenzwert ist unabhängig von der speziellen Wahl der Folge; d. h. *$\zeta(z)$ ist differenzierbar.* Wir wollen den Differential-

[1] Wir wollen hier und im folgenden, wo es bequem scheint, die partiellen Ableitungen nach einer Variablen durch einen angehängten Index bezeichnen, also z. B. u_x, u_y statt $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ schreiben.

quotienten mit $\zeta'(z)$ bezeichnen. Das so bewiesene Ergebnis rechtfertigt die folgende *Definition*, welche dem weiteren Aufbau der Funktionentheorie zugrunde gelegt wird:

Der Ausdruck $\zeta = u + iv$ heißt eine im Gebiete G reguläre analytische Funktion von $z = x + iy$, wenn in diesem Gebiete u und v stetige Funktionen von x und y mit stetigen partiellen Differentialquotienten erster Ordnung sind und dort die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (1) *gelten*[1].

Beiläufig sei bemerkt, daß man die beiden Differentialgleichungen (1) in der einen Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \tag{2}$$

zusammenfassen kann; hierbei bedeuten s, ν die Längen auf irgend zwei von einem Punkte ausgehenden, aufeinander senkrechten und zueinander wie die positive x-Achse zur positiven y-Achse liegenden Richtungen. Der Beweis dieser Tatsache ist nach den Ausführungen von Kap. 1, § 2 selbstverständlich.

Genau ebenso wie in der gewöhnlichen Differential- und Integralrechnung folgt nun, daß Summe, Produkt und Quotient analytischer Funktionen, wofern der Nenner nicht verschwindet, wieder differenzierbar sind, und zwar unter Gültigkeit der bekannten Regeln der Differentialrechnung. Dasselbe gilt für eine analytische Funktion, deren Argument eine analytische Funktion von z ist. Also: *Summe, Produkt, Quotient von analytischen Funktionen, sowie eine analytische Funktion von einer analytischen Funktion ist wieder analytisch.*

§ 2. Konforme Abbildung.

Die soeben gegebene Definition der analytischen Funktionen läßt eine sehr einfache und wichtige *geometrische Deutung* zu. Indem wir jedem Punkte des Gebietes G der z-Ebene einen Punkt der ζ-Ebene durch die in G analytische Funktion $\zeta(z)$ zuordnen, erhalten wir eine „*Abbildung*“ des Gebietes G auf ein über der ζ-Ebene ausgebreitetes Gebiet. Wir wollen die Natur dieser Abbildung studieren.

Es sei z ein Punkt von G, in welchem $\zeta'(z) \neq 0$ ist. Durch z legen wir zwei Kurven C_1 und C_2, die im Punkte z die beiden mit bestimmtem Richtungssinn versehenen Tangenten τ_1 und τ_2 besitzen mögen; mit φ_1 und φ_2 bezeichnen wir die Winkel der beiden Tangenten gegen die positive x-Achse, mit $\delta = \varphi_1 - \varphi_2$ den zwischen

[1] Regulär auf einer Linie werden wir demgemäß eine Funktion dann nennen, wenn die Voraussetzungen über die Ableitungen in allen Punkten der Linie erfüllt sind.

den Tangenten eingeschlossenen Winkel. Ist $z_1 = z + h_1$ ein Punkt auf C_1, der gegen z rückt, $z_2 = z + h_2$ ein ebensolcher Punkt auf C_2, dann wird

$$\lim_{h_1=0} \frac{\zeta(z+h_1)-\zeta(z)}{h_1} = \zeta'(z), \tag{1}$$

$$\lim_{h_2=0} \frac{\zeta(z+h_2)-\zeta(z)}{h_2} = \zeta'(z). \tag{2}$$

Nehmen wir speziell h_1 und h_2 von gleichem absoluten Betrage r, indem wir setzen

$$h_1 = r e^{i\psi_1}, \qquad h_2 = r e^{i\psi_2}\ [1]), \tag{3}$$

so folgt aus (1) und (2) wegen $\zeta'(z) \neq 0$

$$\lim_{r=0} \frac{\zeta(z+h_1)-\zeta(z)}{\zeta(z+h_2)-\zeta(z)} \cdot \frac{h_2}{h_1} = 1,$$

also, da

$$\lim_{r=0} \psi_1 = \varphi_1, \qquad \lim_{r=0} \psi_2 = \varphi_2$$

ist, nach (3)

$$\lim_{r=0} \frac{\zeta(z+h_1)-\zeta(z)}{\zeta(z+h_2)-\zeta(z)} = e^{i\delta}.$$

Setzen wir nun

$$\zeta(z+h_1) - \zeta(z) = \varrho_1 e^{i\chi_1}, \qquad \zeta(z+h_2) - \zeta(z) = \varrho_2 e^{i\chi_2},$$

so wird daher

$$\lim_{r=0} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} e^{i(\chi_1-\chi_2)} = e^{i\delta},$$

also

$$\lim_{r=0} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = 1$$

und

$$\lim_{r=0} (\chi_1 - \chi_2) = \delta, \tag{4}$$

falls von Vielfachen von 2π bei Messung der Winkel abgesehen wird. Nun werden durch die Funktion $\zeta(z)$ die Kurven C_1, C_2 auf zwei Kurven C_1^*, C_2^* der ζ-Ebene abgebildet, und zufolge der Definition von χ_1 und χ_2 konvergieren diese Winkel bei abnehmendem r gegen die Winkel, welche die Tangenten von C_1^* und C_2^* im Punkte $\zeta(z)$ mit der positiven u-Achse bilden; wegen der Relation (4) muß daher der Winkel zwischen diesen beiden Tangenten gleich dem ent-

---

[1]) Der Ausdruck $e^{i\psi}$ soll hier nur als eine Abkürzung für $\cos\psi + i \sin\psi$ aufgefaßt werden; die Relation $e^{i\psi_1} e^{i\psi_2} = e^{i(\psi_1+\psi_2)}$ ist eine unmittelbare Folge der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen. Später werden wir erkennen, daß diese Bezeichnungsweise mehr als formale Bedeutung besitzt.

sprechenden Winkel zwischen den Tangenten τ_1 und τ_2 werden, falls man auf den Tangenten den entsprechenden Richtungssinn festhält.

Bei der Abbildung der z-Ebene auf die ζ-Ebene durch eine analytische Funktion bleiben der Größe und dem Drehsinne nach die Winkel zwischen entsprechenden Kurven für jeden Punkt erhalten, für den $\zeta'(z) \neq 0$ ist.

Wir nennen eine die Größe der Winkel erhaltende Abbildung *winkeltreu oder konform.*

Eine analytische Funktion vermittelt also eine konforme Abbildung mit Erhaltung des Drehungssinnes oder, wie wir auch schlechthin sagen wollen, *eine konforme Abbildung.* Eine winkeltreue Abbildung mit Änderung des Drehsinnes werden wir in Zukunft stets ausdrücklich als *konforme Abbildung mit Umlegung der Winkel* bezeichnen.

Da ein kleines Dreieck der z-Ebene bei einer winkeltreuen Abbildung wieder annähernd in ein ähnlich gestaltetes Dreieck der ζ-Ebene übergeht, so nennt man eine solche Abbildung gelegentlich auch *„in den kleinsten Teilen ähnlich"*. Der Ausdruck $|\zeta'(z)|$ stellt dabei das *„lineare Vergrößerungsverhältnis"* dar.

Man kann die obigen Schlüsse rückwärts durchlaufen und erkennt so, daß aus der Konformität der Abbildung unter Voraussetzung der Stetigkeit der Ableitungen von u und v die Differenzierbarkeit der Funktion $\zeta = u + iv$ folgt. *Die Konformität der Abbildung ist also unter dieser Voraussetzung mit dem analytischen Charakter der Abbildungsfunktion äquivalent.*

Eine *konforme Abbildung mit Umlegung der Winkel* erhalten wir beispielsweise, indem wir setzen

$$\zeta = \bar{z},$$

wobei $\bar{z}$ der zu z konjugiert imaginäre Wert $\bar{z} = x - iy$ ist; ebenso definiert die Zuordnung von z zu dem konjugiert imaginären Werte $\bar{\zeta}$ einer analytischen Funktion $\zeta = f(z)$ eine konforme Abbildung mit Umlegung der Winkel. Hieraus folgt sofort, da auch umgekehrt jede solche Abbildung $\bar{\zeta}(z)$ sofort zu einer analytischen Funktion $\zeta = f(z)$ führt, daß wir auf diese Art alle konformen Abbildungen mit Umlegung der Winkel erhalten. Als einfaches Beispiel dürfte dem Leser aus der Elementargeometrie die Transformation durch reziproke Radien bekannt sein, auf die wir später zurückkommen werden.

§ 3. Die inverse Funktion.

Ist ζ eine analytische Funktion von z in einem Gebiete G, so entsteht die Frage, ob und inwiefern sich auch umgekehrt z als analytische Funktion von ζ auffassen läßt.

Damit die beiden Gleichungen $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ sich in der Umgebung eines Punktes x_0, y_0 eindeutig nach x und y auflösen lassen, ist nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung ***hinreichend***, daß die *„Jacobische Determinante“* $\Delta = u_x v_y - u_y v_x$ der Beziehung $\Delta \neq 0$ für $x = x_0$, $y = y_0$ und somit wegen der Stetigkeit auch für eine gewisse Umgebung dieses Punktes genügt. Ist diese Bedingung erfüllt, so werden in der Umgebung der Stelle $u(x_0, y_0) = u_0$, $v(x_0, y_0) = v_0$ der uv-Ebene $x = x(u, v)$ und $y = y(u, v)$ eindeutig bestimmte Funktionen von u und v mit den stetigen partiellen Ableitungen

$$(1) \qquad x_u = \frac{1}{\Delta} v_y, \quad x_v = -\frac{1}{\Delta} u_y, \quad y_u = -\frac{1}{\Delta} v_x, \quad y_v = \frac{1}{\Delta} u_x.$$

Nun ist in unserem Falle zufolge der *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$,

$$(2) \qquad \Delta = u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 = |u_x + i u_y|^2 = |\zeta'(z)|^2.$$

Wir erhalten also das Resultat: *Ist für $z = z_0$ die Ableitung $\zeta'(z)$ von Null verschieden, so wird eine hinreichend kleine Umgebung des Punktes z_0 umkehrbar eindeutig auf eine Umgebung des Punktes $\zeta(z_0) = \zeta_0$ abgebildet; d. h. für diese Umgebung ist die Gleichung $\zeta = \zeta(z)$ eindeutig nach z auflösbar, so daß $z = z(\zeta)$ wird. Die Funktion $z(\zeta)$ ist eine analytische Funktion von ζ.*

Dies letztere ergibt sich unmittelbar, entweder indem wir beachten, daß durch $z = z(\zeta)$ ein Stück der ζ-Ebene auf die Umgebung des Punktes z_0 der z-Ebene ***konform*** abgebildet wird, oder indem wir bemerken, daß aus (1) die Gültigkeit der inversen *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen $x_u = y_v$, $x_v = -y_u$ folgt. Die Funktion $z = z(\zeta)$ heißt die zu $\zeta = \zeta(z)$ ***inverse Funktion*** oder die ***Umkehrfunktion*** von $\zeta(z)$.

Zufolge der Gleichungen (1) *und* (2) *gilt für die Ableitung der inversen Funktion die Beziehung*

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{\partial(x+iy)}{\partial u} = \frac{v_y - i v_x}{\Delta} = \frac{1}{v_y + i v_x} = \frac{1}{f'(z)},$$

genau wie in der Differentialrechnung reeller Funktionen.

§ 4. Die Integration der analytischen Funktionen und der *Cauchy*sche Integralsatz[1]).

In der Theorie der reellen Funktionen wird das Integral einmal als Umkehrung des Differentialquotienten (*unbestimmtes Integral*), zweitens als Grenzwert einer Summe (*bestimmtes Integral*) eingeführt und sodann die fundamentale Tatsache bewiesen, daß beide Definitionen auf denselben Gegenstand führen.

[1]) Vgl. die parallel laufenden Entwicklungen in Abschn. I, Kap. 5.

Ganz analog können wir nun bei den analytischen Funktionen einer komplexen Variablen vorgehen. Unmittelbar läßt sich der Begriff des unbestimmten Integrales auf das komplexe Gebiet ausdehnen. Ist nämlich zu einer gegebenen analytischen Funktion $f(z)$ im Gebiete G eine zweite analytische Funktion $F(z)$ gegeben, so daß $F'(z) = f(z)$ gilt, so nennen wir $F(z)$ ein ***unbestimmtes Integral von*** $f(z)$ und schreiben

$$F(z) = \int f(z)\,dz.$$

Um die Definition des bestimmten Integrales übertragen zu können, denken wir uns zwei Punkte z_0 und Z der Ebene durch eine stückweise glatte Kurve C miteinander verbunden, welche ganz in G liegt. Diese Kurve zerlegen wir durch die Punkte $z_0, z_1, \ldots, z_n = Z$ in n Teile und bilden die Summe

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(z_\nu)(z_\nu - z_{\nu-1}).$$

Lassen wir nun die Anzahl $n+1$ der Teilpunkte über alle Grenzen wachsen, so daß dabei die Abstände $|z_\nu - z_{\nu-1}|$ gegen Null konvergieren, *so nennen wir den Grenzwert von* S_n, *wenn er existiert und von der speziellen Wahl der Teilpunkte* $z_1, \ldots, z_{n-1}$ *unabhängig bleibt, das über die Kurve C genommene bestimmte Integral der Funktion* $f(z)$ *und schreiben*

$$^{(C)}\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz \quad \text{oder kurz} \quad \int_C f(z)\,dz \quad \text{oder auch} \quad \int^{C} f(z)\,dz.$$

Aus der Definition des bestimmten Integrales folgt unmittelbar, wenn auf dem ganzen Integrationswege $|f(z)|$ nicht größer als die positive Schranke M ist und L die Länge des Integrationsweges bedeutet, die wichtige *Integralabschätzung*

$$\left|{}^{(C)}\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz\right| \leqq ML. \tag{1}$$

Dieser Integralbegriff würde ohne wesentliche Bedeutung bleiben, wenn das bestimmte Integral nicht gleichzeitig als unbestimmtes Integral aufgefaßt werden könnte, und wenn es noch vom Integrationswege C abhängig wäre. Wir wollen jedoch zeigen, daß der folgende, als *Integralsatz von Cauchy* bezeichnete fundamentale Satz gilt, welcher sofort die genannten Bedenken zerstreut.

Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet[1]) *der z-Ebene und* $f(z)$ *eine dort reguläre analytische Funktion. Es sei ferner* z_0 *ein*

[1]) Ein Gebiet soll hier einfach zusammenhängend heißen, wenn es von einer einzigen geschlossenen stückweise glatten Kurve C begrenzt wird. (Vgl. auch S. 248, 261.) Wir werden uns später veranlaßt sehen, den Begriff des einfachen Zusammenhanges etwas allgemeiner zu fassen.

fester, Z ein variabler Punkt von G, C irgendeine z_0 mit Z verbindende in G verlaufende stückweise glatte Kurve. Dann existiert das über die Kurve C erstreckte Integral

$$^{(C)}\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = F(Z)$$

unabhängig von der speziellen Wahl des Integrationsweges C und stellt eine in G reguläre analytische Funktion $F(Z)$ dar, für welche die Gleichung

$$F'(z) = f(z)$$

gilt.

Zum *Beweise* dieses Satzes beachten wir zunächst, daß aus der Definition des bestimmten Integrales folgt

$$^{(C)}\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = - {}^{(C)}\int_{Z}^{z_0} f(z)\,dz.$$

Wir wollen demgemäß die Unabhängigkeit des Integrales vom Wege nachweisen, indem wir zeigen, *daß für jede ganz im Regularitätsgebiete G liegende geschlossene Kurve C das Integral $\int f(z)\,dz$ den Wert Null hat.*

Setzen wir

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y), \qquad z_\nu = x_\nu + i y_\nu,$$
$$z_\nu - z_{\nu-1} = \Delta z_\nu = \Delta x_\nu + i \Delta y_\nu,$$

so ist

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(z_\nu)\Delta z_\nu = \sum_{\nu=1}^{n}\{u(x_\nu, y_\nu)\Delta x_\nu - v(x_\nu, y_\nu)\Delta y_\nu\}$$
$$+ i \sum_{\nu=1}^{n}\{u(x_\nu, y_\nu)\Delta y_\nu + v(x_\nu, y_\nu)\Delta x_\nu\}.$$

Beide Summen auf der rechten Seite konvergieren mit wachsendem n gegen die entsprechenden reellen Kurvenintegrale (siehe Kap. 1, § 1), und daher wird

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy.$$

Die Kurvenintegrale rechts *verschwinden* aber wegen der *Cauchy–Riemann*schen Differentialgleichungen auf Grund des Satzes in Kap. 1 § 1. Hiermit ist bewiesen, daß das Integral $F(Z)$ wirklich eine Funktion der oberen Grenze Z allein ist.

Setzt man

$$Z = X + iY,$$

$$\int_C u\,dx - v\,dy = U(X,Y), \quad \int_C v\,dx + u\,dy = V(X,Y),$$

so wird wegen Kap. 1, § 1

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial X} = u(X, Y), & \dfrac{\partial U}{\partial Y} = -v(X, Y), \\ \dfrac{\partial V}{\partial X} = v(X, Y), & \dfrac{\partial V}{\partial Y} = u(X, Y); \end{cases}$$

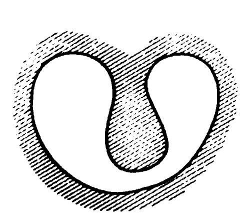
die Ableitungen von U und V nach X und Y sind also stetig und genügen den *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen; mithin ist $F(Z) = U + iV$ eine analytische Funktion von Z; für deren Ableitung folgt aus (2) sofort

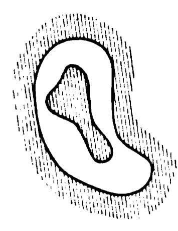
$$F'(Z) = \frac{\partial U}{\partial X} + i\frac{\partial V}{\partial X} = u(X, Y) + iv(X, Y) = f(Z).$$

Damit ist der *Cauchy*sche Integralsatz in allen seinen Teilen bewiesen.

Die Gültigkeit dieses Satzes bleibt noch unter der erweiterten Voraussetzung bestehen, daß C den Rand des Gebietes bedeutet und daß die Funktion $f(z)$ auf dem Rande zwar nicht mehr regulär analytisch, aber doch noch stetig ist. Ja es darf unter Umständen sogar $f(z)$ auf dem Rande Unstetigkeitspunkte besitzen. Es genügt, daß das Randintegral existiert und sich auffassen läßt als Limes eines entsprechenden Integrales, das über eine ganz im Inneren des Gebietes G verlaufende gegen den Rand C konvergierende (d. h. ihm überall beliebig nahe kommende) Kurve C' erstreckt wird[1]). Denn für diese Kurve muß nach dem Bewiesenen das Integral verschwinden. Beim Beweise des Integralsatzes war die Annahme wesentlich, daß das Gebiet G *einfach zusammenhängend* ist.

Wir wollen ein Gebiet *n-fach zusammenhängend* nennen, wenn seine Berandung aus n geschlossenen, einander nirgends treffenden Kurven C gebildet wird. Solche n-fach zusammenhängenden Gebiete G^*





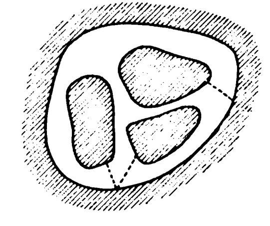


Fig. 88—90.

lassen sich in einfach zusammenhängende Gebiete G dadurch verwandeln, daß man $n - 1$-mal je zwei Randkurven durch einen „*Querschnitt*" verbindet (vgl. Fig. 88—90 für $n = 1, 2, 4$). Machen wir nun die Annahme, daß das Gebiet G^* mit Einschluß des Randes ein Regula-

1) Bei stetigen Randwerten von $f(z)$ sind diese Voraussetzungen immer erfüllt, wie der Leser unmittelbar einsehen wird.

ritätsbereich der Funktion $f(z)$ ist, so hat nach dem *Cauchy*schen Integralsatz das um den *ganzen* Rand von G herumerstreckte Integral $\int f(z)\,dz$ den Wert Null. Da hier bei der Integration die Querschnitte zweimal, und zwar in entgegengesetzter Richtung, durchlaufen werden, ***heben sich die Integrale über diese Linien fort,*** und es gilt also allgemein der *Satz:*

*Ist $f(z)$ **eine in einem n-fach zusammenhängenden Gebiete** G^* **einschließlich der Randkurven reguläre analytische Funktion,** so **hat das Integral** $\int f(z)\,dz$ **den Wert Null, wenn es in mathematisch positivem Sinne um den ganzen Rand von** G^* **herumerstreckt wird.***

Unter dem ***mathematisch positiven Umlaufungssinn*** einer Figur verstehen wir dabei, wie schon früher, einen solchen, ***bei welchem das Innere der Figur zur Linken bleibt.***

Ist speziell das Gebiet ***zweifach*** zusammenhängend, so wird danach

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz,$$

wobei beide Randkurven C_1 und C_2 im *gleichen* Sinne zu durchlaufen sind.

Ein einfaches wichtiges Beispiel liefert die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

Diese Funktion ist für alle nicht verschwindenden Werte von z regulär, wird jedoch für $z = 0$ unendlich, so daß dort die Regularität aufhört. Umgibt man also den Punkt $z = 0$ mit einer geschlossenen Kurve C, so braucht das Integral $\int_C f(z)\,dz$ nicht Null zu sein. In der Tat, sei etwa C_1 der mit dem Radius ϱ um $z = 0$ geschlagene Kreis, dann wird auf C_1

$$z = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad dz = i\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,d\varphi,$$

$$\frac{dz}{z} = i\,d\varphi, \qquad \int_{C_1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i\,d\varphi = 2\pi i \neq 0;$$

und zufolge der oben bewiesenen Tatsache gilt die Gleichung

$$\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i \tag{3}$$

für *jede* den Nullpunkt in positivem Sinne umlaufende geschlossene einfache (d. h. doppelpunktlose) stückweise glatte Kurve C, denn wir können ϱ so klein wählen, daß C_1 ganz im Innern von C liegt.

Dieses Ergebnis ist von Wichtigkeit für das Verständnis des *Logarithmus einer beliebigen komplexen Größe.* Bekanntlich gilt für positives reelles Z

$$\int_1^Z \frac{dz}{z} = \lg Z,$$

wobei das Integral über die positive reelle Achse erstreckt wird. Nimmt man diese Formel als *Definition* von $\lg Z$ auch für *beliebige komplexe Werte* von $Z \neq 0$, so ist wegen (3) diese Funktion $\lg Z$ *nur bis auf ein additives Multiplum von* $2\pi i$ *bestimmt*, da von vornherein nichts darüber ausgesagt ist, ob, wie oft und in welchem Sinne der Integrationsweg den Nullpunkt umschlingen soll (vgl. Abschn. I, Kap. 4, 5). Um die Definition des Logarithmus *eindeutig* zu machen, führen wir von $z = 0$ längs der negativen reellen Achse bis ins Unendliche einen Schnitt; die so aufgeschnittene Ebene ist dann ein Gebiet mit einer Randlinie, in dessen Inneren die Funktion $\frac{1}{z}$ regulär ist, also das Integral $\zeta = \int_1^Z \frac{dz}{z}$ eine eindeutig bestimmte analytische Funktion der oberen Grenze Z wird, deren Ableitung gleich $\frac{1}{Z} \neq 0$ ist. Der so definierte Wert von $\lg Z$ heißt der *Hauptwert des Logarithmus*. Es ist zu beachten, daß zufolge der obigen Relation (3) die Hauptwerte von $\lg Z$ in gegenüberliegenden Punkten der beiden Ufer des Schnittes sich um den Wert $2\pi i$ unterscheiden.

Die Umkehrfunktion des Logarithmus, welche für jede Stelle $Z \neq 0$ existiert, heißt die *Exponentialfunktion* und wird mit $Z = e^{\zeta}$ bezeichnet. Beide Funktionen werden wir später noch näher zu untersuchen haben.

Fig. 91.

Integriert man nach z über den in Fig. 91 angegebenen Weg $1PZ$, so wird, wenn $Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gesetzt ist,

$$\int_1^Z \frac{dz}{z} = \int_1^P + \int_P^Z = \lg r + \int_0^\varphi i\,d\psi = \lg r + i\varphi,$$

womit der komplexe Logarithmus auf reelle Funktionen zurückgeführt erscheint.

Für $r = 1$ ist speziell $\lg r = 0$, also $\lg Z = i\varphi$ oder

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = Z = e^{i\varphi},$$

womit die früher rein formal eingeführte Schreibweise gerechtfertigt ist.

§ 5. Die Integraldarstellung von *Cauchy*.

Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, C eine ganz in G liegende geschlossene stückweise glatte Kurve, welche den Punkt z_0 im Innern enthält, und es sei $f(z)$ eine in G reguläre Funktion. Dann ist die Funktion $\frac{f(z)}{z - z_0}$ in G mit Ausnahme des Punktes $z = z_0$ regulär, da

dies für Zähler und Nenner gilt und der Nenner von Null verschieden ist. In dem zweifach zusammenhängenden Gebiet, welches aus G durch Ausschneiden eines um $z = z_0$ mit dem hinreichend kleinen Radius r geschlagenen Kreises K entsteht, ist also $\frac{f(z)}{z - z_0}$ regulär. Daher ist

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Auf K wird

$$z = z_0 + re^{i\varphi} \; (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi), \quad \text{also} \quad dz = rie^{i\varphi} d\varphi, \quad \frac{dz}{z - z_0} = i\, d\varphi,$$

und somit

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi. \tag{1}$$

Wegen der Stetigkeit von $f(z)$ im Punkte z_0 wird bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$

$$|f(z_0 + re^{i\varphi}) - f(z_0)| < \varepsilon$$

für alle hinreichend kleinen Werte von r und beliebiges φ; daher wird wegen der Abschätzungsformel (1) aus § 4 das Integral auf der rechten Seite von (1) für solche r gleich

$$i \int_0^{2\pi} f(z_0) d\varphi + i\eta\, 2\pi,$$

wobei $|\eta| \leqq \varepsilon$ gilt, und somit konvergiert diese rechte Seite gegen $2\pi i f(z_0)$, wenn r zu 0 abnimmt. Wir erhalten also die folgende als ***Integralformel von Cauchy*** bezeichnete fundamentale Relation:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0);$$

dabei ist zu beachten, daß über die Kurve C in positivem Sinne zu integrieren ist. Diese Formel drückt den Wert $f(z_0)$ der Funktion $f(z)$ in einem beliebigen inneren Punkte z_0 eines Regularitätsbereiches durch die *Randwerte* auf C aus. *Eine analytische Funktion ist also in einem einfach zusammenhängenden Gebiete durch ihre Randwerte eindeutig bestimmt*, wodurch u. a. eine willkürliche Vorgabe der Funktion in einem ganzen Gebiete ausgeschlossen wird.

Wir wollen aus dieser Integralformel eine Reihe wichtiger Folgerungen ziehen. Zunächst können wir unserem Begriffe der analytischen Funktion dadurch nunmehr einen wirklich befriedigenden Charakter verleihen, daß wir nachweisen:

Die Ableitung einer analytischen Funktion ist wieder eine analytische Funktion.

Es sei z_0 ein innerer Punkt von G und C eine in G verlaufende einfach geschlossene Kurve um den Punkt z_0. Dann ist wegen der

*Cauchy*schen Integraldarstellung für beliebige, hinreichend kleine, nicht verschwindende Werte von h

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int^C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int^C f(z)\left\{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{z-z_0-h}-\frac{1}{z-z_0}\right)-\frac{1}{(z-z_0)^2}\right\}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int^C \frac{f(z)\,h}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2}\,dz.$$

Der absolute Betrag der stetigen Funktion $f(z)$ ist auf C beschränkt, der Nenner $(z-z_0-h)(z-z_0)^2$ bleibt bei hinreichend kleinem $|h|$ absolut genommen oberhalb einer *positiven* Schranke, da der Punkt z_0 von allen Punkten z von C eine positive Entfernung besitzt; mithin konvergiert mit h auch die rechte Seite von (2) gegen Null, und wir erhalten

$$\lim_{h=0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int^C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz.$$

Da der Grenzwert auf der linken Seite unabhängig von der speziellen Wahl der gegen Null konvergierenden Größen h ist, so ist damit die Existenz einer Ableitung $f'(z)$ von $f(z)$ bestätigt und zugleich bewiesen, daß sie aus der Integralformel von *Cauchy* durch Differentiation unter dem Integralzeichen erhalten werden kann. Genau dieselbe Betrachtung beweist die Existenz der sukzessiven Ableitungen $f''(z)$, $f'''(z), \ldots$; wir erhalten, indem wir mit $f'(z)$, $f''(z)$, . . . genau so verfahren wie oben mit $f(z)$, das Resultat:

Für jedes n existiert die n^{te} Ableitung einer analytischen Funktion und wird durch den Ausdruck

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int^C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

gegeben. Es sind also auch sämtliche Differentialquotienten einer analytischen Funktion analytische Funktionen.

Die eben durchgeführte Betrachtung zeigt noch mehr; sie beweist den folgenden Satz: *Ist $\varphi(z)$ irgendeine auf der einfach geschlossenen stückweise glatten Kurve C stetige Funktion*[1]*), so stellt die Gleichung*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{z-z_0}\,dz$$

[1]) D. h. eine stetig von der Bogenlänge abhängige Größe.

eine im Innern von C reguläre analytische Funktion von z_0 dar, deren Ableitungen durch die Formel

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz,$$

d. h. durch Differentiation unter dem Integralzeichen, erhalten werden. Im allgemeinen besitzt dabei die dargestellte Funktion $f(z_0)$ keineswegs die Werte $\varphi(z)$ als Randwerte, wie aus § 6 sich ergeben wird.

Als zweite Anwendung der Formel (1) behandeln wir die Entwicklung einer analytischen Funktion in eine *Taylor*sche *Potenzreihe*, und gewinnen so den Anschluß an die im ersten Abschnitt entwickelte *Weierstraß*sche Auffassung der Funktionentheorie. Wir umgeben den Punkt z_0 mit einem Kreise K von so kleinem Radius r, daß er noch ganz im Innern der Kurve C liegt. Schreiben wir auf C statt z das Zeichen t, so wird für alle Punkte z im Kreise K der Quotient $\frac{z-z_0}{t-z_0}$ absolut genommen unterhalb einer positiven Zahl $\vartheta < 1$ liegen; daher konvergiert die geometrische Reihe

$$1 + \frac{z-z_0}{t-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^2 + \cdots$$

gleichmäßig in bezug auf die Variable t. Es wird daher, wenn wir gliedweise integrieren, was offenbar genau wie im Reellen erlaubt ist,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int^C \frac{f(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int^C f(t)\left\{\frac{1}{t-z_0} + \frac{(z-z_0)}{(t-z_0)^2} + \frac{(z-z_0)^2}{(t-z_0)^3} + \cdots\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int^C \frac{f(t)}{t-z_0}\,dt + (z-z_0)\frac{1}{2\pi i}\int^C \frac{f(t)}{(t-z_0)^2}\,dt + (z-z_0)^2\frac{1}{2\pi i}\int^C \frac{f(t)}{(t-z_0)^3}\,dt + \cdots,$$

d. h. wegen (3)

$$(4) \qquad f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots.$$

Damit haben wir also für jeden Punkt z im Innern eines Regularitätsgebietes eine Entwicklung der analytischen Funktion $f(z)$ in eine Potenzreihe, und zwar genau die aus der gewöhnlichen Differentialrechnung bekannte *Taylor*sche *Reihe*.

Diese Reihe konvergiert offenbar *gleichmäßig* in jedem Kreise K um z_0, der noch ganz im Innern eines Regularitätsgebietes liegt. Da andererseits, wie man leicht erkennt und wie im ersten Abschnitt ausführlich dargelegt ist, jede Potenzreihe in ihrem (notwendig kreisförmigen) Konvergenzgebiet eine differenzierbare, d. h. analytische Funktion darstellt, so kann dieses Konvergenzgebiet nirgends über das Regularitätsgebiet der Funktion hinausreichen. Man formuliert diese Tatsache so: *der Konvergenzkreis der Potenzreihe* (4) *ist der*

größte Kreis um z_0, in dessen Innern die Funktion $f(z)$ noch überall regulär ist.

Als dritte Anwendung der *Cauchy*schen Formel beweisen wir folgenden Satz:

Ist $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, ... eine Folge von Funktionen, welche in dem einfach zusammenhängenden Bereiche G mit der Randkurve C einschließlich des Randes regulär sind und auf dem Rande gleichmäßig konvergieren, so konvergieren sie auch im Innern, und ihr Limes ist wieder eine reguläre analytische Funktion $f(z)$ in G.

Der Beweis ergibt sich fast unmittelbar aus der Integralformel. Denn setzen wir dort $f_n(z)$ statt $f(z)$ ein, so folgt die Konvergenz der Funktionen $f_n(z)$ für das Innere unmittelbar mittels der Integralabschätzung (1) auf S. 259. Die Grenzfunktion wird im Innern von G dargestellt durch die rechte Seite der *Cauchy*schen Formel, wobei für $f(z)$ auf dem Rande C der Limes von $f_n(z)$ zu setzen ist. Aus dieser Darstellung aber ergibt sich unmittelbar, wie oben gezeigt, die Differenzierbarkeit der Grenzfunktion im Innern, d. h. ihr analytischer Charakter.

Übrigens sei bemerkt, daß aus den Ergebnissen des folgenden § 6 sich sofort für G die *Gleichmäßigkeit der Konvergenz* der $f_n(z)$ gegen $f(z)$ ergibt.

Als letzte Anwendung stellen wir fest, daß Realteil u und Imaginärteil v jeder analytischen Funktion in deren Regularitätsgebiet unbeschränkt differenzierbare Funktionen von x und y sein müssen. Wir dürfen also die *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen (1) des § 1 nach x und y differenzieren und erhalten so wegen $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ sofort

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0,$$

d. h. *Realteil und Imaginärteil jeder analytischen Funktion sind in deren Regularitätsgebiete reguläre, zueinander konjugierte Potentialfunktionen.*

Wir können demgemäß, da umgekehrt ein Paar konjugierter Potentialfunktionen eine analytische Funktion definiert, den *Zusammenhang zwischen der Theorie der ebenen Strömungen und der analytischen Funktionen* dahin formulieren, daß beides verschiedene Auffassungen einer und derselben Sache sind.

§ 6. Das *Poisson*sche Integral und seine Anwendung in der Potentialtheorie.

Aus der *Cauchy*schen Integralformel können wir eine entsprechende, besonders einfache Darstellung für den Realteil u einer analytischen Funktion durch die Randwerte von u herleiten, falls die Randkurve C ein Kreis K ist.

Wir betrachten also einen ganz im Regularitätsgebiet von $f(z)$ gelegenen Kreis K vom Radius R um den Punkt $z = z_0 = x_0 + iy_0$, den wir der bequemeren Schreibweise halber in den Nullpunkt verlegt denken, und führen durch die Gleichung

$$z = re^{i\psi}$$

in diesem Kreise Polarkoordinaten r, ψ ein. Nach der *Cauchy*schen Integralformel ist für jeden im Innern des Kreises K gelegenen Punkt z

$$(1)\qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int^{K} f(Re^{i\varphi})\frac{d(Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi} - re^{i\psi}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - re^{i\psi}}\,d\varphi.$$

Betrachten wir andererseits irgendeinen außerhalb des Kreises K gelegenen Punkt z_1, etwa den Punkt $z_1 = \frac{R^2}{r}e^{i\psi}$, so wird die Funktion $\frac{f(z)}{z - z_1}$ in K regulär sein, also die Gleichung

$$(2)\qquad 0 = \frac{1}{2\pi i}\int^{K} f(Re^{i\varphi})\frac{d(Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi} - \frac{R^2}{r}e^{i\psi}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\frac{re^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - Re^{i\psi}}\,d\varphi$$

gelten. Durch Subtraktion von (1) und (2) folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\left\{\frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - re^{i\psi}} - \frac{re^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - Re^{i\psi}}\right\}d\varphi,$$

wofür wir auch schreiben können:

$$(3)\qquad f(z) = u + iv = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + r^2}\,d\varphi,$$

oder

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\left\{\frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - re^{i\psi}} + \frac{Re^{-i\varphi}}{Re^{-i\varphi} - re^{-i\psi}} - 1\right\}d\varphi.$$

Trennen wir rechts und links Reelles und Imaginäres, indem wir beachten, daß die Faktoren von $f(Re^{i\varphi})$ unter dem Integralzeichen reell sind, so erhalten wir die gesuchte *Poissonsche Integralformel*

$$(4)\qquad u(r, \psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \varphi)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + r^2}\,d\varphi$$

oder

$$(5) \qquad u(r,\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\left\{\frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - re^{i\psi}} + \frac{Re^{-i\varphi}}{Re^{-i\varphi} - re^{-i\psi}} - 1\right\} d\varphi.$$

Da sich jede beliebige Potentialfunktion als Realteil einer analytischen Funktion darstellen läßt, so haben wir damit die Werte einer Potentialfunktion im Innern eines Kreises durch ihre Randwerte ausgedrückt. Verlegen wir den Punkt $re^{i\psi}$ in den Mittelpunkt des Kreises, nehmen also $r = 0$, so erhalten wir sofort den *Mittelwertsatz der Potentialtheorie* in Gestalt der Formel

$$(6) \qquad u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\, d\varphi,$$

wobei $u(0)$ den Wert der Potentialfunktion im Mittelpunkt bedeutet.

Aus dieser Formel folgern wir leicht den *Satz vom Maximum und Minimum einer Potentialfunktion*:

Eine in einem Gebiete G einschließlich des Randes reguläre Potentialfunktion u nimmt ihr Maximum und Minimum am Rande an.

Ist u konstant, so ist der Satz trivial. Wäre u eine nicht konstante Potentialfunktion, die etwa ihr Maximum nicht am Rande annähme, so müßte es im Innern einen Punkt x_0, y_0 geben, in welchem das Maximum u^* angenommen wird, während auf der Peripherie eines noch ganz in G gelegenen Kreises um den Punkt x_0, y_0 als Mittelpunkt auch kleinere Werte als u^* angenommen werden. Wenden wir auf diesen Kreis den Mittelwertsatz (6) an, so werden wir auf einen Widerspruch geführt, da die rechte Seite offenbar $< u^*$ ist.

Man kann der *Poisson*schen Integralformel eine andere bemerkenswerte Form geben. Wir können nämlich die beiden Brüche unter dem Integralzeichen der Formel (5) in geometrische Reihen entwickeln, welche gleichmäßig konvergieren, solange $\frac{r}{R}$ unterhalb einer festen Schranke < 1 bleibt; es wird nämlich

$$\frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - re^{i\psi}} = \frac{1}{1 - \frac{r}{R}e^{i(\psi-\varphi)}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in(\psi-\varphi)}$$

$$\frac{Re^{-i\varphi}}{Re^{-i\varphi} - re^{-i\psi}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{-in(\psi-\varphi)}.$$

Tragen wir diese Werte in die *Poisson*sche Integralformel ein und berücksichtigen, daß wir wegen der in φ gleichmäßigen Kon-

vergenz der Reihen die Integration gliedweise ausführen dürfen, so erhalten wir die Formel

$$u(r, \psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \varphi)\, d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{r}{R}\right)^n \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \cos\{n(\psi - \varphi)\}\, d\varphi,$$

oder

$$(7) \qquad u(r, \psi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\psi + b_n \sin n\psi),$$

wobei

$$(8) \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \varphi)\cos n\varphi\, d\varphi, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \varphi)\sin n\varphi\, d\varphi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist. Da jedes Glied unter dem Summenzeichen für sich eine Potentialfunktion darstellt — es ist z. B. $r^n \cos n\psi$ der Realteil der analytischen Funktion $(x + iy)^n$, wenn $x = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$ gesetzt wird —, so haben wir in der Formel (7) eine *Entwicklung einer beliebigen Potentialfunktion in eine Summe besonders einfacher Potentialfunktionen vor uns, welche der Potenzreihenentwicklung einer analytischen Funktion entspricht.*

Bisher diente uns das *Poisson*sche Integral zur Darstellung einer von vornherein als bekannt betrachteten Potentialfunktion. Die Bedeutung der Formel reicht aber weiter; es gilt nämlich der folgende fundamentale Satz:

Ist $f(\varphi)$ eine beliebige stetige Funktion der reellen Variabeln φ mit der Periode 2π, so stellt das Integral

$$(9) \qquad u(r, \psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + r^2}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\left\{\frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - re^{i\psi}} + \frac{Re^{-i\varphi}}{Re^{-i\varphi} - re^{-i\psi}} - 1\right\} d\varphi$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\psi + b_n \sin n\psi)$$

eine im Innern des Kreises mit dem Radius R reguläre Potentialfunktion dar, welche die durch $f(\varphi)$ gegebenen Randwerte annimmt. Dabei bedeuten die Konstanten a_n, b_n die aus der Formel (8) *für $u(R, \varphi) = f(\varphi)$ hervorgehenden Zahlen.*

Wir drücken diese Tatsache auch folgendermaßen aus: Das *Poisson*sche Integral löst die *Randwertaufgabe* der Potentialtheorie für den Kreis.

Zum Beweise unseres Satzes schicken wir folgenden Hilfssatz voran: *Ist $u_1(r, \varphi)$, $u_2(r, \varphi)$, ... eine Folge von Potentialfunktionen,*

welche in einem Kreise K einschließlich des Randes regulär sind und deren Randwerte $f_1(\varphi)$, $f_2(\varphi)$, ... gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f(\varphi)$ konvergieren, so konvergieren auch überall im Kreise K die Potentialfunktionen u_n gegen eine Potentialfunktion u, welche die Randwerte $f(\varphi)$ besitzt.

In der Tat ist $u_n - u_m$ eine in K reguläre Potentialfunktion, deren Randwerte $f_n - f_m$ bei hinreichend großen n und m, absolut genommen, gleichmäßig auf dem Kreis beliebig klein sind; also ist nach dem Satz vom Maximum und Minimum $u_n - u_m$ auch im Innern von K gleichmäßig beliebig klein; mithin konvergieren die Funktionen u_n überall in K einschließlich des Randes gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion u, welche wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz wieder stetig ist, also die Randwerte $f(\varphi)$ besitzt. Andererseits wird die Funktion in jedem Punkte im Innern des Kreises dargestellt durch die Formel (9). Nun kann man den Grenzübergang von u_n zu u einfach dadurch ausführen, daß man in der für die Potentialfunktion u_n gültigen *Poisson*schen Formel die Randwerte $u_n(R, \varphi) = f_n(\varphi)$ durch deren Grenzwert $f(\varphi)$ ersetzt. Die Formel (9) stellt aber gewiß im Innern des Kreises eine Potentialfunktion dar, weil man den Differentialausdruck Δu durch Differentiation nach den rechtwinkligen Koordinaten x, y unter dem Integralzeichen bilden kann; dieser Differentialprozeß Δ, angewandt auf die geschweifte Klammer unter dem Integralzeichen, d. h. den Realteil einer analytischen Funktion, gibt aber den Wert 0.

Nunmehr folgt der behauptete Satz aus der Tatsache, daß man jede beliebige stetige Funktion $f(\varphi)$ mit der Periode 2π gleichmäßig durch eine Folge „trigonometrischer Polynome" von der Form

$$f_n(\varphi) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{h=1}^{n} (a_h^{(n)} \cos h\varphi + b_h^{(n)} \sin h\varphi)$$

approximieren kann[1]). Für diese Funktionen f_n ist aber die Behauptung trivial, denn die entsprechenden Potentialfunktionen

$$u_n(r, \psi) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{r}{R}\right)^h (a_h^{(n)} \cos h\psi + b_h^{(n)} \sin h\psi)$$

haben offenbar die Randwerte $f_n(\varphi)$.

---

[1]) Dies läßt sich folgendermaßen beweisen:

Es sei $f(x)$ eine stetige Funktion mit der Periode 2π und

(1) $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

(2) $$s_1(x) = \frac{a_0}{2}, \quad s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

Das gewonnene Resultat gibt uns Aufschluß über das *Maß der Willkür,* welches *in einer analytischen Funktion* steckt. Man kann die Werte des Realteiles u auf einer gewissen geschlossenen Linie,

---

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{3}$$

dann folgt aus (1) und (2) für $n = 2, 3, \ldots$ wegen der Periodizität von $f(x)$

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} (\cos \nu x \cos \nu t + \sin \nu x \sin \nu t) \right\} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \cos \nu (t - x) \right\} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t + x) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \cos \nu t \right\} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t + x) \, \Re \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} e^{\nu t i} \right\} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t + x) \, \Re \left\{ \frac{1}{2} + \frac{e^{n t i} - e^{t i}}{e^{t i} - 1} \right\} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t + x) \frac{\cos (n-1) t - \cos n t}{2 (1 - \cos t)} dt,$$

und diese Gleichung ist auch noch für $n = 1$ richtig.

Für die „*Fejér*schen Mittelwerte" (3) gilt daher

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t + x) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos (\nu - 1) t - \cos \nu t}{2 (1 - \cos t)} dt \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2 \pi n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t + x) \frac{1 - \cos n t}{1 - \cos t} dt = \frac{1}{2 \pi n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t + x) \left(\frac{\sin \frac{n t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt.$$

Ist $f(x)$ speziell identisch gleich 1, so ist nach (1) $\frac{a_0}{2} = 1$ und alle anderen *Fourier*-Koeffizienten $= 0$, also nach (4)

$$1 = \frac{1}{2 \pi n} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\sin \frac{n t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2 \pi n} \int_{-\pi}^{+\pi} (f(t + x) - f(x)) \left(\frac{\sin \frac{n t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt. \tag{6}$$

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Die Funktion $f(x)$ ist stetig, also **gleichmäßig** stetig, es existiert daher ein nur von ε abhängiges δ des Intervalls $0 < \delta < \pi$ derart, daß für $|t| \leq \delta$ und beliebiges x

$$|f(t + x) - f(x)| < \varepsilon$$

nämlich einem Kreise, willkürlich stetig vorschreiben; dann ist der Imaginärteil v und somit auch die Funktion bis auf eine additive Konstante bestimmt.

3. Kapitel.

Die einfachsten analytischen Funktionen.

§ 1. Lineare Funktionen.

Sind a, b, c, d vier (komplexe) Zahlen von nicht verschwindender Determinante $ad - bc$, so heißt

$$\zeta = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1}$$

eine *lineare Funktion*. Da Zähler und Nenner bei (1) für jedes (endliche) z regulär sind, so ist ζ für alle diejenigen z regulär, welche den Nenner $cz+d$ nicht zu 0 machen. Die Funktion $cz+d$ verschwindet nun im Falle $c = 0$ überhaupt nicht, im Falle $c \neq 0$ nur für $z = -\frac{d}{c}$. Die lineare Funktion ζ ist daher in allen Punkten der z-Ebene regulär mit höchstens *einer* Ausnahme.

---

ist. Folglich wird mit Rücksicht auf (5), wenn J den Integranden in (6) bedeutet,

$$\left|\frac{1}{2\pi n}\int_{-\delta}^{+\delta} J\,dt\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2\pi n}\int_{-\delta}^{+\delta}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt \leqq \frac{\varepsilon}{2\pi n}\int_{-\pi}^{+\pi} = \varepsilon. \tag{7}$$

Ist ferner M das Maximum von $|f(x)|$, so ist

$$\left|\frac{1}{2\pi n}\int_{\delta}^{\pi} J\,dt\right| \leqq \frac{2M}{2\pi n}\int_{\delta}^{\pi}\frac{dt}{\sin^2\frac{t}{2}} \leqq \frac{M}{n\sin^2\frac{\delta}{2}}, \tag{8}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{-\delta} J\,dt\right| \leqq \frac{M}{n\sin^2\frac{\delta}{2}}. \tag{9}$$

Für alle hinreichend großen $n > N = N(\varepsilon)$ ist aber

$$\frac{M}{n\sin^2\frac{\delta}{2}} \leqq \varepsilon,$$

und dann folgt aus (6), (7), (8), (9)

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqq 3\varepsilon$$

für $n > N(\varepsilon)$ gleichmäßig in x.

Die trigonometrischen Polynome $\sigma_n(x)$ konvergieren daher gleichmäßig gegen $f(x)$.

Aus (1) folgt die Umkehrung

$$z = \frac{d\zeta - b}{-c\zeta + a}.$$

z ist also, als Funktion von ζ betrachtet, auch überall regulär, im Falle $c \neq 0$ mit Ausnahme des Punktes $\zeta = \frac{a}{c}$. Um diese lästigen Ausnahmen zu beseitigen, beachten wir, daß $|\zeta|$ über alle Grenzen wächst, wenn z gegen $-\frac{d}{c}$ (im Falle $c \neq 0$) konvergiert. Wir fassen das unendlich Ferne der ζ-Ebene *als einen Punkt* $\zeta = \infty$ auf und ordnen ihn dem Punkt $z = -\frac{d}{c}$ zu; desgleichen ordnen wir den unendlich fernen Punkt $z = \infty$ der z-Ebene dem Punkte $\zeta = \frac{a}{c}$ der ζ-Ebene zu. Ist aber $c = 0$, so wird nach (1) ζ mit z unendlich groß, dann entsprechen sich also die unendlich fernen Punkte beider Ebenen. *Bei der so getroffenen Festsetzung gehört zu jedem Punkt der z-Ebene genau ein Punkt der ζ-Ebene und umgekehrt.*

Zum näheren Studium der durch (1) bewirkten Abbildung der z-Ebene auf die ζ-Ebene betrachten wir die Kreise der z-Ebene, wobei wir die Geraden als Kreise mit unendlich großem Radius ansehen. Sind z_1, z_2, z_3, z_4 vier hintereinanderliegende Punkte auf einem Kreise der z-Ebene, so ist, wenn $|z_i - z_k| = r_{ik}$ gesetzt wird und α bzw. β den Winkel zwischen den Strecken $z_3 \ldots z_1$ und $z_3 \ldots z_2$ bzw. $z_4 \ldots z_1$ und $z_4 \ldots z_2$ bedeutet,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{r_{31}}{r_{32}} e^{i\alpha}, \qquad \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \frac{r_{41}}{r_{42}} e^{i\beta};$$

da nun nach dem Satz von den Peripheriewinkeln über demselben Bogen $\alpha = \beta$ ist, so ist das *„Doppelverhältnis“*

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \frac{r_{31} r_{42}}{r_{32} r_{41}} \tag{2}$$

positiv reell. Man rechnet nun leicht nach, daß durch die Substitution

$$\zeta_n = \frac{a z_n + b}{c z_n + d} \qquad (n = 1, 2, 3, 4)$$

die linke Seite von (2) in das Doppelverhältnis $\frac{\zeta_3 - \zeta_1}{\zeta_3 - \zeta_2} : \frac{\zeta_4 - \zeta_1}{\zeta_4 - \zeta_2}$ übergeht; dieser Ausdruck ist also ebenfalls positiv reell, und da der Satz von den Peripheriewinkeln umkehrbar ist, so folgt hieraus, daß $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ ebenfalls auf einem Kreise liegen. Wir haben daher den Satz:

Durch die lineare Transformation (1) *gehen die Kreise der z-Ebene wieder in Kreise der ζ-Ebene über.* Man sagt auch: die

durch eine lineare Funktion vermittelte Abbildung liefert eine *Kreisverwandtschaft.*

Die Auffassung des unendlich Fernen als eines Punktes wird erleichtert, wenn wir die z-Ebene auf eine Kugel *stereographisch* projizieren[1]), dabei wird der unendlich ferne Punkt der z-Ebene etwa auf den Nordpol der Kugel abgebildet, und die Kreise einschließlich der geraden Linien in der Ebene entsprechen den Kreisen auf der Kugel.

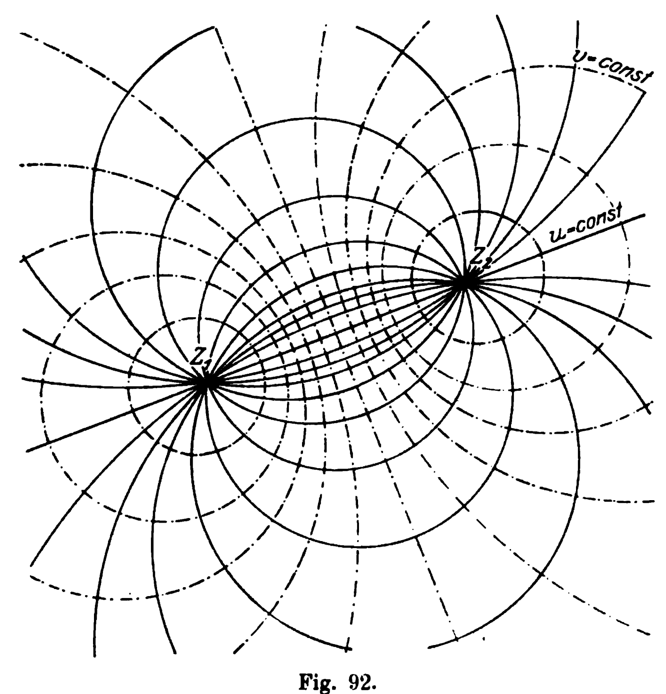


Fig. 92.

Im folgenden ist es vorteilhaft, den Funktionswert ζ nicht als Punkt einer zweiten Ebene, sondern als Punkt der z-Ebene selbst zu deuten. Durch (1) wird dann also die z-Ebene *auf sich selbst abgebildet.* Dabei sind diejenigen Punkte von besonderer Bedeutung, welche ihren Platz nicht ändern, die sogenannten *Fixpunkte* der linearen Substitution (1). Damit z ein Fixpunkt ist, muß

$$z = \frac{az+b}{cz+d}$$

gelten; dies liefert für z die *quadratische Gleichung*

$$(3) \qquad cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

1) Siehe Abschn. I, Kap. 1, S. 9.

Ist $a = d$, $b = 0$, $c = 0$, so liegt die „identische Substitution“ $\zeta = z$ vor, dann ist jeder Punkt Fixpunkt. Sehen wir fortan von diesem trivialen Fall ab, so hat (3) genau *zwei einfache oder eine Doppelwurzel* z; im Falle $c = 0$ muß dabei $z = \infty$ als Lösung von (3) mitgerechnet werden.

Zunächst nehmen wir an, die beiden Wurzeln z_1 und z_2 von (3) seien endlich und voneinander verschieden. Dann geht jeder Kreis durch z_1 und z_2 bei der Transformation (1) in einen Kreis durch dieselben Punkte über, das gesamte Kreisbüschel K durch z_1 und z_2 also in sich. Wegen der Konformität der Abbildung geht dann auch die zu K orthogonale Kreisschar K' in sich über (Fig. 92). Wir unterscheiden drei Möglichkeiten.

1. *Jeder Kreis von K geht in sich selbst über.* Dann liegen also die Bilder der Schnittpunkte eines festen Kreises von K mit den Kreisen von K' wieder auf diesem Kreise; man kann die Kreise von K als die „Bahnen“ ansehen, auf denen die Punkte der Kreise von K' nach ihren Bildpunkten wandern. Eine solche Transformation heißt ***hyperbolisch***.

2. *Jeder Kreis von K' geht in sich selbst über.* Dann sind die Kreise von K' Bahnkurven für die Punkte der Kreise von K. Die Transformation heißt *elliptisch*.

3. *Weder jeder Kreis von K noch jeder Kreis von K' geht in sich selbst über.* Dies ist der allgemeine Fall; die Transformation heißt *loxodromisch*.

Wir wollen nunmehr *Normalformen* dieser drei verschiedenen Arten von Transformationen aufstellen. Es seien z_3 und z zwei Punkte auf einem Kreise durch die Fixpunkte z_1, z_2 und ζ_3, ζ ihre Bildpunkte. Die Bilder der Fixpunkte sind $\zeta_1 = z_1$, $\zeta_2 = z_2$ selbst. Nach dem oben über das Doppelverhältnis Gesagten ist also

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} = \frac{\zeta-\zeta_1}{\zeta-\zeta_2} : \frac{\zeta_3-\zeta_1}{\zeta_3-\zeta_2} = \frac{\zeta-z_1}{\zeta-z_2} : \frac{\zeta_3-z_1}{\zeta_3-z_2}. \tag{4}$$

Im Falle einer hyperbolischen Substitution liegen nun z_1, z_2, z_3, ζ_3 auf einem Kreise, also ist das Doppelverhältnis $\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} : \frac{\zeta_3-z_1}{\zeta_3-z_2}$ eine *reelle* Konstante $\alpha \neq 0$ und

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} = \alpha\,\frac{\zeta-z_1}{\zeta-z_2} \qquad (\alpha \text{ reell}); \tag{5}$$

und umgekehrt folgt aus (5) für reelles $\alpha \neq 0$, daß der Bildpunkt ζ von z auf dem Kreise durch z_1, z_2, z liegt, daß (5) also hyperbolisch ist.

Im Falle einer elliptischen Substitution gilt nach dem bekannten elementargeometrischen „Satz des Apollonius“

$$\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|} = \frac{|\zeta-z_1|}{|\zeta-z_2|}, \tag{6}$$

also

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} = e^{i\varphi}\frac{\zeta - z_1}{\zeta - z_2} \qquad (\varphi \text{ reell}); \tag{7}$$

und umgekehrt folgt aus (7) über (6), daß ζ und z auf einem zum Kreisbüschel durch z_1 und z_2 orthogonalen Kreise liegen, daß (7) also elliptisch ist.

Im Falle einer allgemeinen (loxodromischen) Substitution gilt schließlich nach (4)

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} = \alpha\frac{\zeta - z_1}{\zeta - z_2}, \qquad (\alpha \text{ nicht reell}, |\alpha| \neq 1); \tag{8}$$

darin ist die von 0 verschiedene Zahl α weder reell, noch vom absoluten Betrag 1, da sonst (8) in (5) oder (7) übergehen würde.

Die Formeln (5), (7), (8) *sind die Normalformen der hyperbolischen, elliptischen, loxodromischen Substitution.*

Liegt einer der Fixpunkte, etwa z_2, im Unendlichen, so schreiben wir (8) in der Gestalt $z - z_1 = \alpha(\zeta - z_1)\frac{z - z_2}{\zeta - z_2}$ und lassen hierin z_2 unendlich groß werden; dann erhalten wir offenbar

$$z - z_1 = \alpha(\zeta - z_1);$$

je nachdem hierin α reell $\neq 0$ oder $|\alpha| = 1$ oder α nicht reell und $|\alpha| \neq 1$ ist, haben wir die *Normalform* der hyperbolischen, elliptischen, loxodromischen Substitution *mit einem unendlich fernen Fixpunkt.* Im ersten Fall liegt eine *Streckung* der Ebene vom Punkte z_1 aus vor, die Schar der konzentrischen Kreise um z_1 geht in sich über, die Geraden durch z_1 gehen einzeln in sich über; im zweiten Fall hat man eine *Drehung* der Ebene um z_1, wobei die konzentrischen Kreise einzeln in sich übergehen; der dritte Fall liefert eine sog. *Drehstreckung.* Bei ihr geht ein System logarithmischer Spiralen, sogenannter „Loxodromen", um den Punkt z_1 in sich über, wovon der Name loxodromische Substitution herrührt.

Fallen schließlich die beiden Fixpunkte z_1 und z_2 zusammen, so spricht man von einer *parabolischen* Substitution; liegt der Fixpunkt z_1 im Endlichen, so ist ihre Normalform

$$\frac{1}{z-z_1} = \frac{1}{\zeta - z_1} + b \qquad (b \neq 0),$$

ist aber $z_1 = \infty$, so hat sie die Gestalt

$$z = \zeta + b \qquad (b \neq 0). \tag{9}$$

Die parabolischen Substitutionen lassen sich als *Grenzfälle* der oben betrachteten Substitutionen mit zwei Fixpunkten auffassen; man braucht dazu nur z_2 geradlinig gegen z_1 rücken zu lassen. Dann geht das Kreisbüschel K durch z_1 und z_2 über in ein solches Büschel,

dessen sämtliche Kreise einander in z_1 berühren, und das Büschel K' in das dazu orthogonale durch z_1 (siehe Fig. 93, S. 281).

Im Falle $z_1 = \infty$ ist K eine Schar paralleler Geraden, K' die dazu orthogonale Schar paralleler Geraden, die Transformation (9 eine einfache *Translation.*

In der Gleichung (1) sind nur *drei* Konstanten wesentlich, denn a, b, c, d können offenbar mit demselben von 0 verschiedenen Faktor multipliziert werden, ohne daß die lineare Funktion sich ändert; also hängt die allgemeine lineare Transformation von drei willkürlichen Konstanten ab. Schreibt man vor, daß durch (1) drei beliebig gegebene Punkte (und der Kreis durch dieselben) der z-Ebene in drei andere beliebig gegebene Punkte (und den Kreis durch sie) der ζ-Ebene übergehen sollen, so liefert dies drei lineare homogene Gleichungen für a, b, c, d, die sich bekanntlich stets lösen lassen. Ehe wir aber zu Beispielen übergehen, wollen wir einen nachher nötigen Hilfssatz ableiten.

Es sei K ein Kreis vom Radius r um einen Punkt M. Dann versteht man unter dem *Spiegelpunkt* eines Punktes P in bezug auf diesen Kreis denjenigen Punkt P' des Strahles PM, für welchen

$$MP \cdot MP' = r^2$$

ist; fällt P mit M zusammen, so bedeutet P' den unendlich fernen Punkt; ist umgekehrt P der unendliche ferne Punkt, so bedeutet P' den Punkt M. Wir benutzen diese Ausdrucksweise auch, wenn K in eine gerade Linie ausartet; dann liegen P und P' symmetrisch in bezug auf diese.

Man kann den Prozeß der Spiegelung an einem Kreise, den man auch *Transformation durch reziproke Radien* nennt, folgendermaßen analytisch darstellen: Wir ordnen, indem wir der Einfächheit halber den Einheitskreis als Spiegelkreis wählen, dem Punkte $z = re^{i\varphi}$ den Punkt $\zeta = \frac{1}{r}e^{i\varphi}$ zu, was wir auch durch die Gleichung

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{z}$$

ausdrücken können. Gemäß der Bemerkung am Schluß von § 2 *ist also die Transformation durch reziproke Radien eine konforme Abbildung mit Umlegung der Winkel.*

Nun gilt folgender Satz:

Sind z und z' Spiegelpunkte in bezug auf einen Kreis K, so sind bei linearer Transformation die Bilder ζ und ζ' von z und z' Spiegelpunkte in bezug auf den Bildkreis K.

Nach einem bekannten Satze der elementaren Geometrie sind nämlich alle Kreise durch z und z' orthogonal zu K, und umgekehrt sind zwei Punkte Spiegelpunkte voneinander in bezug auf einen Kreis K, wenn alle Kreise durch sie auf K senkrecht stehen. Nun

geht aber die zu K orthogonale Kreisschar durch z und z' über in eine zu K orthogonale Schar durch ζ und ζ'; folglich sind, wie zu beweisen war, ζ und ζ' Spiegelpunkte in bezug auf K.

Als *erstes Beispiel* suchen wir alle *linearen Funktionen, welche die obere Halbebene,* $\Im z > 0$, *auf das Innere des Einheitskreises,* $|\zeta| < 1$, *abbilden.* Der Spiegelpunkt irgendeines Punktes z in bezug auf die reelle Achse ist der *konjugierte Punkt* $\bar{z}$. Der Spiegelpunkt irgendeines Punktes ζ in bezug auf den Einheitskreis ist der Punkt $\frac{1}{\bar{\zeta}}$, so daß $\zeta = 0$ den Spiegelpunkt ∞ hat. Wenn die Funktion

$$\zeta = \frac{az+b}{cz+d}$$

die gesuchte Abbildung vermittelt, so muß $c \neq 0$ sein, da sonst die Gerade $\Im z = 0$ nicht in den Kreis $|\zeta| = 1$ übergehen könnte. $\zeta = \infty$ geht daher in den *endlichen* Punkt $z = -\frac{d}{c}$ über, $\zeta = 0$ in $z = -\frac{b}{a}$. Also sind $-\frac{d}{c}$ und $-\frac{b}{a}$ konjugiert komplex, so daß wir

$$-\frac{b}{a} = \beta, \quad -\frac{d}{c} = \bar{\beta},$$

$$\zeta = \frac{a}{c}\,\frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}} \qquad (a \neq 0,\ \beta \text{ nicht reell})$$

setzen können. Der reelle Punkt $z = 0$ muß in einen Punkt des Einheitskreises $|\zeta| = 1$ übergehen, woraus sich

$$\left|\frac{a}{c}\cdot\frac{-\beta}{-\bar{\beta}}\right| = \left|\frac{a}{c}\right| = 1, \quad \frac{a}{c} = e^{i\tau} \qquad (\tau \text{ reell}),$$

$$\zeta = e^{i\tau}\,\frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}} \tag{10}$$

ergibt. Da $z = \beta$ in $\zeta = 0$ transformiert wird und die *obere* Halbebene in das *Innere* des Einheitskreises übergehen soll, muß der imaginäre Teil von β positiv sein. Die Funktion (10) leistet unter dieser Bedingung wirklich die gesuchte Abbildung; denn zunächst folgt aus (10) für reelle z die Gleichung

$$|\zeta| = \left|\frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}}\right| = 1,$$

so daß die reelle z-Achse in den Einheitskreis übergeht; ferner geht ein Punkt (nämlich β) der oberen Halbebene in das Innere von $|\zeta| = 1$ über, also aus Stetigkeitsgründen die ganze obere Halbebene in das ganze Innere des Einheitskreises. Daß in (10) drei reelle Konstanten τ, $\Re\beta$, $\Im\beta$ *willkürlich* sind, entspricht der Tatsache, daß man noch drei Punkten der reellen Achse drei beliebige Punkte des Einheitskreises zuordnen kann. Ist der imaginäre Teil von β nega-

tiv, so wird die obere Halbebene auf das Äußere des Einheitskreises abgebildet.

Als *zweites Beispiel* suchen wir alle linearen *Transformationen des Einheitskreises in sich selbst.* Den Spiegelpunkten $\zeta = 0$ und $\zeta = \infty$ müssen Spiegelpunkte $z = \alpha$ und $z = \frac{1}{\bar{\alpha}}$ entsprechen; genau wie oben folgt daraus

$$\zeta = \gamma \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha} z - 1}.$$

Für $z = 1$ muß $|\zeta| = 1$ sein, also

$$\left|\gamma \frac{1 - \alpha}{\bar{\alpha} - 1}\right| = |\gamma| = 1, \quad \gamma = e^{i\tau} \qquad (\tau \text{ reell}),$$

$$\zeta = e^{i\tau} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha} z - 1}. \tag{11}$$

Damit ferner das *Innere* von $|z| = 1$ in das *Innere* von $|\zeta| = 1$ übergeht, muß speziell der Punkt $z = 0$ in einen inneren Punkt von $|\zeta| = 1$ übergehen; daraus folgt die Bedingung $|\alpha| < 1$. Umgekehrt liefert (11) unter dieser Bedingung die gesuchte Abbildung, denn irgendein Punkt z vom absoluten Betrage 1 geht über in

$$\zeta = e^{i\tau} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha} z - 1} = -e^{i\tau} z \frac{1 - \alpha \bar{z}}{1 - \bar{\alpha} z},$$

also einen Wert ζ vom absoluten Betrage 1; ferner geht aus Stetigkeitsgründen das *ganze Innere* von $|z| = 1$ in das ganze Innere von $|\zeta| = 1$ über.

Als *letztes Beispiel* wollen wir ohne Ausführung des Beweises für die *Drehungen der Kugel* eine analytische Darstellung angeben. Wir denken uns die z-Ebene stereographisch auf die Kugel projiziert, die Kugel um irgendeine Achse durch irgendeinen Winkel gedreht und dann ihre Punkte wieder stereographisch auf eine ζ-Ebene projiziert. *Es läßt sich leicht zeigen, daß jede solche Abbildung der z-Ebene auf die ζ-Ebene durch eine lineare Funktion der Form*

$$\zeta = \frac{pz - q}{\bar{q} z - \bar{p}}$$

geliefert wird und daß umgekehrt jeder solchen linearen Funktion eine Kugeldrehung entspricht.

Im vorhergehenden haben wir uns zur Veranschaulichung der linearen Transformation der Orthogonalkreise durch die Fixpunkte bedient. Man kann nun an deren Stelle auch das System der Parallelen $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$ zu den Achsen des Reellen und Imaginären der ζ-Ebene betrachten. Die Geraden $u = \text{konst.}$ sind Kreise durch $\zeta = \infty$, welche sich unter dem Winkel 0 schneiden, dasselbe gilt von dem orthogonalen System $v = \text{konst.}$ Die Bilder von

$u =$ konst. in der z-Ebene sind dann einander berührende Kreise durch $z = -\frac{d}{c}$, die Bilder von $v =$ konst. die dazu orthogonale Schar (vgl. Fig. 93).

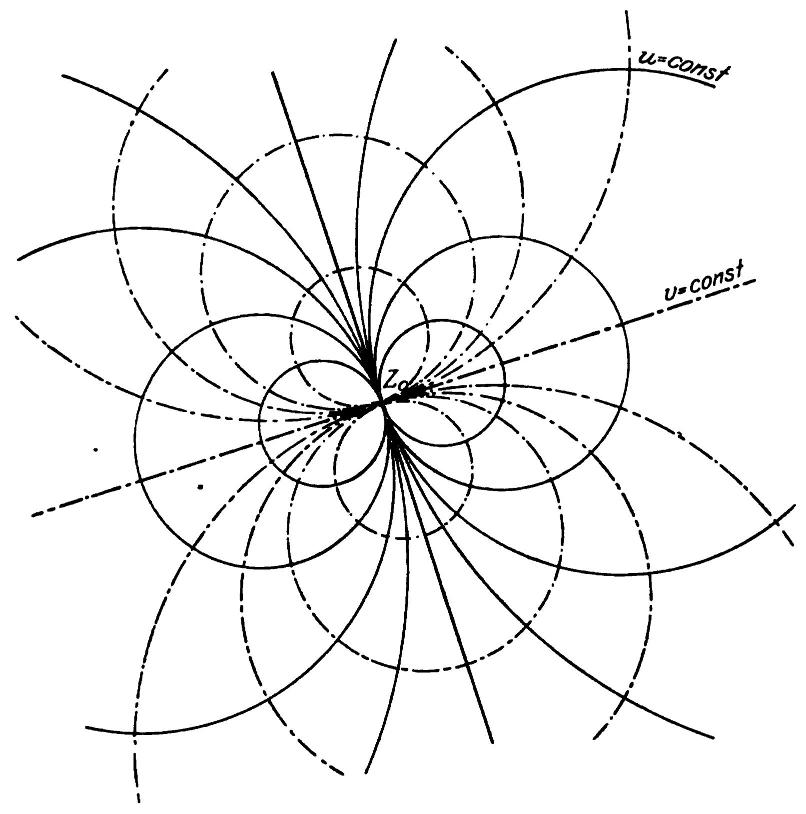


Fig. 93.

§ 2. Singularitäten und Kreuzungspunkte.

Für das Wesen der analytischen Funktionen sind gerade diejenigen Stellen entscheidend, in welchen sie sich nicht mehr regulär verhalten, die „*singulären Punkte*“ bzw. die sonstigen Punkte, in denen die Konformität der Abbildung verloren geht. Wir wollen uns hier an der Hand von typischen Beispielen mit den einfachsten Fällen dieser Punkte beschäftigen.

Wir betrachten zunächst die *logarithmische Singularität.* Nach Kap. 2, § 4 gilt die Gleichung

$$\zeta = \lg z = \lg r + i\varphi,$$

wenn $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ gesetzt ist. Läßt man die positive Zahl r gegen 0 rücken, so wird $\lg r$ negativ unendlich; der Punkt $z = 0$ ist also eine singuläre Stelle der Funktion $\lg z$. Setzen wir $\zeta = u + iv$, so erhalten wir eine Abbildung der z-Ebene auf die ζ-Ebene, bei welcher das Polarkoordinatensystem r, φ der ersten Ebene in das rechtwinklige Koordinatensystem der u, v übergeht; und zwar entsprechen den Kurven $u =$ konst. konzentrische Kreise mit dem Radius r, den Kurven $v =$ konst. die Strahlen durch den Nullpunkt der z-Ebene mit der Neigung φ. Näheres über die Abbildung werden wir sogleich in § 6 kennen lernen.

Wir betrachten die Kurven $\varphi =$ konst. als Bahnkurven, die Kreise $r =$ konst. als Niveaulinien einer Flüssigkeitsströmung in der z-Ebene; dann ist die Strömungsgeschwindigkeit (welche ja radial gerichtet ist) definiert durch $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}$. Bezeichnen wir diese Geschwindigkeitskomponente mit $\mathfrak{v}_r$, so wird nach Kap. 1, § 2 die Menge der in der Zeiteinheit aus einem Kreise C vom Radius r ausströmenden Flüssigkeit durch das über die Peripherie dieses Kreises erstreckte Integral $Q = \int_C \mathfrak{v}_r\, ds$, d. h. aber wegen $\mathfrak{v}_r = \frac{1}{r}$, $ds = r\,d\varphi$ durch den Ausdruck $Q = 2\pi$ gegeben. Der logarithmische Unstetigkeitspunkt stört also die Quellenfreiheit unseres Strömungsfeldes; er stellt, wie man sagt, eine *Quelle von der Ergiebigkeit* 2π dar. Die Flüssigkeit strömt vom Nullpunkt radial ins Unendliche; dort befindet sich eine „*Senke*" der Strömung. Um dies besser zu verstehen, denken wir uns den unendlich fernen Punkt durch eine lineare Transformation ins Endliche gebracht, indem wir etwa setzen

$$z' = \frac{z}{z-1}, \quad z = \frac{z'}{z'-1},$$

woraus sich

$$\zeta = \lg z = \lg z' - \lg(z'-1)$$

ergibt. Setzen wir allgemein

$$\zeta = \lg(z - z_0) - \lg(z - z_1) = u + iv \qquad (z_0 \neq z_1),$$

so wird der Punkt z_0 ein Quellpunkt und der Punkt z_1 ein entsprechender Senkpunkt von der „Stärke" 2π sein; in der Tat, setzen wir

$$z - z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}, \quad z - z_1 = r_1 e^{i\varphi_1},$$

so wird

$$u = \lg\frac{r_0}{r_1}, \quad v = \varphi_0 - \varphi_1 .$$

Die Stromlinien $v =$ konst. werden also nach dem elementargeometrischen Satze über die Peripheriewinkel im Kreise von den Kreisen des Kreisbüschels K durch z_0 und z_1 gebildet, während die Niveaulinien $u =$ konst. mit den Kreisen des orthogonalen Kreis-

büschels K' identisch sind. Es ergibt sich also genau dieselbe Fig. 92, wie wir sie bei der Theorie der linearen Funktionen S. 275 erhalten haben.

Statt die Kurven $v =$ konst. als Strömungslinien und $u =$ konst. als Niveaulinien zu betrachten, hätten wir auch umgekehrt die Flüssigkeit in den Kreisen K' strömen lassen können. In dieser Auffassung würde dann der Punkt z_0 als ein *„Wirbelpunkt“* mit der Wirbelstärke 2π erscheinen, der Punkt z_1 als ein Wirbelpunkt mit der Stärke -2π.

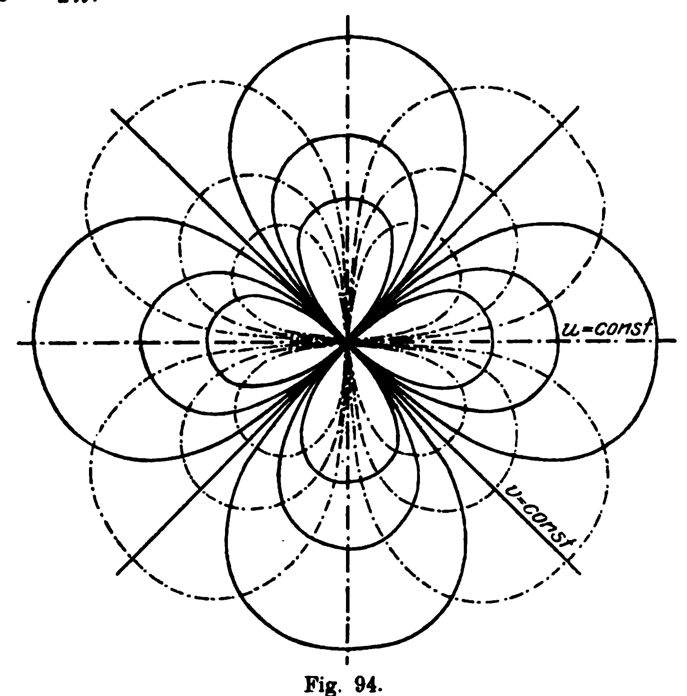


Fig. 94.

Aus der logarithmischen Singularität erhalten wir weitere Singularitäten durch Grenzübergang. Wir betrachten die Funktion

$$\zeta = \frac{\lg(z+h) - \lg z}{h} \qquad (h > 0),$$

welcher in den Punkten $-h$ und 0 je eine Quelle bzw. Senke der Ergiebigkeit $\frac{2\pi}{h}$ entspricht. Lassen wir h gegen Null rücken, so erhalten wir die Funktion $\zeta = \frac{1}{z}$. Wir sagen, die Funktion $\zeta = \frac{1}{z}$ besitzt in $z = 0$ einen *Pol erster Ordnung oder einen einfachen Pol.* Wir können diesen auffassen als die Vereinigung einer Quelle und einer Senke mit entgegengesetzt gleicher über alle Grenzen wachsen-

der Ergiebigkeit. Man spricht daher von einer „*Doppelquelle*"[1]). Durch Zusammenrücken mehrerer Doppelquellen erhalten wir Pole höherer Ordnung vom Typus

$$\zeta = \frac{1}{z^n} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Geometrisch erhalten wir für das Bild der Kurven $u =$ konst. bzw. $v =$ konst. in der Umgebung eines einfachen Poles genau das Bild der Fig. 93, d. h. zwei zueinander orthogonale Kreisscharen, deren jede im Pole eine gemeinsame Tangente besitzt. Entsprechend kompliziertere Figuren erhalten wir für Pole höherer Ordnung; z. B. Fig. 94 für $n = 2$. Wenn die analytische Funktion allgemeiner die Form $\frac{1}{z^n} + \varphi(z)$ besitzt, wo $\varphi(z)$ in der Umgebung der Stelle $z = 0$ regulär bleibt, so werden unsere Figuren in einer hinreichend kleinen Umgebung dieser Stelle noch immer den Verlauf der Kurven $u = c$, $v = c$ mit beliebig großer Annäherung darstellen; d. h. diese Kurven werden z. B. im Falle $n = 1$ bei hinreichend großen absoluten Werten von c geschlossen und annähernd kreisförmig sein und sich sämtlich gegenseitig berühren wie oben. *Allgemein sagen wir, eine Funktion ζ besitzt in z_0 einen Pol n^{ter} Ordnung, wenn sie sich in der Umgebung von z_0 in der Gestalt*

$$\zeta = \frac{a_1}{(z - z_0)^n} + \frac{a_2}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_n}{z - z_0} + \varphi(z) \qquad (a_1 \neq 0)$$

darstellen läßt, wo $\varphi(z)$ eine in z_0 reguläre Funktion bedeutet.

Zu weiteren ausgezeichneten Punkten führt uns die Frage nach den Stellen, in welchen die Ableitung $\frac{d\zeta}{dz}$ verschwindet. In diesen Punkten gilt unser Satz von der Konformität der Abbildung nicht mehr. Wir wollen einen Punkt a, in welchem die Funktion $\zeta' = f'(z)$ eine n-fache Nullstelle besitzt, d. h. sich in der Form

$$\zeta' = (z - a)^n \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!} \{1 + b(z - a) + \cdots\} \qquad (f^{(n+1)}(a) \neq 0)$$

darstellen läßt, einen *n-fachen* **Kreuzungspunkt** nennen. Dann gilt der Satz: *Die Winkel, welche von zwei Kurven durch einen n-fachen Kreuzungspunkt gebildet werden, multiplizieren sich bei der Abbildung auf die ζ-Ebene mit $n + 1$; d. h. die entsprechenden Kurven bilden einen $(n + 1)$mal so großen Winkel miteinander.*

In der Tat, seien

$$z_1 = a + r_1 e^{i\varphi_1}, \qquad z_2 = a + r_2 e^{i\varphi_2}$$

[1]) In der Physik auch „Dipol" genannt.

zwei Punkte in der Nähe von a,

$$\zeta_1 = f(a) + R_1 e^{i\Phi_1}, \quad \zeta_2 = f(a) + R_2 e^{i\Phi_2}$$

ihre Bildpunkte in der ζ-Ebene und $\zeta_0 = f(a)$, dann wird

$$\frac{\zeta_1 - \zeta_0}{\zeta_2 - \zeta_0} = \frac{R_1}{R_2} e^{i(\Phi_1 - \Phi_2)} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} \frac{1 + b' r_1 e^{i\varphi_1} + \cdots}{1 + b' r_2 e^{i\varphi_2} + \cdots} e^{(n+1)i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \left(b' = \frac{n+1}{n+2} b\right)$$

$$\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} \frac{1 + b' r_1 e^{i\varphi_1} + \cdots}{1 + b' r_2 e^{i\varphi_2} + \cdots} e^{i\{(n+1)(\varphi_1 - \varphi_2) - (\Phi_1 - \Phi_2)\}} = 1.$$

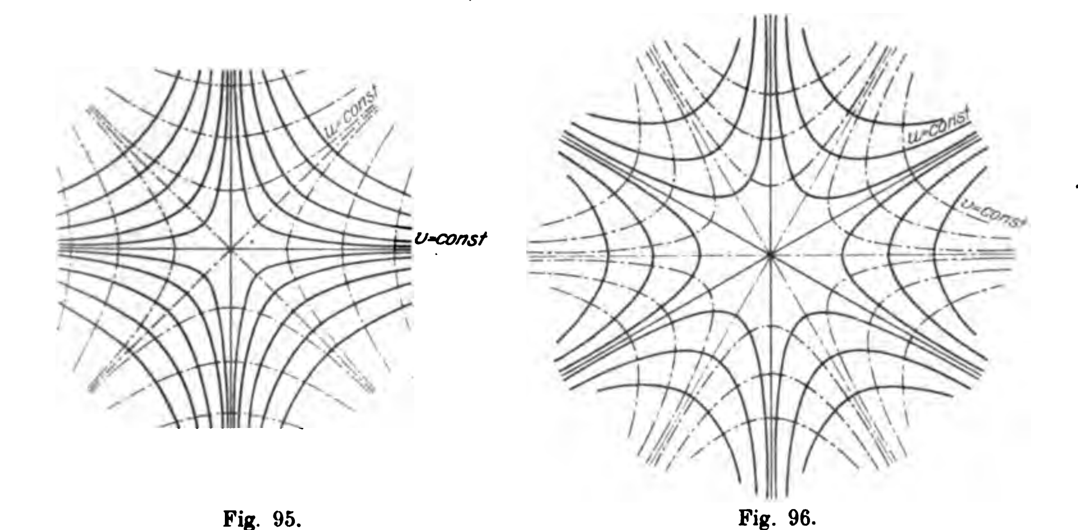


Fig. 95. Fig. 96.

Lassen wir nun r_1, r_2 so gegen Null konvergieren, daß die Winkel φ_1, φ_2 dabei fest bleiben, so strebt der Quotient in der Klammer gegen 1, und es ergibt sich weiter offenbar

$$\lim \frac{R_2}{R_1}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1, \qquad \lim\{(n+1)(\varphi_1 - \varphi_2) - (\Phi_1 - \Phi_2)\} = 0\,[1],$$
$$\lim(\Phi_1 - \Phi_2) = (n+1)(\varphi_1 - \varphi_2),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Geometrisch wird ein solcher Kreuzungspunkt für die Fälle $n = 1$, $n = 2$ durch die nebenstehenden Fig. 95 und 96 erläutert. Bei einer Flüssigkeitsbewegung ist ein Kreuzungspunkt, auch *„Staupunkt"* genannt, ein solcher, nach dem die Flüssigkeit von verschiedenen Richtungen her hinströmt und in welchem die Geschwindigkeit Null herrscht.

[1]) Bei geeigneter Festsetzung über das noch verfügbare Multiplum von 2π.

Im Kreuzungspunkt stehen die Kurven $u =$ konst., $v =$ kon nicht mehr aufeinander senkrecht, sondern die einen halbieren d Winkel zwischen den andern.

Wir werden im § 4 die konforme Abbildung durch die Funktion in der Umgebung eines Kreuzungspunktes näher studieren und d durch zu dem korrespondierenden Begriffe des *Verzweigungspunkt* als einem weiteren wichtigen Typus der singulären Stellen gelange

§ 3. Verhalten der Funktionen im Unendlichen[1]).

Die Einführung des unendlich fernen Punktes der Ebene u seine Veranschaulichung durch Übergang zur Zahlenkugel legt nahe, auch das Verhalten der analytischen Funktionen im Unendlich zu definieren. Wir nennen zu diesem Zwecke die Gesamtheit all Punkte der z-Ebene, welche außerhalb einer einfach geschlossen Kurve C, z. B. außerhalb eines Kreises mit beliebig groß wählbare Radius liegen, eine „*Umgebung des Punktes* ∞". Durch die Trar formation $z' = \frac{1}{z}$ geht diese Umgebung B in eine Umgebung B' d Nullpunktes der z'-Ebene über; jede für alle endlichen Werte z v B definierte und dort reguläre analytische Funktion $f(z)$ geht dab über in eine analytische Funktion

$$\varphi(z') = f\left(\frac{1}{z'}\right),$$

welche überall in B' außer im Nullpunkte $z' = 0$ definiert ist. *W charakterisieren nun das Verhalten von $f(z)$ im Punkte $z = \infty$ dur das Verhalten der Funktion $\varphi(z')$ im Punkte $z' = 0$.* Insbesonde sagen wir, die Funktion $f(z')$ sei im Punkte ∞ regulär, wenn dur Zuweisung eines geeigneten Funktionswertes $\varphi(0)$ die Funktion $\varphi(z$ auch noch im Nullpunkte als reguläre Funktion definiert werden kan Wir sagen ferner, $f(z)$ besitzt im Punkte ∞ einen Pol n^{ter} Ordnur oder eine logarithmische Singularität, wenn dasselbe für $\varphi(z')$ i Punkte $z' = 0$ gilt.

Wenn $f(z)$ für $z = \infty$ regulär ist, so muß die Ableitung $\varphi'($ für $z' = 0$ existieren und stetig sein; das heißt aber, es muß

$$\frac{d\varphi(z')}{dz'} = -f'(z)\frac{1}{z'^2} = -f'(z)\,z^2$$

bei Grenzübergang zu $z = \infty$ einem bestimmten Grenzwert zustrebe wir können dies so ausdrücken, daß wir sagen: *Die Ableitung ein für $z = \infty$ regulären Funktion $f(z)$ verschwindet für unendlich gro Werte von z mindestens in der zweiten Ordnung.*

[1]) Vgl. die entsprechenden Ausführungen im 1. Abschnitt.

Hieraus ziehen wir eine an späterer Stelle zu benutzende Folgerung. Setzen wir $f(z) = u + iv$, so dürfen wir, wenn $f(z)$ in $z = \infty$ regulär ist, das Integral

$$\iint |f'(z)|^2 dx\, dy = \iint (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy = \iint (u_x^2 + u_y^2)\, r\, dr\, d\vartheta \qquad (z = re^{i\vartheta})$$

unbedenklich über ein Gebiet B erstrecken, welches den Punkt ∞ im Inneren enthält; ja wir dürfen sogar dieses Integral auf Grund der Greenschen Formel (3a) in Kap. 1, § 1 in die Gestalt des Randintegrales

$$\int_C u \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$$

setzen; wir erkennen dies sofort, indem wir aus dem Gebiet B zunächst durch einen Kreis mit hinreichend großem Radius R den unendlich fernen Punkt ausschneiden, die Greensche Formel auf den so entstehenden mehrfach zusammenhängenden Bereich anwenden und schließlich R über alle Grenzen wachsen lassen, wobei das Integral über diesen Kreis gegen Null strebt.

Durch die Betrachtungen und Festsetzungen dieses Paragraphen ist die Ausnahmestellung des unendlich fernen Punktes beseitigt.

§ 4. Die Funktion $\zeta = z^n$.

Wir betrachten zunächst die Funktion

$$u + iv = \zeta = z^2 = (x + iy)^2.$$

Es wird $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$; d. h. den Geradenscharen $u =$ konst., $v =$ konst. entsprechen die gleichseitigen Hyperbeln $x^2 - y^2 =$ konst.,

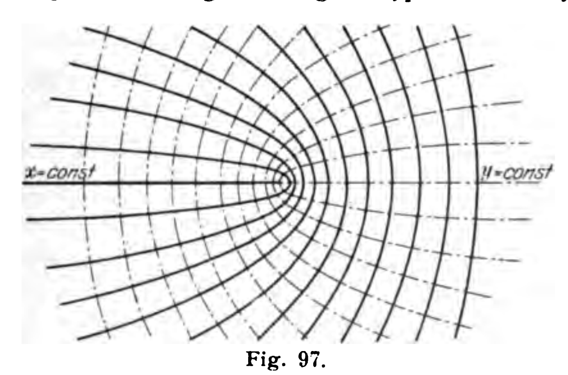


Fig. 97.

$xy =$ konst.; diese beiden Scharen sind überall orthogonal außer im Nullpunkt, wo sie sich unter 45 Grad schneiden, entsprechend der Tatsache, daß $z = 0$ ein einfacher Kreuzungspunkt ist (siehe Fig. 95).

Setzen wir umgekehrt $x = c$, so folgt $v^2 = 4c^2(c^2 - u)$, ebenso folgt aus $y = c$ die Gleichung $v^2 = 4c^2(u + c^2)$: d. h. den Geraden $x =$ konst. und $y =$ konst. der xy-Ebene entsprechen in der uv-Ebene die beiden zueinander orthogonalen nach rechts bzw. links geöffneten Scharen konfokaler Parabeln (Fig. 97).

Endlich wollen wir noch feststellen, wie ein Polarkoordinatennetz der xy-Ebene in der uv-Ebene abgebildet wird. Wir betrachten zunächst Polarkoordinaten r, φ um den Nullpunkt; setzen wir

$$z = re^{i\varphi}, \quad \zeta = \varrho e^{i\vartheta}, \quad \text{so wird} \quad \varrho = r^2, \quad \vartheta = 2\varphi.$$

Die Schar der konzentrischen Kreise $r =$ konst. geht also wieder in konzentrische Kreise $r^2 =$ konst. über, die Winkel φ werden dabei verdoppelt. Läßt man φ bei festem r von 0 bis 2π laufen, so wandert ϑ monoton von 0 bis 4π, der Bildpunkt ζ durchläuft also den Kreis $r^2 =$ konst. zweimal, wenn z den entsprechenden Kreis einmal durchläuft. Somit entsprechen einem Werte von ζ zwei Werte von z; d. h. $z = \sqrt{\zeta}$ ist eine *zweideutige Funktion* von ζ.

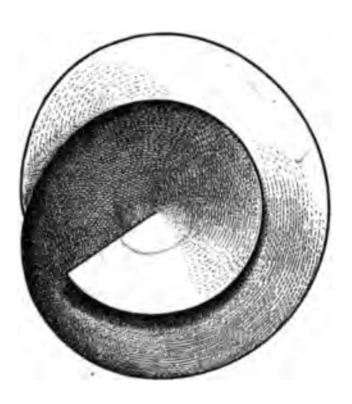


Fig. 98.

Um diese Verhältnisse zu veranschaulichen, denkt man sich die ζ-Ebene in zwei Exemplaren, zwei „*Blättern*" übereinandergelegt. Man führt dann in beiden Blättern von $\zeta = 0$ bis $\zeta = \infty$ kongruente Schnitte, etwa über die positive reelle Achse, und heftet die vier entstehenden „*Schnittufer*" kreuzweise aneinander, ohne sich durch die hierfür nötigen Selbstdurchdringungen stören zu lassen (s. Fig. 98). Der zweimal zu durchlaufende Kreis der gewöhnlichen z-Ebene geht auf dieser zusammengehefteten Fläche in einen einmal zu durchlaufenden Doppelkreis über. Die Bilder der Punkte

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{und} \quad -z = re^{i(\varphi+\pi)},$$

d. h. der Werte $\sqrt{\zeta}$ und $-\sqrt{\zeta}$, werden jetzt durch Punkte verschiedener Blätter repräsentiert, obwohl $z^2 = (-z)^2$ ist. Diese zweiblättrige Fläche ist das einfachste Beispiel einer „*Riemannschen Fläche*". Ihre Bedeutung besteht darin, daß die Abbildung der z-Ebene auf die zweiblättrige *Riemann*sche Fläche eindeutig umkehrbar wird, während dies bei der Abbildung auf die gewöhnliche ζ-Ebene nicht der Fall ist. Das Bild $\zeta = 0$ des Kreuzungspunktes $z = 0$ heißt ein ***Windungspunkt*** *oder Verzweigungspunkt erster Ordnung* der *Riemann*schen Fläche oder auch ein einfacher Verzweigungspunkt der Funktion $z = \sqrt{\zeta}$. In der Umgebung dieses Verzweigungspunktes ist es nicht möglich, den

Werten ζ auf eindeutige Weise Funktionswerte z zuzuordnen, wohl aber den Punkten der *Riemann*schen Fläche. ***Der Verzweigungspunkt ist eine singuläre Stelle.***

Wir wollen noch die Abbildung des Polarkoordinatennetzes der ζ-Ebene um den Punkt $\zeta = 1$ studieren. Die konzentrischen Kreise sind durch die Gleichung

$$(1) \qquad |\zeta - 1| = c > 0,$$

die radialen Strahlen durch

$$(2) \qquad \frac{\zeta - 1}{\bar{\zeta} - 1} = e^{2i\gamma} \qquad (\gamma \text{ reell})$$

gegeben. Aus (1) folgt

$$|z^2 - 1| = |z - 1||z + 1| = c;$$

für das Bild eines Kreises (1) ist also das Produkt der Abstände der Bildpunkte von den Punkten $+1$ und -1 der z-Ebene konstant

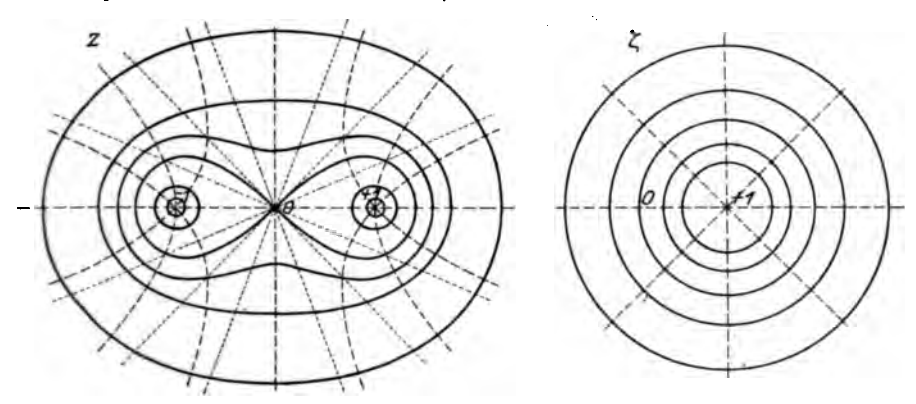


Fig. 99.

gleich c; diese Bildkurven sind also konfokale *Cassini*sche Kurven (Lemniskaten) mit den Brennpunkten $+1$ und -1. Je nachdem $c > 1$ oder $c < 1$ ist, besteht die Lemniskate aus einem Zuge oder zwei Zügen. Für $c = 1$ haben wir die Lemniskate mit Doppelpunkt.

Aus der Gleichung (2) für einen radialen Strahl des Polarkoordinatensystems erhalten wir, indem wir

$$\frac{z - 1}{\bar{z} - 1} = e^{2i\gamma_1}, \qquad \frac{z + 1}{\bar{z} + 1} = e^{2i\gamma_2}$$

setzen, die Gleichung $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$. Die Zahlen γ_1 und γ_2 sind aber die Winkel, welche die Strecken $z \ldots 1$ und $z \ldots -1$ mit der reellen Achse der z-Ebene bilden. Der Bildpunkt des Punktes z durchläuft also gemäß der Bedingung $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ den Ort der Schnittpunkte zweier kongruenter, aber gegenläufiger Strahlenbüschel mit den Mittel-

punkten in $+1$ und -1; dieser Ort ist bekanntlich eine gleichseitige Hyperbel, welche durch die beiden Punkte $+1$ und -1 hindurch geht. Wir erhalten so als Bild des Polarkoordinatennetzes die Figur 99.

Dem Leser mag es im einzelnen überlassen bleiben, den Verlauf der konformen Abbildung durch die beiden Blätter der *Riemann*schen Fläche hindurch zu verfolgen.

In genau entsprechender Weise wie oben läßt sich nun die Potenz $\zeta = z^n$ für einen beliebigen ganzzahligen positiven Exponenten n und deren Umkehrfunktion untersuchen. Die zugehörige *Riemann*sche Fläche besitzt n Blätter und hat einen Windungspunkt $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in $\zeta = 0$ und übrigens auch für $\zeta = \infty$. Die Umkehrfunktion $z = \sqrt[n]{\zeta}$ besitzt für $\zeta = 0$ einen $(n-1)$-fachen Verzweigungspunkt.

§ 5. Die Funktion $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Setzt man wieder $z = re^{i\varphi}$, so folgen für die Funktion

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = u + iv$$

die Gleichungen

$$2u = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad 2v = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

Durch Elimination von φ ergibt sich

$$\frac{u^2}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2} = \frac{1}{4}. \tag{1}$$

Bei der Abbildung der z-Ebene auf die ζ-Ebene gehen also die konzentrischen Kreise $r = \text{konst.}$ in die konfokalen Ellipsen (1) mit den Hauptachsen $r + \frac{1}{r}$ und $\left|r - \frac{1}{r}\right|$ und der Exzentrizität 1 über. Da wir bei Vertauschung von r mit $\frac{1}{r}$ dieselbe Ellipse erhalten, so ergibt sich jede Ellipse als Bild zweier verschiedener am Einheitskreise $r = 1$ spiegelbildlich sich entsprechender Kreise $r = c$, $\frac{1}{r} = c$. Für $r = 1$ reduziert sich die Ellipse auf das doppelt durchlaufene Stück $-1 \leqq u \leqq +1$ der reellen Achse. Es wird dabei sowohl das Innere als das Äußere des Einheitskreises auf die volle ζ-Ebene abgebildet, welche längs der Strecke $-1 \leqq u \leqq +1$ aufgeschnitten zu denken ist. Genau so erhalten wir als Bilder der Geraden $\varphi = \text{konst.}$ die konfokalen zugehörigen Hyperbeln der ζ-Ebene (Fig. 100).

Um diese Abbildung umkehrbar eindeutig zu gestalten, benutzen wir wieder das Hilfsmittel der *Riemann*schen Fläche.

Wir denken uns zwei übereinanderliegende Exemplare der ζ-Ebene, schneiden jedes längs der Geraden von $\zeta = -1$ bis $\zeta = +1$ auf, und heften die vier Ränder kreuzweise aneinander; so erhalten wir eine zweiblättrige *Riemann*sche Fläche, deren eines Blatt auf das Innere, deren anderes auf das Äußere des Einheitskreises der z-Ebene konform abgebildet ist, so daß zwischen den Punkten der z-Ebene

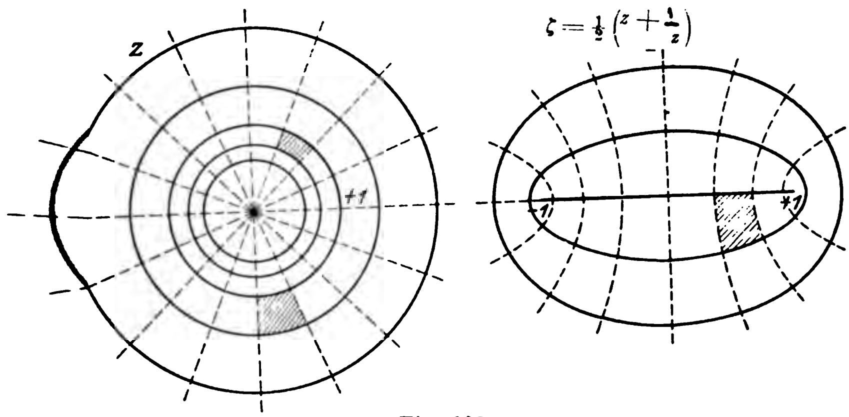


Fig. 100.

und der Fläche eine umkehrbar eindeutige Beziehung besteht; die Umkehrfunktion $z = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$ ist also auf der Fläche eindeutig, während sie in der ζ-Ebene zweideutig wird. In den Punkten $z = \pm 1$ verschwindet die Ableitung $\zeta' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$, was der Tatsache entspricht, daß die Punkte Kreuzungspunkte, ihre Bilder $\zeta = \pm 1$ einfache Verzweigungspunkte der *Riemann*schen Fläche werden.

Es sei ferner auf das Bestehen der Relation

$$\frac{z-1}{z+1} = \sqrt{\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}}$$

hingewiesen, welche den engen Zusammenhang unserer Abbildung mit der von § 4 aufdeckt.

§ 6. Logarithmus und Exponentialfunktion.

Wir haben bereits früher in Kap. 2, § 4, den Logarithmus durch die Gleichung

$$\lg z = \int_1^z \frac{dt}{t}$$

definiert, und dabei erkannt, daß diese Funktion nur bis auf ein beliebiges additives Multiplum von $2\pi i$ bestimmt ist. Führen wir näm-

lich längs der negativen reellen Achse einen Schnitt von $z = 0$ nach $z = \infty$, so gelangen wir von einem Schnittufer zum anderen, indem wir den Nullpunkt in positivem oder negativem Sinne umkreisen; dabei vermehrt bzw. vermindert sich der Funktionswert um $2\pi i$. Überschreiten wir, positiv umlaufend, den Schnitt, und wiederholen den Umlauf, so haben wir an den nämlichen Punkten überall um $2\pi i$ vermehrte Werte von $\lg z$. Wir denken uns nun ein zweites Exemplar der aufgeschnittenen Ebene über das erste gelegt, indem wir das obere Schnittufer der ersten mit dem unteren Schnittufer der zweiten Ebene vereinigt denken, und fahren so in infinitum fort; analog heften wir an das untere Ufer des Ausgangsblattes das obere eines neuen, unter das erste zu legenden Blattes usw. Es entsteht so ein Gebilde, ähnlich einer unendlichen Schraubenfläche, welches unendlich viele Blätter besitzt und die *Riemannsche Fläche des Logarithmus* heißt. Dabei werden die Punkte 0 und ∞ *Verzweigungspunkte oder Windungspunkte unendlich hoher Ordnung*, da in ihnen unendlich viele Blätter zyklisch zusammenhängen.

Aus den Gleichungen $z = re^{i\varphi}$, $\zeta = u + iv = \lg r + i\varphi$, $u = \lg r$, $v = \varphi$ des Kap. 2, § 4, folgt für ein festes Blatt der *Riemann*schen Fläche, in welchem der Winkel φ von $-\pi$ bis $+\pi$ variiert, daß dieses Blatt durch die Funktion $\lg z$ auf einen unendlichen Parallelstreifen $-\pi \lesseqqgtr v \leqq +\pi$ der ζ-Ebene umkehrbar eindeutig abgebildet wird, wobei die beiden Schnittufer den Randgeraden $v = -\pi$, $v = +\pi$ entsprechen; während der Winkel φ monoton bei festem r von $-\pi$ bis $+\pi$ wächst, bewegt sich der Bildpunkt monoton auf einer Geraden $u = \lg r$ zwischen den Randgeraden $v = -\pi$, $v = +\pi$; wenn r von 0 bis $+\infty$ monoton wächst, bewegt sich bei festem φ der Bildpunkt von negativ unendlich großen Werten von u zu positiv unendlich großen Werten von u auf einer Geraden $v = \varphi$. Die gesamte unendlich-vielblätterige *Riemann*sche Fläche wird also umkehrbar eindeutig auf die volle ζ-Ebene abgebildet, wobei äquivalente, d. h. übereinanderliegende Punkte der Fläche in solche Punkte der ζ-Ebene abgebildet werden, für welche der Unterschied der u-Koordinaten Null, der Unterschied der v-Koordinaten ein Multiplum von 2π ist.

Das *Additionstheorem des Logarithmus*

$$\lg z_1 + \lg z_2 = \lg(z_1 z_2) \tag{1}$$

ergibt sich sofort allgemein für komplexe Werte der Variablen aus der Transformation

$$\lg(z_1 z_2) = \int_1^{z_1 z_2} \frac{dt}{t} = \int_1^{z_1} \frac{dt}{t} + \int_{z_1}^{z_1 z_2} \frac{dt}{t} = \lg z_1 + \int_1^{z_2} \frac{d(z_1 t)}{z_1 t} = \lg z_1 + \int_1^{z_2} \frac{dt}{t}$$
$$= \lg z_1 + \lg z_2 .$$

Wir hatten die Umkehrfunktion des Logarithmus, die „*Exponentialfunktion*", mit $z = e^{\zeta}$ bezeichnet; sie ist für alle endlichen Werte von ζ definiert. Der Vieldeutigkeit des Logarithmus entsprechend, besitzt sie die *Periode* $2\pi i$, d. h. sie genügt der Gleichung

$$e^{\zeta+2\pi i} = e^{\zeta}, \qquad e^{2\pi i} = 1,$$

und allgemein folgt aus (1) die Relation

$$e^{\lg z_1} e^{\lg z_2} = e^{\lg z_1 + \lg z_2}, \qquad e^a e^b = e^{a+b}.$$

Da der Nullpunkt der z-Ebene in den unendlich fernen Punkt der ζ-Ebene transformiert wird, so verschwindet e^{ζ} für *keinen* endlichen Wert von ζ; *die Exponentialfunktion ist die einfachste nicht konstante Funktion ohne Nullstellen.*

§ 7. Die trigonometrischen Funktionen.

Durch die Gleichungen

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}},$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}$$

führen wir vier Funktionen ein, welche für reelle Werte der Variablen mit den elementargeometrisch gebrauchten trigonometrischen Funktionen übereinstimmen und denselben Namen führen wie diese[1]).

Wir wollen hier nur die Abbildung betrachten, welche durch die Funktion $\zeta = \operatorname{tg} z$ von der z-Ebene auf die ζ-Ebene vermittelt wird. Wir schreiben

$$(1)\ t = iz, \quad (2)\ \omega = e^t, \quad (3)\ \eta = \frac{\omega - 1}{\omega + 1}, \quad (4)\ \zeta = \frac{1}{i}\eta.$$

Die Gleichung (1) definiert eine Drehung der z-Ebene um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ in die t-Ebene. Gleichung (2) gibt eine konforme Abbildung der t-Ebene auf die im vorigen Paragraphen untersuchte *Riemann*sche Windungsfläche, d. h. sie transformiert einen zur reellen Achse parallelen Streifen der t-Ebene von der Breite 2π in die aufgeschnittene ω-Ebene. Die lineare Transformation (3) ist uns ebenfalls bekannt; bei ihr bleibt die reelle Achse erhalten, während die Punkte $+1, -1$ der ω-Ebene in die Punkte 0 und ∞ der η-Ebene übergehen; schließlich stellt (4) eine einfache Drehung um den Winkel $-\frac{\pi}{2}$ dar. Wir gelangen so für die Umkehrfunktion von

[1]) Vgl. Abschn. I, Kap. 4, § 2.

$\zeta = \operatorname{tg} z$, die Funktion $z = \operatorname{arctg} \zeta$, zu einer *Riemann*schen Fläche, welche ähnlich wie die des Logarithmus zwei Windungspunkte unendlich hoher Ordnung besitzt, und zwar in $\zeta = +i$, $\zeta = -i$; dies läßt vermuten, daß der arctg nahe mit dem Logarithmus verwandt ist; in der Tat folgt aus (1), (2), (3), (4) direkt

$$\operatorname{arctg} \zeta = z = \frac{1}{2i} \lg \frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}.$$

In ganz ähnlicher Weise lassen sich die durch die übrigen trigonometrischen Funktionen vermittelten Abbildungen studieren.

§ 8. Potenzen mit beliebigem Exponenten.

Man definiert die Potenz $\zeta = z^\alpha$ mit dem beliebigen reellen oder komplexen Exponenten α durch die Gleichung

$$\zeta = e^{\alpha \lg z}.$$

Diese Funktion ist also eine eindeutige Funktion der Funktion $\lg z$; man kann sie in „Parameterdarstellung" durch die Gleichungen

$$\zeta = e^{\alpha t}, \qquad z = e^t$$

charakterisieren, oder wie man auch sagt, *„durch eindeutige Funktionen uniformisieren"*.

Ist α *keine rationale Zahl*, so wird die Funktion $z^\alpha = e^{\alpha \lg z}$ ebenso unendlich vieldeutig sein wie der Logarithmus und sich daher als eindeutige Funktion der Punkte auf der *Riemann*schen Windungsfläche des Logarithmus auffassen lassen; sie hat dann bei $z = 0$ und $z = \infty$ je einen Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung. Bei einem Umlauf um den Punkt $z = 0$ multipliziert sich nämlich der Funktionswert mit $e^{2\pi i \alpha}$, bei n-maligem Umlauf mit $e^{2\pi i n \alpha}$; keine zwei dieser Werte sind einander gleich.

Ist aber α eine reelle *rationale* Zahl $\frac{p}{q}$, so wird sich schon nach q Umläufen der Ausgangswert wieder ergeben; an Stelle der unendlich vielblättrigen Fläche können wir daher eine q-blättrige *Riemann*sche Fläche treten lassen, die so aussieht wie die in § 4 betrachtete Fläche.

Es ist lehrreich, die konformen Abbildungen zu betrachten, welche durch die allgemeine Potenz vermittelt werden. Ist α reell, so werden einfach die Winkel um den Nullpunkt mit α multipliziert, die Strahlen durch den Nullpunkt und die konzentrischen Kreise gehen in sich über. Allgemeiner wird durch die Beziehung

$$\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2} = \left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right)^\alpha$$

ein *Kreisbogenzweieck* mit den Ecken z_1, z_2 in der z-Ebene, d. h. ein von zwei Kreisen durch z_1, z_2 begrenztes Gebiet mit dem Winkel ϑ

in ein ebensolches Gebiet mit den Ecken ζ_1, ζ_3 und dem Winkel $\alpha \cdot \vartheta$ über der ζ-Ebene abgebildet.

Ganz anders liegen die Dinge, wenn α rein imaginär ist, etwa $\alpha = i$, $\zeta = z^i$. Wir studieren die konforme Abbildung der oberen Halbebene $\mathfrak{J} z \geqq 0$ auf die ζ-Ebene. Indem wir $\zeta = \varrho e^{i\psi}$, $z = r e^{i\varphi}$ setzen, erhalten wir sofort

$$\varrho = e^{-\varphi}, \quad \psi = \lg r,$$

d. h. den Strahlen $\varphi =$ konst. der z-Ebene entsprechen konzentrische Kreise $\varrho = e^{-\text{konst.}}$ der ζ-Ebene, den Kreisen $r =$ konst. der z-Ebene dagegen Strahlen $\psi = \lg$ konst. in der ζ-Ebene. Der rechten Halbgeraden $\varphi = 0$ der z-Ebene entspricht speziell der unendlich oft in beiden Richtungen durchlaufene Kreis $\varrho = 1$, der Halbgeraden $\varphi = \pi$ der ebenso unendlich oft durchlaufene Kreis $\varrho = e^{-\pi}$; im Nullpunkt sowie im Punkte ∞ der z-Ebene wird der Wert von ζ unbestimmt. *Wir erhalten so als Bild der oberen z-Halbebene ein Band, welches sich über dem Kreisring $e^{-\pi} \leqq \varrho \leqq 1$ der ζ-Ebene nach beiden Seiten unendlich oft nach Art einer logarithmischen Windungsfläche ausbreitet.*

4. Kapitel.

Weitere Abbildungen.

§ 1. Hilfssatz.

Es sei B ein von einer doppelpunktlosen stückweise glatten Kurve C begrenzter Bereich der z-Ebene, und $\zeta = f(z)$ eine in B einschließlich des Randes stetige und im Innern reguläre analytische Funktion, welche auf C nirgends gleiche Werte annimmt; dann bildet die Funktion ζ das Gebiet B umkehrbar eindeutig auf dasjenige Gebiet B' der ζ-Ebene ab, welches von der Bildkurve C' von C begrenzt wird.

Beweis: Wie in Abschnitt I, Kap. 5, § 9 gezeigt ist und sofort durch Betrachtung des Integrales von $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ um den Rand herum folgt, erhalten wir die Anzahl der Nullstellen einer in einem Gebiete B regulären am Rande nicht verschwindenden Funktion $\varphi(z)$, indem wir die Änderung der Funktion $\lg \varphi(z)$ beim positiven Umlauf um das Gebiet B durch $2\pi i$ dividieren, wobei notwendig eine positive ganze Zahl herauskommt. Dabei brauchen wir für den Rand nicht mehr die Regularität, sondern nur die Stetigkeit von $\varphi(z)$ vorauszusetzen[1]. Nun sei α eine komplexe im Gebiete B' der ζ-Ebene gelegene Zahl, dann wird nach Voraussetzung für $\varphi(z) = f(z) - \alpha = \zeta - \alpha$ der Wert von $\lg(\zeta - \alpha) = \lg(f(z) - \alpha)$ sich genau um $2\pi i$ vermehren, wenn

[1]) Vgl. die entsprechende Bemerkung auf S. 261.

der Punkt z in positivem Sinne das Gebiet B, der Punkt ζ also einmal das Gebiet B' umwandert und zwar zufolge der obigen Bemerkung notwendig in positivem Sinne; denn setzen wir $\zeta^* = \zeta - \alpha$, so wandert der Wert ζ^* einmal in positivem Sinne um den Nullpunkt herum. Mithin wird von der Funktion $f(z)$ jeder zu B' gehörige Wert α einmal und nur einmal in B angenommen, d. h. die Gebiete B und B' sind wirklich umkehrbar eindeutig aufeinander abgebildet.

§ 2. Abbildung des Rechteckes auf die Halbebene.

Wir wollen die Abbildung studieren, welche durch die Funktion

$$\zeta = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

das Legendresche „elliptische Integral 1. *Gattung"*, von der z-Ebene auf die ζ-Ebene entworfen wird; hierbei möge k eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 sein, und die Quadratwurzel beim Ausgangspunkt $t = 0$ des Integrationsweges den Wert $+1$ haben. Der Integrand ist offenbar eine für alle von $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ verschiedenen Werte von t reguläre Funktion; den Wert der oberen Grenze z und den Integrationsweg wollen wir auf die obere Halbebene $\mathfrak{J} z \geqq 0$, $\mathfrak{J} t \geqq 0$ beschränken. Ist z ein solcher Punkt, dann liegt zwischen zwei von 0 nach z führenden Integrationswegen kein singulärer Punkt des Integranden; d. h. nach dem Integralsatz von *Cauchy* ist ζ eine reguläre analytische Funktion von z in der oberen Halbebene.

Wir wollen nun untersuchen, welchen Weg der Bildpunkt ζ beschreibt, wenn der Wert z von 0 über 1, $\frac{1}{k}$ nach ∞ und dann von $-\infty$ über $-\frac{1}{k}$, -1 zurück nach 0 ständig wachsend läuft. Dabei denken wir uns die Verzweigungspunkte $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ des Integranden zunächst durch kleine in der oberen Halbebene liegende Halbkreise umgangen, wodurch die Mehrdeutigkeit des Integranden ausgeschaltet ist; da dieser in den betreffenden Punkten nur von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich wird, so können wir schließlich die Radien der Umgehungskreise gegen Null zusammengezogen denken, ohne damit den Wert der Funktion ζ in der oberen Grenze des Integrationsweges zu ändern[1]).

---

[1]) Mit andern Worten, das Integral über den Umgehungskreis konvergiert mit dessen Radius gegen Null; den Beweis wird der Leser leicht selbst ergänzen.

Es sei nun $0 \leqq z < 1$, dann ist der Integrand positiv, also wächst der Funktionswert ζ monoton von 0 bis zu einem Grenzwert

$$\frac{\omega_1}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} > 0.$$

Es sei weiter $1 \leqq z < \frac{1}{k}$. Beim Umlaufen von $t = 1$ auf dem Umgehungshalbkreis vermindert sich die Amplitude von $1 - t$ um π (sie geht von 0 nach $-\pi$), die von $\sqrt{1-t}$ also um $\frac{\pi}{2}$, die anderen Faktoren $1 + t$, $1 - kt$, $1 + kt$ des Nenners bleiben aber für $1 \leqq t < \frac{1}{k}$ positiv; wir können also schreiben

$$\zeta = \frac{\omega_1}{2} + i \int_1^z \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2 t^2)}},$$

wobei wieder der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck positiv bleibt, solange $1 \leqq t < \frac{1}{k}$ ist. Für dieses Intervall läuft also ζ geradlinig von $\frac{\omega_1}{2}$ bis $\frac{\omega_1}{2} + \omega_2 i$, wobei ω_2 die positive Zahl

$$\omega_2 = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2 t^2)}}$$

ist.

Es sei drittens $\frac{1}{k} \leqq z < \infty$. Beim Passieren des Punktes $t = \frac{1}{k}$ vermindert sich die Amplitude von $1 - kt$ um π, während die andern Faktoren des Nenners ungeändert bleiben; auf dieser Strecke wird also der Integrand negativ reell. Setzen wir $t = \frac{1}{k\tau}$, so wird

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2 t^2-1)}} = \int_1^0 \frac{-\frac{d\tau}{k\tau^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{k^2\tau^2}-1\right)\left(\frac{1}{\tau^2}-1\right)}} = \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-k^2\tau^2)(1-\tau^2)}} = \frac{\omega_1}{2}.$$

Durchläuft also z das Intervall $\frac{1}{k} \leqq z \leqq \infty$, so geht der Punkt ζ geradlinig von $\frac{\omega_1}{2} + \omega_2 i$ bis $\frac{\omega_1}{2} + \omega_2 i - \frac{\omega_1}{2} = \omega_2 i$. Auf dieselbe Art erkennt man, daß ζ geradlinig von 0 bis $-\frac{\omega_1}{2}$, bzw. von $\frac{-\omega_1}{2}$ bis $\frac{-\omega_1}{2} + \omega_2 i$, bzw. von $\frac{-\omega_1}{2} + \omega_2 i$ bis $\omega_2 i$ wandert, wenn z die Strecken $0 \ldots -1$, bzw. $-1 \ldots -\frac{1}{k}$, bzw. $-\frac{1}{k} \ldots -\infty$ durchläuft.

Die reelle Achse der z-Ebene wird also auf die genau einmal umlaufene Begrenzung des Rechteckes mit den Ecken $+\frac{\omega_1}{2}$, $+\frac{\omega_1}{2}+\omega_2 i$, $\frac{-\omega_1}{2}+\omega_2 i$, $\frac{-\omega_1}{2}$ der ζ-Ebene umkehrbar eindeutig abgebildet.

Da die Funktion ζ im Inneren der oberen Halbebene regulär und einschließlich des Randes überall endlich und stetig ist, so wird zufolge § 1 die *obere Halbebene durch das elliptische Integral umkehrbar eindeutig und konform auf das Innere des betrachteten Rechteckes abgebildet.*

Die Umkehrfunktion $z = z(\zeta)$ ist die schon im 2. Abschnitt, Kap. 3 behandelte elliptische Funktion $s(\zeta)$.

§ 3. Analytische Fortsetzung und Spiegelungsprinzip.

Sind $f_1(z)$ bzw. $f_2(z)$ in den Gebieten G_1 bzw. G_2 regulär, welche ein gemeinsames Teilgebiet G besitzen, und ist in diesem Teilgebiet identisch $f_1(z) = f_2(z) = f(z)$, so heißt $f_1(z)$ bzw. $f_2(z)$ die analytische Fortsetzung von $f(z)$.

Im 1. Abschnitt ist ausführlich dargelegt, wie man prinzipiell stets durch Potenzreihen die analytische Fortsetzung bewerkstelligen kann; hier dagegen wollen wir ein anschauliches einfaches Hilfsmittel kennen lernen, welches in vielen wichtigen Einzelfällen die wirkliche Durchführung des Fortsetzungsprozesses ermöglicht, nämlich das *Riemann-Schwarzsche „Spiegelungsprinzip"*.

Wir nehmen an, ein Gebiet G der z-Ebene besitze ein geradliniges Begrenzungsstück l, und eine im Innern von G und auf l reguläre analytische Funktion $\zeta = f(z)$ bilde das Gebiet G so auf ein Gebiet Γ der ζ-Ebene ab, daß dabei dem geradlinigen Stück l umkehrbar eindeutig wieder ein geradliniges Begrenzungsstück λ des Bildbereiches Γ entspricht. Wir spiegeln nun die Bereiche G, Γ an l bzw. λ, wobei die Punkte z, ζ in z^*, ζ^*, die Gebiete G, Γ in G^*, Γ^* übergehen. Ordnen wir dem Werte z^* den Wert ζ^* zu, so wird behauptet, daß die Funktion $\zeta^* = \zeta^*(z^*)$, welche G^* auf Γ^* abbildet, die analytische Fortsetzung von $\zeta = \zeta(z)$ ist.

Daß ζ^* im Innern von G^* analytisch ist, erkennt man unmittelbar, weil aus der Differenzierbarkeit von $\zeta(z)$ sofort die von $\zeta^*(z^*)$ folgt. Um zu zeigen, daß ζ^* die analytische Fortsetzung von ζ ist, betrachten wir einen beliebigen Punkt im Innern der Strecke l und schlagen um ihn einen Kreis K mit einem so kleinen Radius, daß dieser ganz ins Innere des vereinigten Gebietes $G + G^*$ fällt (siehe Fig. 101). Den Rand des unteren Halbkreises nennen wir H^*, den des oberen H; ferner bedeute $\varphi(z)$ im unteren Halbkreise die Funktion ζ^*,

im oberen die Funktion ζ. Für jeden Punkt z_0 im unteren Halbkreise gilt dann die *Cauchy*sche Integraldarstellung

$$(1) \qquad \varphi(z_0) = \int^{H^*} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz;$$

ferner ist $\frac{\varphi(z)}{z - z_0}$ im Innern des oberen Halbkreises regulär, also nach dem Satz von *Cauchy*

$$0 = \int^{H} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz.$$

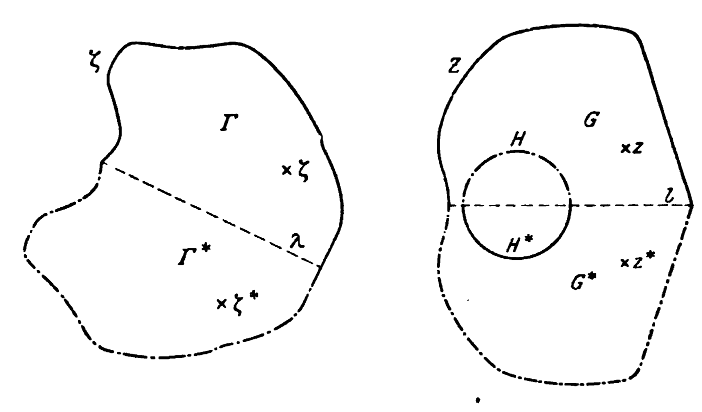


Fig. 101.

Aus (1) und (2) folgt durch Addition, da sich die Integrale über den auf l gelegenen Durchmesser von K aufheben,

$$(3) \qquad \varphi(z_0) = \int^{K} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz.$$

Genau dieselbe Formel gilt, wenn z_0 im oberen Halbkreis liegt; vermöge (3) ist also $\varphi(z_0)$ eine im ganzen Kreise K reguläre analytische Funktion von z_0, die in den beiden Halbkreisen mit ζ bzw. ζ^* übereinstimmt, so daß also ζ und ζ^* wirklich analytische Fortsetzungen voneinander sind.

Da man jeden Kreisbogen durch eine lineare Transformation in eine geradlinige Strecke überführen kann, und da hierbei Spiegelpunkte am Kreise in Spiegelpunkte an der Strecke übergehen, wie in Kap. 3, § 1 gezeigt wurde, so *gilt das Spiegelungsprinzip allgemeiner, wenn an Stelle der Strecken l, λ beliebige Kreisbögen treten.*

Man kann ohne weiteres aus den vorangehenden Betrachtungen folgenden, das Wesen der analytischen Fortsetzung kennzeichnenden Satz ablesen: *Wenn in zwei Gebieten G und G^*, welche längs eines Kurvenstückes C aneinandergrenzen, analytische Funktionen* $f(z)$, $f^*(z)$

definiert sind, die sich längs C stetig aneinander anschließen, so ist die eine analytische Fortsetzung der anderen.

Es ist von Wichtigkeit, daß die Voraussetzungen für den Beweis des Spiegelungsprinzipes gemildert werden können. *Es braucht nämlich über die Regularität der Funktion $\zeta = f(z)$ auf dem Randstück l nichts vorausgesetzt zu werden; vielmehr genügt es, vorauszusetzen, daß durch die Funktion $f(z)$ das Innere des Gebietes G umkehrbar eindeutig auf das Innere von Γ abgebildet wird.*

Um dies einzusehen, brauchen wir nur in den obigen Ausführungen unter den Zeichen H, H^* statt der Halbkreisberandungen die Ränder derjenigen Kreissegmente zu verstehen, welche aus den Halbkreisen hervorgehen, wenn man von diesen je einen schmalen an die Gerade l beiderseits anliegenden Streifen der Breite ε abschneidet; indem man dann ε gegen Null rücken läßt, erhält man ohne weiteres wieder die Relation (3).

§ 4. Der Gesamtverlauf der analytischen Funktionen und ihre Singularitäten.

Bei den bisher behandelten Beispielen analytischer Funktionen waren diese stets durch explicite übersehbare Bildungsgesetze gegeben, und es verstand sich von selbst, was wir als Existenzbereich dieser Funktionen bzw. als deren singuläre Stellen anzusehen hatten. Durch die Idee der analytischen Fortsetzung sind wir instand gesetzt, diese Begriffe in abstracto für eine beliebige analytische Funktion zu präzisieren, wobei natürlich zu beachten bleibt, daß diese Abstraktionen erst durch die vorangehenden und die nachfolgenden Beispiele ihre lebendige Bedeutung gewinnen.

Wir gehen aus von einem **„schlichten“**, d. h. die Ebene nirgends mehrfach überdeckenden Gebiet G der z-Ebene, in welchem eine analytische Funktion $f(z)$ definiert sei; die Randpunkte des Gebietes werden dabei als nicht zu demselben gehörig betrachtet. Nunmehr denken wir uns durch analytische Fortsetzung, welche wir etwa gemäß den Ausführungen des ersten Abschnittes durch Potenzreihen bewerkstelligen können, die Funktion in weitere, an G angrenzende Gebiete G', G'', ... analytisch fortgesetzt und so ihren Definitionsbereich erweitert zu einem Gebiete G_1; in derselben Weise fahren wir fort. Gelangen wir bei diesem Fortsetzungsprozesse zu Gebieten $G^{(\nu)}$, welche zugleich mit einem der früheren Gebiete $G^{(\mu)}$ oder mit Teilen von solchen dasselbe Stück der z-Ebene überdecken, so sind die Punkte der übereinandergreifenden Gebiete miteinander zu identifizieren, falls in diesen Gebieten auch die Funktionswerte nach der analytischen Fortsetzung miteinander übereinstimmen; ist dies jedoch nicht der Fall, so betrachten wir die Gebiete $G^{(\mu)}$ und $G^{(\nu)}$ als *ver-*

schiedenen Blättern einer Riemannschen Fläche angehörig und bezeichnen die Gesamtheit der Werte von $f(z)$ in diesen Gebieten als *zwei verschiedene*, über demselben Gebiet der z-Ebene ausgebreitete *Zweige derselben Funktion* $f(z)$, welche dann *mehrdeutig* heißt. Indem wir auf diese Art beliebig fortfahren, erweitern wir den Definitionsbereich G der Funktion $f(z)$ und gelangen so zu einem über der z-Ebene ausgebreiteten möglicherweise unendlich vielblättrigen und unendlich vielfach zusammenhängenden anschaulich allgemein nicht mehr übersehbaren Bereich $\overline{G}$, dem wir alle Punkte zurechnen, welche durch analytische Fortsetzung in der angegebenen Art erreicht werden können. Wir nennen diesen Bereich die *Riemannsche Fläche* oder auch den *Existenzbereich der analytischen Funktion*; den Punkten dieser *Riemann*schen Fläche sind die Funktionswerte $f(z)$ bzw. die zusammengehörigen Wertepaare (ζ, z) eindeutig zugeordnet, während sie den Punkten der schlichten z-Ebene nicht eindeutig zugeordnet zu sein brauchen. Die so gewonnenen auf $\overline{G}$ ausgebreiteten Funktionswerte $f(z)$ definieren den *Gesamtverlauf der Funktion* $f(z)$; indem wir zusammengehörige Werte $\zeta = f(z)$, z als *„Stelle des analytischen Gebildes"* $f(z)$ bezeichnen, haben wir diese Stellen den Punkten der Riemannschen Fläche $\overline{G}$ umkehrbar eindeutig zugeordnet.

Um nun die *singulären Stellen der Funktion* $f(z)$ zu definieren, betrachten wir ein schlichtes Stück von $\overline{G}$ und mit diesem Stück ein volles Exemplar der z-Ebene, in welcher wir dieses Stück der *Riemann*schen Fläche liegend vorstellen. Besitzt das Gebiet $\overline{G}$ Grenzpunkte[1]), welche diesem Exemplar der z-Ebene angehören, so heißen diese *singuläre Punkte* von $f(z)$, und zwar speziell singuläre Punkte des im betreffenden Exemplare der z-Ebene oder dem betreffenden *„Blatte"* der *Riemann*schen Fläche definierten *Zweiges* von $f(z)$. Diese singulären Punkte können in dem betreffenden Exemplar der z-Ebene *isoliert* liegen, derart, daß jeder Punkt einer gewissen Umgebung zum Bereiche $\overline{G}$ gehört; sie können jedoch auch, wie wir später sehen werden, sehr komplizierte Punktmengen bilden oder ganze Kurven, *„singuläre Linien"*, erfüllen.

Die wichtigsten singulären Punkte sind die *isolierten Singularitäten*. Wir nennen einen solchen singulären Punkt einen *isolierten Eindeutigkeitspunkt*, wenn es eine schlichte Kreisscheibe mit diesem Punkt P als Mittelpunkt gibt, welche mit Ausnahme des Punktes P ganz zu $\overline{G}$ gehört. *Wenn der absolute Betrag von* $f(z)$ *bei Herannahen an den Punkt* P *über alle Grenzen wächst, so heißt* P *ein Pol*; die Funktion $\frac{1}{f(z)}$ ist dort regulär und hat den Wert Null. Ist aber die Gleichung $\lim f(z) = \infty$ nicht richtig, wenn z im Definitionsbereich

[1]) Vgl. die Definition des Grenzpunktes in Abschnitt I, Kap. 3, S. 43.

irgendwie gegen den Punkt P rückt, so heißt P eine ***wesentlich singuläre Stelle;*** in ihrer Umgebung muß $f(z)$ jedem beliebig vorgegebenen Werte beliebig nahe kommen. Alle diese Tatsachen sind in unseren früheren Betrachtungen enthalten; vgl. Abschn. I, Kap. 5, § 7.

Ist der isolierte singuläre Punkt P keine Eindeutigkeitsstelle, so heißt er ein Windungs- oder ***Verzweigungspunkt*** des Gebietes G, und zwar ein Verzweigungspunkt endlich hoher Ordnung oder ein ***algebraischer Verzweigungspunkt,*** wenn man, den Punkt P auf einem hinreichend kleinen Kreise umlaufend, nach endlich vielen Umläufen wieder an die Ausgangsstelle in $\overline{G}$ zurückkommt; andernfalls sprechen wir von einem ***Verzweigungspunkt*** oder Windungspunkt ***unendlich hoher Ordnung.***

Es sei hier ausdrücklich hervorgehoben und wird uns später an Beispielen begegnen, daß über derselben Stelle der z-Ebene in verschiedenen Blättern ganz verschiedene singuläre Stellen oder auch reguläre Stellen für die Funktion liegen können.

Daß und inwiefern die in einzelnen Blättern etwa gelegenen unendlich fernen Punkte keinerlei Ausnahmestellung einnehmen, braucht nach den Ausführungen in Kap. 3, § 3 auf S. 286 kaum besonders gesagt zu werden.

Es sei an dieser Stelle ausdrücklich betont, daß die ***Anwendung des Integralsatzes von Cauchy*** keineswegs an die Schlichtheit des Gebietes B gebunden ist, um welches herumintegriert wird. Unter den Voraussetzungen aus Kap. 2, § 4 gilt der Integralsatz für beliebig im Existenzbereich gelegene Bereiche.

Die vorangehenden Begriffsbildungen zeigen uns aufs deutlichste, eine wie ausgezeichnete Stellung in der Funktionentheorie die ***eindeutigen Funktionen*** einnehmen, d. h. diejenigen Funktionen, deren Definitionsbereich G schlicht ist. ***Es ist ein wichtiges Ziel der Funktionentheorie, mehrdeutige Funktionsverläufe auf eindeutige zurückzuführen. Wie dieses Ziel durch die Uniformisierungstheorie erreicht wird, werden wir später sehen.***

§ 5. Elliptische Funktionen.

Wir machen von dem Spiegelungsprinzip eine Anwendung, indem wir die Funktion $\zeta(z)$ des § 2, welche die obere Halbebene $\mathfrak{J}z \geqq 0$ auf ein Rechteck R abbildet, analytisch fortsetzen. Die Seiten des Rechteckes seien I, II, III, IV wie in der Fig. 102. Die ihnen entsprechenden Stücke der Achse des Reellen in der z-Ebene bezeichnen wir mit I′, II′, III′, IV′.

Wir wenden das Spiegelungsprinzip auf die Strecke I an. Dann erhalten wir in der ζ-Ebene zwei längs I zusammenhängende kongruente Rechtecke und in der z-Ebene die volle obere und untere Halbebene, welche längs der Strecke I′ miteinander verbunden sind.

Spiegeln wir andererseits an II, III oder IV, so erhalten wir jedesmal ein neues Rechteck, das mit dem alten längs der Seite II, III oder IV zusammenhängt, und über der z-Ebene drei untere Halbebenen, die mit der oberen längs II', III' oder IV' verbunden sind. Jetzt spiegeln wir die neuen Rechtecke an ihren freien Seiten und setzen dieses Verfahren ad infinitum fort, indem wir die ganze ζ-Ebene *lückenlos und einfach* mit Rechtecken überdecken; in der z-Ebene entstehen dann entsprechend unendlich viele neue obere und untere Halbebenen, die sinngemäß längs der Strecken I', II', III', IV' zu verbinden sind. Die Punkte z erfüllen also eine unendlich vielblättrige *Riemann*sche Fläche F von nicht mehr ganz einfach zu übersehendem Typus,

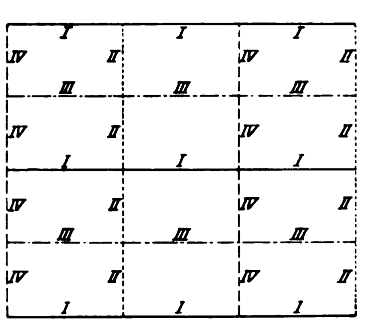


Fig. 102.

welche über den Punkten $\pm 1, \pm \frac{1}{k}$ verzweigt ist (aber nicht wie die Fläche des Logarithmus, sondern indem unendlich viele Verzweigungspunkte erster Ordnung übereinander geschichtet sind. Die einfachste Vorstellung von den Zusammenhangsverhältnissen der Blätter erhält man durch Betrachtung der Rechtecksfigur). Je zwei Rechtecken mit einer gemeinsamen Seite entspricht ein volles Exemplar der z-Ebene. Spiegeln wir ein Rechteck R zweimal in derselben Richtung, etwa in der Richtung der Halbachse des positiv Reellen, so gelangen wir zu einem neuen Rechteck R_1, welches wir auch durch Parallelverschiebung von R um die Größe $2\,\omega_1$ erhalten können; ebenso entspricht einer doppelten Spiegelung in der Richtung des positiv Imaginären eine Parallelverschiebung der Punkte des Rechteckes um die Größe $2\,i\,\omega_2$. Entsprechend erhalten wir aber in der z-Ebene bei einer solchen doppelten Spiegelung wieder den Ausgangswert z. Es ergibt sich also für die Umkehrfunktion $z(\zeta)$ die Relation

$$z(\zeta + 2\,\omega_1) = z(\zeta + 2\,\omega_2\,i) = z(\zeta);$$

oder allgemeiner

$$z(\zeta + 2\,h_1\,\omega_1 + 2\,h_2\,\omega_2\,i) = z(\zeta) \quad (h_1, h_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Wir erkennen also, daß die Umkehrfunktion $z(\zeta)$ eine in der ganzen ζ-Ebene eindeutige doppeltperiodische Funktion mit den Perioden $2\,\omega_1$ und $2\,\omega_2\,i$ ist. Auf diese Weise haben wir anschaulich das einfachste Beispiel einer elliptischen Funktion erhalten.

Für die Einzelheiten der Theorie dieser Funktionen vergleiche man den Abschnitt II dieser Vorlesungen.

§ 6. Abbildung eines Polygons auf die Halbebene.

In ähnlicher Weise wie ein Rechteck können wir auch ein geradliniges Polygon mit vorgeschriebenen Winkeln auf die Halbebene abbilden. Es sei Π ein solches n-Eck in der ζ-Ebene, das sich nicht selbst überdeckt, $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$ seine Winkel, so daß $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n - 2$ wird (Fig. 103). Wir wollen eine Funktion $\zeta(z)$ suchen, welche die obere Halbebene $\mathfrak{J} z > 0$ auf das Innere eines solchen Polygons abbildet, und versuchen dies dadurch zu erreichen, daß wir die reelle Achse der z-Ebene auf den Rand eines solchen Polygons abbilden, wobei den Ecken von Π der Reihe nach die Punkte a_1, $a_2, \ldots, a_n$ auf der reellen Achse entsprechen mögen. Es sei z ein von $a_1, \ldots, a_n$ verschiedener Punkt der reellen Achse, ζ sein — zunächst noch hypothetisch angenommener — Bildpunkt auf der entsprechenden Polygonseite; solange sich z auf der reellen Achse bewegt, ohne einen der Punkte a zu überschreiten, muß der Punkt ζ auf derselben Polygonseite bleiben und daher der Winkel Φ der Differenz $\zeta_1 - \zeta_2 = Re^{i\Phi}$ für alle solchen Punktepaare ζ_1, ζ_2 auf der Polygonseite einen konstanten Wert besitzen; es muß also auch der Differentialquotient $\frac{d\zeta}{dz}$ in jedem Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten a_i eine konstante Amplitude besitzen. Die einfachste Funktion mit dieser Eigenschaft, die wir hypothetisch ansetzen können, ist

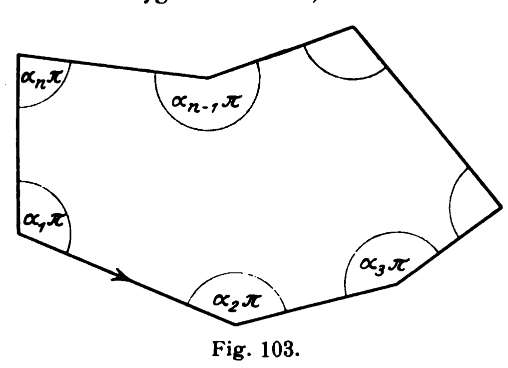


Fig. 103.

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{dz} = \text{konst.}(z - a_1)^{A_1}(z - a_2)^{A_2}\ldots(z - a_n)^{A_n}$$

mit reellen Exponenten $A_1, A_2, \ldots, A_n$; in der Tat verschwindet keiner der Faktoren in einem der Intervalle. Um die Exponenten $A_1, \ldots, A_n$ in diesem Ansatz zu fixieren, beachten wir die Forderung, daß die Winkel $\alpha_1\pi, \ldots, \alpha_n\pi$ am Polygon Π sämtlich Winkeln der Größe π an der reellen Achse entsprechen sollen. Durchläuft nun z wachsend durch reelle Werte einen der Punkte a_k, wobei wir wieder den Punkt a_k zunächst durch einen kleinen Halbkreis der oberen Halbebene umgangen und dann dessen Radius gegen 0 konvergierend denken müssen, so ändert sich die Amplitude der Größe $z - a_k$ um $-\pi$, nämlich von $+\pi$ auf 0, während die Amplituden aller andern Größen $z - a_k$ ihren Wert behalten. Die Größe ζ' ändert also ihre Amplitude um $-\pi A_k$;

andererseits muß die Amplitude der Größe ζ' bei Überschreiten einer Ecke des Polygons um den Winkel $\pi - \alpha_h \pi$ zunehmen, wie man sofort aus der Figur erkennt. Es muß also sein $-A_h \pi = \pi - \alpha_h \pi$, d. h. $A_h = \alpha_h - 1$. Wir erhalten daher als Ansatz für die gesuchte Abbildungsfunktion

$$\zeta = \text{konst.} \int_0^z (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} \, dt.$$

Um zu beweisen, daß diese Funktion wirklich die gesuchte Abbildung vermittelt, beachten wir, daß die reelle Achse umkehrbar eindeutig auf den Polygonrand bezogen ist. Das ergibt sich unter Benutzung der Relation

$$(\alpha_1 - 1) + \dots + (\alpha_n - 1) = -2.$$

Für große Werte von t verhält sich ihr zufolge der Integrand wie $\frac{1}{t^2} \varphi(t)$, wo $\varphi(t)$ im Unendlichen regulär bleibt; das Integral ζ konvergiert also gegen einen bestimmten Grenzwert, wenn z irgendwie ins Unendliche rückt, insbesondere also auf der reellen Achse nach rechts oder links. Daher ist das Bild der reellen z-Achse eine *geschlossene* Kurve und zwar ein Polygon mit den vorgeschriebenen Winkeln. Aus dem Hilfssatz von § 1 folgt nunmehr, daß tatsächlich die Funktion $\zeta(z)$ das Innere der oberen Halbebene auf das Innere eines Polygons abbildet, vorausgesetzt, daß das Polygon sich nicht selbst überschneidet.

Es muß aber darauf hingewiesen werden, daß unter dieser Voraussetzung unsere Überlegungen zwar bei gegebenen $a_1, \dots, a_n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die konforme Abbildung der oberen Halbebene auf ein gewisses Polygon mit den Winkeln $\alpha_1 \pi, \dots, \alpha_n \pi$ liefern, aber keineswegs die umgekehrte Frage entscheiden, ob wir auf diese Weise *jedes beliebige* Polygon erhalten. Eine Abzählung der Konstanten zeigt, daß wir dies erwarten dürfen. Ein n-Eck der ζ-Ebene ist nämlich durch $2n$ reelle Koordinaten bestimmt. Im Ausdruck für die Funktion ζ sind aber verfügbar: n reelle Zahlen $a_1, \dots, a_n$, $n-1$ reelle Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, 2 reelle Zahlen in der komplexen Konstanten konst. $= c$, eine beliebige komplexe, d. h. 2 reelle, Konstante, die einer beliebigen Translation der ζ-Ebene entsprechen; dies gibt zusammen $2n + 3$ reelle Konstanten. Andererseits lassen sich 3 der Punkte a, etwa a_1, a_2, a_3 beliebig wählen, etwa nach -1, 0, $+1$ legen, indem man die z-Ebene einer geeigneten linearen Transformation unterwirft (wobei übrigens, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, die Form des Integrales sich nicht ändert); es kommen also noch 3 reelle Konstanten in Abzug, so daß wirklich beiderseits $2n$ wesentliche Konstanten verfügbar sind. Der wirkliche Nachweis jedoch, daß man stets die Konstanten einem vorgegebenen Polygon anpassen kann, soll hier nicht ausgeführt

werden, da sich diese Tatsache aus dem Fundamentalsatz des nächsten Kapitels von selbst ergeben wird[1]).

§ 7. Die Funktionen des geradlinigen Dreiecks.

Besonders übersichtlich werden die Verhältnisse, wenn statt eines n-Ecks ein Dreieck mit den Winkeln $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$ genommen wird. Die Abbildungsfunktion lautet dann allgemein

$$\zeta = \int_{t_0}^{z} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1}(t - a_2)^{\alpha_2 - 1}(t - a_3)^{\alpha_3 - 1}\,dt.$$

Wir wollen einen der Eckpunkte, etwa den Punkt a_3, ins Unendliche werfen, indem wir z durch $-\frac{1}{z} + a_3$ ersetzen, bzw. im Integral statt t durch die Gleichung $t = -\frac{1}{\tau} + a_3$ eine neue Variable τ einführen. Dann wird unter Berücksichtigung von $(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + (\alpha_3 - 1) = -2$

$$\zeta = \int_{\tau_0}^{z} \left(a_3 - a_1 - \frac{1}{\tau}\right)^{\alpha_1 - 1} \left(a_3 - a_2 - \frac{1}{\tau}\right)^{\alpha_2 - 1} \left(-\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha_3 - 1} \frac{d\tau}{\tau^2}$$

$$= \text{konst.} \int_{\tau_0}^{z} (\tau - b_1)^{\alpha_1 - 1}(\tau - b_2)^{\alpha_2 - 1}\,d\tau,$$

wobei b_1, b_2 neue Konstanten sind. Ersetzen wir τ durch eine neue Variable $a\tau + b$, so können wir durch geeignete Wahl von a und b den Konstanten b_1 und b_2 beliebige Werte erteilen, so daß wir z. B. setzen können:

$$(1) \qquad \zeta = \text{konst.} \int_{z_0}^{z} t^{\alpha_1 - 1}(1 - t)^{\alpha_2 - 1}\,dt.$$

Beim Dreieck ist es evident, daß wir jedes beliebige Dreieck durch eine solche Abbildung erhalten können, da ein Dreieck durch die Länge einer Seite und seine Winkel eindeutig charakterisiert ist.

Wir wollen die durch (1) definierte Funktion nach dem Spiegelungsprinzip analytisch fortsetzen. Spiegeln wir die obere Halbebene an einer der Strecken 01 oder 1∞ oder $\infty 0$, so erhalten wir entsprechend je ein gespiegeltes, mit dem ersten längs einer der Seiten zusammenhängendes Dreieck; ein Doppeldreieck wird auf die

[1]) Daß eine Funktion $\zeta(z)$, welche die gewünschte Abbildung liefert, notwendig die Integralform des obigen Ansatzes haben muß, ergibt sich leicht aus der Betrachtung der logarithmischen Ableitung $\frac{\zeta''(z)}{\zeta'(z)}$ (vgl. § 11).

volle, längs eines Teiles der reellen Achse aufgeschnittene z-Ebene abgebildet. Durch unbegrenzte Fortsetzung des Spiegelungsprozesses erhalten wir eine wohldefinierte unendlichfache Überdeckung der z-Ebene in Gestalt einer *Riemann*schen Fläche F mit Verzweigungen über den Punkten $0, 1, \infty$, und eine entsprechende Überdeckung der ζ-Ebene mit Dreiecken. Diese letztere Überdeckung wird aber im allgemeinen keine lückenlose und zugleich einfache sein, sondern ebenfalls zu einer komplizierten *Riemann*schen Fläche führen. Dann und nur dann erhalten wir eine einfache Bedeckung der ζ-Ebene, wenn die Reihe der in einer Ecke zusammenstoßenden Doppeldreiecke sich schließt, d. h. wenn der betreffende Winkel ein Teiler von 2π ist; an den Dreiecksecken sind aber die Winkel der Doppeldreiecke gleich $2\alpha_1\pi$, $2\alpha_2\pi$, $2\alpha_3\pi$; wir erhalten also als Bedingung für die Einfachheit der Doppeldreiecksüberdeckung die Forderung, daß $\frac{2\pi}{2\alpha_1\pi} = \frac{1}{\alpha_1} = r_1$, $\frac{1}{\alpha_2} = r_2$, $\frac{1}{\alpha_2} = r_3$ ganze Zahlen sein müssen, welche im übrigen wegen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ der Gleichung

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = 1 \tag{2}$$

zu genügen haben.

Die funktionentheoretische Bedeutung unserer geometrischen Fragestellung ist, daß im Falle einer einfachen Überdeckung der ζ-Ebene die Umkehrfunktion $z = z(\zeta)$ in der ganzen ζ-Ebene eine eindeutige Funktion wird, während sie andernfalls in den Ecken des Dreiecks und allen daraus durch Spiegelung hervorgehenden Punkten Windungspunkte endlich oder unendlich hoher Ordnung besitzen würde.

Alle die Fälle, in welchen diese eindeutige Umkehrbarkeit stattfindet, können wir nun leicht durch Diskussion der diophantischen Gleichung (2) ermitteln, wobei wir wegen der Symmetrie von (2) $r_1 \leqq r_2 \leqq r_3$ nehmen dürfen. Eine erste Lösung ist $r_1 = r_2 = r_3 = 3$; bei jeder weiteren Lösung muß eine der Zahlen, etwa r_1, kleiner als 3 sein. Ist $r_1 = 1$, so wird notwendig $r_2 = r_3 = \infty$. Ist $r_1 = 2$, so wird $\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{2}$, d. h. entweder $r_2 = r_3 = 4$ oder $r_2 = 3$, $r_3 = 6$, oder schließlich $r_2 = 2$, $r_3 = \infty$. Die verschiedenen Fälle werden durch folgende Tabelle dargestellt:

	r_1	r_2	r_3
1.	3	3	3
2.	1	∞	∞
3.	2	4	4
4.	2	3	6
5.	2	2	∞

Der Fall 2 liefert die Abbildung der Halbebene auf ein Dreieck mit den Winkeln π, 0, 0, das ist aber ein unendlicher Parallelstreifen. Die Abbildungsfunktion lautet

$$\zeta = \int_0^z \frac{dt}{1-t} = \lg \frac{1}{1-z}$$

und ist uns wohlbekannt. Der Fall 5 liefert eine Abbildung auf einen dreieckigen Bereich mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 0, d. h. einen Halb-treifen; die Funktion lautet:

$$\zeta = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \arcsin(2z-1)$$

ebenfalls bekannt als die Umkehrfunktion des Sinus.

Die Fälle 1, 3, 4 liefern die Abbildung der Halbebene auf ein gleichseitiges, gleichschenklig rechtwinkliges und auf ein rechtwinkliges durch Halbierung des gleichseitigen entstehendes Dreieck. Die betreffenden Abbildungsfunktionen lauten:

$$\zeta = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2(1-t)^2}}, \qquad \zeta = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt[4]{t^2(1-t)^3}}, \qquad \zeta = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt[6]{t^3(1-t)^4}},$$

Ihre Umkehrfunktionen erweisen sich wiederum als doppeltperiodische Funktionen.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß man die Betrachtungen der beiden vorangehenden Paragraphen noch in mannigfacher Weise abändern kann; so läßt sich durch Anwendung einer geeigneten linearen Transformation die Abbildung auf die Halbebene stets durch eine Abbildung auf den Einheitskreis ersetzen. Der Leser wird sich z. B. leicht davon überzeugen, daß durch die Formeln

$$\zeta = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \qquad \zeta = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt[n]{(1-t^n)^2}} \qquad (n \geqq 3)$$

der äquidistant eingeteilte Einheitskreis der z-Ebene auf ein Quadrat, bzw. reguläres n-Eck der ζ-Ebene abgebildet wird.

Ferner läßt sich auch leicht die konforme Abbildung des Äußeren eines Polygones auf die Halbebene bzw. den Einheitskreis bewerkstelligen; als Beispiel, dessen Bestätigung ebenfalls dem Leser überlassen bleiben kann, sei hier nur die Funktion

$$\zeta = \int_1^z \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}\, dt$$

angeführt, welche das Äußere eines Quadrats der ζ-Ebene auf das Innere des Einheitskreises konform abbildet, wobei dem Nullpunkt der z-Ebene der Punkt ∞ in der ζ-Ebene entspricht[1]).

§ 8. Charakterisierung der Funktionen durch ihre inneren Eigenschaften.

Wenn man die analytischen Funktionen, dem Ideenkreise *Riemanns* entsprechend, durch *innere Eigenschaften charakterisieren* will, so kann man dabei zwei verschiedene Gesichtspunkte verfolgen. Einmal kann man die Funktionen durch die *Natur ihrer Singularitäten* festzulegen suchen, zweitens aber kann man die von der Funktion vermittelte *konforme Abbildung* als Charakteristikum der Funktion betrachten.

Wir wollen hier zunächst den ersten Gesichtspunkt erläutern. Schon im ersten Abschnitte sind folgende Tatsachen enthalten, deren Beweise hier nicht wiederholt zu werden brauchen: *Jede in der ganzen Ebene bis auf endlich viele Pole reguläre und eindeutige Funktion ist rational. Ist insbesondere der Punkt ∞ der einzige Pol und zwar ein solcher n-ter Ordnung, so ist die Funktion eine ganze rationale Funktion n-ten Grades.*

Unter allen mehrdeutigen Funktionen sind diejenigen $\zeta = f(z)$ die einfachsten und interessantesten, welche einer algebraischen Gleichung

$$(1) \qquad G(\zeta, z) = g_0(z)\zeta^n + g_1(z)\zeta^{n-1} + \cdots + g_n(z) = 0$$

genügen, wobei $G(\zeta, z)$ eine irreduzible[2]) ganze rationale Funktion von ζ und z ist, d. h. eine endliche Summe von Termen der Form $c_{pq} z^p \zeta^q$ mit ganzzahligen nicht negativen Exponenten p, q und konstanten Faktoren c_{pq}.

Um diese *„algebraischen Funktionen"* zu charakterisieren, erinnern wir an den Begriff des *algebraischen Verzweigungspunktes* einer mehrdeutigen Funktion. Wir verstanden darunter einen solchen Punkt P, in dessen Umgebung eine mehrdeutige Funktion — wie z. B. die Funktion $\sqrt[m]{z}$ für $z = 0$ — zwar mehrdeutig wird, aber nur endlich vieler Werte fähig ist, wenn der Punkt z den Punkt P umkreist, ohne eine hinreichend kleine Umgebung von P zu verlassen, und wenn dabei die Ausgangswerte von $f(z)$ analytisch längs dieses Weges fortgesetzt werden. Ist m die Anzahl der verschiedenen Werte von $f(z)$, welche wir so erhalten können, oder wie man auch sagt, die Anzahl der in P zusammenhängenden *„Funktionszweige"*, so heißt P ein algebraischer Verzweigungspunkt $(m - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Umläuft man den Punkt P

---

[1]) Vgl. *H. A. Schwarz*, Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2, S. 65 ff.

[2]) d. h. nicht in zwei ganze rationale Faktoren zerlegbare.

genau m-mal, so muß man wieder zu den Ausgangswerten von $f(z)$, dem Ausgangszweige, zurückgelangen (würde dies schon bei einer geringeren Umlaufszahl eintreten, so hätten wir eben einen algebraischen Verzweigungspunkt niedrigerer Ordnung vor uns).

Wir können uns diese Verhältnisse veranschaulichen, indem wir, ganz wie beim Beispiel der Funktion $\zeta = \sqrt[m]{z}$ für $z = 0$, uns über der z-Ebene im Punkte P und seiner Umgebung eine m-blättrige *Riemann*sche Fläche ausgebreitet denken, deren Blätter zyklisch zusammenhängen; auf dieser Fläche wird dann ζ eindeutig bleiben. Analytisch heißt das, daß die Funktion $\zeta = f(z)$ durch die Transformation $t^m = z - z_0$ in eine in der Umgebung des Punktes $P(z = z_0)$ eindeutige Funktion von t übergeht. Wenn die Funktion $\varphi(t) = f(z)$ in $t = 0$ einen Pol q^{ter} Ordnung hat, so wollen wir sagen, daß auch $f(z)$ in $z = z_0$ einen Pol q^{ter} Ordnung besitzt.

Nunmehr sprechen wir folgenden Satz aus: *Eine für alle Werte von z definierte analytische Funktion, welche n-deutig ist und in der Ebene außer endlich vielen Polen nur algebraische Verzweigungsstellen besitzt, ist eine algebraische Funktion; sie genügt einer algebraischen Gleichung*

$$\zeta^n + r_1(z)\zeta^{n-1} + \dots + r_n(z) = 0,$$

wo die Funktionen $r_1(z), r_2(z), \dots, r_n(z)$ rationale Funktionen von z sind.

Eine analytische Funktion nennen wir n-deutig, wenn ihr Definitionsbereich (vgl. § 4) die z-Ebene in der Umgebung mindestens einer Stelle mit n Blättern überdeckt, an keiner Stelle aber mit mehr als n Blättern.

Um den behaupteten Satz zu beweisen, betrachten wir in der Umgebung eines Verzweigungspunktes P die n verschiedenen Funktionszweige $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ der fraglichen Funktion; dabei sind sicher keine zwei der Zweige identisch gleich, weil sie sonst bei jeder analytischen Fortsetzung, d. h. überall, identisch gleich wären. Bei einem Umlauf um den Verzweigungspunkt gehen die Funktionszweige über in die Funktionszweige $\bar\zeta_1, \bar\zeta_2, \dots, \bar\zeta_n$; diese müssen eine Permutation der ursprünglichen Zweige darstellen; denn einerseits müssen sich wegen der n-Deutigkeit von $\zeta = f(z)$ die $\bar\zeta_h$ unter den ζ_n befinden, andererseits können nicht zwei der Zweige $\bar\zeta_h$, etwa $\bar\zeta_1$ und $\bar\zeta_2$, identisch miteinander sein, weil sonst auch die Differenz $\zeta_1 - \zeta_2$ als analytische Fortsetzung von $\bar\zeta_1 - \bar\zeta_2$ (bei umgekehrter Umkreisung des Punktes P) identisch Null sein müßte. Betrachten wir nun symmetrische Verbindungen der n Funktionszweige $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$, etwa die Größen

$$-r_1(z) = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n, \quad r_2(z) = \zeta_1\zeta_2 + \zeta_1\zeta_3 + \dots + \zeta_{n-1}\zeta_n,$$
$$\dots, (-1)^n r_n(z) = \zeta_1\zeta_2\cdots\zeta_n,$$

so müssen diese in der Umgebung jedes algebraischen Verzweigungspunktes P eindeutig bleiben; sie können nach dem Vorangehenden dort nur entweder regulär sein oder einen Pol besitzen; denn jeder Zweig der Funktion besitzt an einer Stelle z, wenn er dort nicht regulär ist, einen Pol, in welchem er wie eine bestimmte Potenz von $z - z_0$ unendlich wird. Dasselbe gilt für alle übrigen Punkte der z-Ebene; also sind diese Funktionen nach dem zu Beginn dieses Paragraphen erwähnten Satze rationale Funktionen von z. Nun genügt aber die Funktion $\zeta = f(z)$ der algebraischen Gleichung

$$(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)\dots(\zeta - \zeta_n) \equiv \zeta^n + r_1(z)\zeta^{n-1} + \dots + r_n(z) = 0,$$

und damit ist die Behauptung bewiesen.

Da man auch umgekehrt unschwer erkennt, daß eine Funktion, welche einer algebraischen Gleichung (1) genügt, keine anderen Singularitäten als Pole und algebraische Verzweigungen besitzen kann und höchstens n-deutig[1]) ist, so ist diese Eigenschaft für die algebraischen Funktionen charakteristisch.

Wir können hier nicht weiter auf die weitausgreifende Theorie der algebraischen Funktionen eingehen; der Leser wird gut tun, sich die einfachen, hier kurz entwickelten Begriffe am besten selbst an Hand von Beispielen wie

$$\zeta = \sqrt[n]{z(z-1)}, \qquad \zeta = \sqrt{z^2 - 1} + \sqrt[3]{z^2 - 1}, \qquad \zeta = \sqrt{z + \sqrt{z}}$$

zu erläutern.

Es sei noch besonders betont, daß man sich den Verlauf und den Zusammenhang der Funktionswerte einer algebraischen Funktion am zweckmäßigsten durch eine über der ganzen z-Ebene ausgebreitete *Riemann*sche Fläche dargestellt denkt, welche n Blätter besitzt, die in den algebraischen Verzweigungspunkten zusammenhängen und in geeigneter Weise aneinander geheftet sind. Für die tiefergehenden Untersuchungen *Riemanns* ist diese Fläche der Ausgangspunkt gewesen (vgl. die Ausführungen im Kap. 5, § 11).

Neben das hier kurz dargelegte Prinzip der Charakterisierung von Funktionen durch ihre Singularitäten tritt nun in der *Riemann*schen Funktionentheorie noch ein zweites ganz andersartiges geometrisches Charakterisierungsprinzip: *Riemann legt die analytische Funktion durch die zugehörige konforme Abbildung fest.*

Wir haben in den vorangehenden Kapiteln erkannt, daß man einen Kreis in der ζ-Ebene, etwa den Einheitskreis, auf mannigfache Gebiete der z-Ebene konform abbilden kann. *Riemann* stellte sich die Frage, ob man umgekehrt das einfach zusammenhängende Gebiet in der z-Ebene, auf das der Kreis abgebildet werden soll, willkürlich

[1]) Nämlich dann genau n-deutig, wenn die Gleichung (1) irreduzibel ist.

vorschreiben kann. Das fundamentale Ergebnis, zu welchem er — allerdings ohne ganz ausreichenden Beweis — gelangte, lautet: *Man kann das Innere des Einheitskreises der ζ-Ebene auf das Innere eines beliebig vorgegebenen einfach zusammenhängenden Gebietes G der z-Ebene, welches mindestens zwei Randpunkte besitzt*[1]*), umkehrbar eindeutig und konform durch eine analytische Funktion $\zeta = f(z)$ abbilden und zwar genau auf eine Weise so, daß dabei in den beiden Gebieten je ein willkürlich gewählter Punkt und durch diese je eine willkürliche Richtung einander entsprechen.* Dieser Satz, dessen genaue Diskussion und dessen Beweis das nächste Kapitel enthält, sagt uns also, *daß man die analytischen Funktionen geradezu durch die geometrische Gestalt der Figuren definieren kann,* welche bei der konformen Abbildung als Bilder des Einheitskreises, und natürlich ebenso jedes anderen einfach zusammenhängenden Gebietes, sich ergeben.

Bevor wir zum Beweise des *Riemann*schen Abbildungsprinzipes übergehen, wollen wir seine Fruchtbarkeit erläutern, indem wir zeigen, wie sich auf seiner Grundlage ohne irgendwelchen Formelapparat die Modulfunktionen (vgl. Abschnitt II, Kap. 4) und neue wichtige Funktionsklassen nebst ihren Haupteigenschaften ergeben; wir werden dabei außer dem Abbildungssatz nur noch das Spiegelungsprinzip brauchen.

§ 9. Modulfunktion und automorphe Funktionen.

Wir definieren eine Funktion, indem wir von einer der denkbar einfachsten geometrischen Figuren ausgehen, dem *nullwinkligen Kreisbogendreieck,* d. h. einem Dreieck, welches von drei kongruenten, einander berührenden Kreisbögen gebildet wird (Fig. 104). Wir denken uns dieses Dreieck G im Einheitskreise der z-Ebene gelegen; dann lehrt das *Riemann*sche Abbildungsprinzip, daß es gewiß eine analytische Funktion $\zeta = f(z)$ gibt, welche im Innern von G definiert ist und welche das Innere von G auf die obere Halbebene derart abbildet, daß den Ecken des Dreieckes G die drei Punkte $0, 1, \infty$ der reellen ζ-Achse entsprechen. Wir dürfen natürlich, statt G auf den Einheitskreis abzubilden, ebenso die Abbildung auf die Halbebene zugrunde legen, die man ja durch eine einfache lineare Transformation aus dem Einheitskreis erhält. Wir

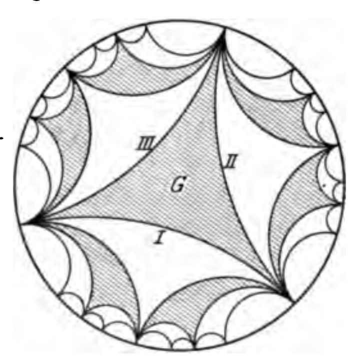


Fig. 104.

[1]) d. h. nicht aus der ganzen oder der durch einen einzelnen Punkt begrenzten, „punktierten", Ebene besteht; zu dem hier schon vorweg genommenen allgemeinen Begriffe des einfachen Zusammenhanges vgl. S. 324.

bezeichnen die drei Dreiecksseiten mit I, II, III, ebenso die entsprechenden Stücke der reellen ζ-Achse mit I', II', III'.

Der analytische Ausdruck unserer Funktion interessiert uns hier gar nicht; wir sind aus dem *Riemann*schen Abbildungssatz ihrer Existenz versichert und können sie nunmehr nach dem Spiegelungsprinzip über das Dreieck G hinaus analytisch fortsetzen. Spiegeln wir die ζ-Halbebene an einem der geradlinigen Stücke I', II', III', so erhalten wir eine längs dieses Stückes mit der oberen Halbebene zusammenhängende untere Halbebene; entsprechend ergibt sich durch Spiegelung des Dreiecks G an der betreffenden Seite ein anliegendes, ebenfalls notwendig nullwinkliges Kreisbogendreieck, das zwar nicht mehr gleichseitig sein wird, aber das wiederum dem Einheitskreise der z-Ebene einbeschrieben sein muß; der Einheitskreis steht nämlich auf dem Kreise, an dem gespiegelt wird, senkrecht, muß also durch die Spiegelung in einen Kreis übergehen, der den Spiegelkreis in denselben Punkten senkrecht trifft, d. h. er wird in sich transformiert. Gehen wir in derselben Weise weiter, indem wir jedes in der Figur der z-Ebene vorhandene Kreisbogendreieck an seinen freien Seiten spiegeln und analog über der ζ-Ebene entsprechende obere und untere halbebenenförmige Blätter aneinanderreihen bzw. übereinander schichten, so gelangen wir einerseits über der ζ-Ebene zu einer recht komplizierten unendlich vielblättrigen *Riemann*schen Fläche, welche ihre Verzweigungspunkte in 0, 1, ∞ besitzt; andererseits erhalten wir in der z-Ebene die „*Modulfigur*“, d. h. unendlich viele nullwinklige, dem Einheitskreise einbeschriebene und auf ihm überall senkrecht stehende Kreisbogendreiecke, welche den ganzen Einheitskreis ausfüllen, indem sie sich gegen jeden Randpunkt anhäufen.

Diese letztere, anschaulich aus der Figur unmittelbar einleuchtende elementargeometrische Tatsache ergibt sich streng folgendermaßen: wir vollziehen den Spiegelungsprozeß derart, daß wir dabei stets die volle Symmetrie wahren; als ersten Schritt nehmen wir gleichzeitig eine Spiegelung von G an den drei Seiten vor und gelangen so zu einem einbeschriebenen nullwinkligen Kreisbogensechseck; dieses spiegeln wir an jeder seiner sechs Außenseiten und gelangen so zu einem dem Einheitskreise einbeschriebenen nullwinkligen 30-Eck, usw.; man erkennt nun, daß von den Eckpunkten die ganze Kreisperipherie überall dicht bedeckt wird. Denn wäre γ ein Bogen des Einheitskreises, welcher von Eckpunkten der gespiegelten Kreise frei bliebe, so müßte es unendlich viele ineinandergeschachtelte Orthogonalkreisbögen geben, welche sich über dem Bogen γ bzw. einem diesen enthaltenden Bogen des Einheitskreises wölben. Diese Kreise müßten gegen einen Kreisbogen konvergieren, der sich ebenfalls über γ wölbt und mit dem Bogen γ oder einem größeren Bogen

des Einheitskreises ein von unseren Dreiecken nicht angetastetes Gebiet G^* begrenzt. Dies kann jedoch nicht sein, da wir sicherlich zu Punkten im Inneren dieses Gebietes gelangen, wenn wir das Ausgangsdreieck oder ein anderes an einem geeigneten derjenigen Orthogonalkreise spiegeln, welche die Begrenzung von G^* beliebig nahe approximieren. Andererseits überdeckt das einbeschriebene nullwinklige n-Eck bei hinreichend großem n das Kreisinnere beliebig genau, wenn die Eckpunkte bei wachsendem n hinreichend dicht liegen.

Die Funktion $\zeta(z)$ bildet nun gemäß dem Spiegelungsprinzip das ganze Innere des Einheitskreises der z-Ebene auf die vorher geschilderte *Riemann*sche Fläche konform ab; zwei längs einer Seite zusammenstoßenden Dreiecken entspricht dabei immer ein ganzes Exemplar der ζ-Ebene. Die Funktion $\zeta(z)$ nimmt also im Inneren des Einheitskreises jeden Wert außer 0, 1, ∞ unendlich oft an, während diese Werte selbst nirgends angenommen werden: auf dem ganzen Rande des Einheitskreises ist die Funktion $\zeta(z)$ singulär; denn in der Umgebung jedes Punktes häufen sich die Kreisbogendreiecke, und es wird daher in beliebiger Nähe jedes Randpunktes jeder Wert außer 0, 1, ∞ unendlich oft angenommen, was gewiß in der Umgebung eines regulären Punktes nicht möglich wäre. Der Einheitskreis ist also eine *singuläre Linie* der Funktion $\zeta(z)$, und diese Funktion kann somit auf keine Weise über diesen Kreis hinaus fortgesetzt werden, sie besitzt den Einheitskreis zur *natürlichen Grenze*.

Diese als „*Modulfunktion*" bezeichnete Funktion ist das einfachste Beispiel einer analytischen Funktion mit dieser Eigenschaft, eine natürliche Grenze für den Existenzbereich zu besitzen.

Auch die weiteren merkwürdigen Eigenschaften der Modulfunktion ergeben sich direkt aus unseren geometrischen Betrachtungen. Nehmen wir in der ζ-Ebene zwei sukzessive Spiegelungen vor, so gelangen wir zum Ausgangswert ζ zurück (wenngleich wir den Punkt in ein anderes Blatt verlegt denken); in der z-Ebene aber bedeutet, wie aus Kap. 3, § 1 folgt, die Ausführung zweier Spiegelungen hintereinander eine gewisse lineare Transformation $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ der Variablen; und nunmehr haben wir offenbar die Beziehung

$$\zeta(z') = \zeta(z).$$

Die Modulfunktion gestattet lineare Transformationen in sich. Wir erhalten alle solchen zur Modulfunktion gehörigen linearen Transformationen, indem wir auf alle möglichen Weisen eine gerade Anzahl von Spiegelungen unserer Dreiecksfigur aneinanderreihen. Diese sämtlichen Transformationen bilden eine *Gruppe von Transformationen*; das besagt, daß eine durch Zusammensetzung zweier Transformationen entstehende lineare Transformation wieder zur Modulfunktion gehört.

Man nennt solche eindeutigen Funktionen einer Variablen z, welche bei einer Gruppe von linearen Transformationen der Variablen z ihren Wert nicht ändern, ***automorphe Funktionen***. Die Modulfunktion ist nächst den elliptischen Funktionen das einfachste nicht elementare Beispiel dieser für die höhere Funktionentheorie sehr wichtigen Funktionsklasse.

Wären wir bei der ganzen vorangehenden Betrachtung nicht von dem nullwinkligen Kreisbogendreieck ausgegangen, sondern von dem sechsten Teil dieses Dreiecks, d. h. einem Dreieck mit dem Winkeln $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, welches von einem Kreisbogen und zwei geraden Strecken begrenzt wird, so würden wir ganz ebenso durch das Spiegelungsprinzip zunächst zu dem vorigen nullwinkligen Dreieck,

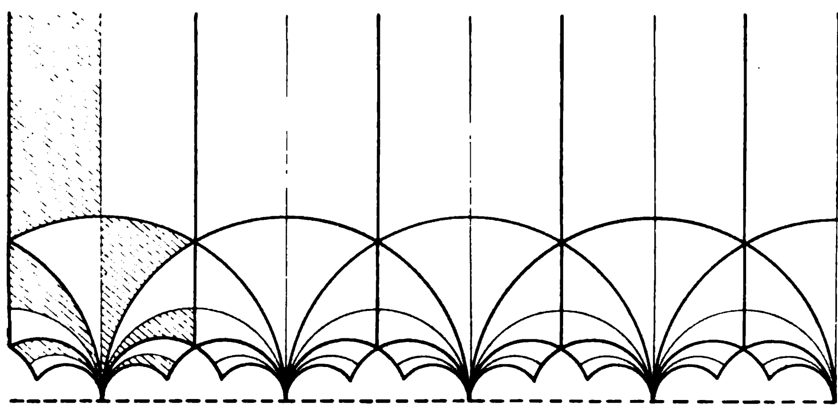


Fig. 105.

sodann zur früheren Modulfigur gelangen, und analytisch zu einer neuen Modulfunktion $J(z)$, welche ebenfalls den Einheitskreis zur natürlichen Grenze besitzt. In Fig. 105 ist die entsprechende Dreieckseinteilung gezeichnet, wobei vorher der Einheitskreis auf die obere Halbebene abgebildet ist und den Dreiecksecken die Punkte $0, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, i$ entsprechen. Zwei benachbarte Dreiecke sind dabei am linken Ende der Figur abwechselnd weiß und schraffiert gezeichnet. Wir erkennen in dieser Funktion leicht auf Grund von § 1 die schon im Abschnitt II, Kap. 4, § 3 behandelte Funktion $J(z)$ wieder.

Weitere automorphe Funktionen können wir auf ähnlichem Wege aus dem *Riemann*schen Prinzip erhalten, indem wir allgemeinere *Kreisbogenpolygone* zugrunde legen. Gehen wir von einem Kreisbogenpolygon aus, welches ganz im Einheitskreise der z-Ebene liegt, und dessen n Seiten sämtlich den Einheitskreis senkrecht schneiden, so können wir das Innere von G durch eine Funktion $\zeta(z)$ wiederum

auf die obere ζ-Halbebene abgebildet denken, wobei den n-Eckpunkten gewisse n Punkte auf der reellen ζ-Achse entsprechen werden. Wir können genau wie oben bei der Modulfunktion durch fortlaufende Spiegelung des Kreisbogenpolygones an seinen Seiten bzw. der Halbebene an ihren geradlinigen Randstücken die Funktion analytisch fortsetzen; dabei erhalten wir eine unendlichvielblättrige *Riemann*sche Fläche über der ζ-Ebene, während sich in der z-Ebene unendlich viele, den Halbebenen der *Riemann*schen Fläche entsprechende Kreisbogenpolygone aneinanderreihen; aus demselben Grunde wie

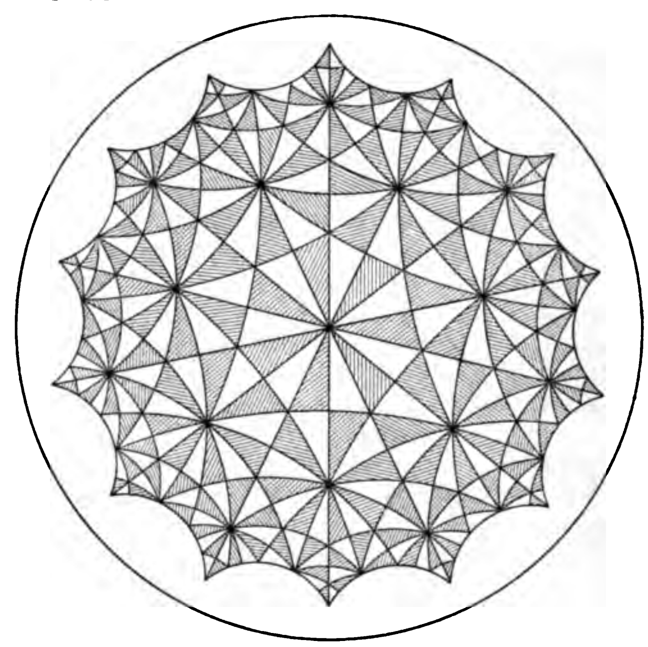


Fig. 106.

oben müssen diese Polygone sämtlich ihre Seiten senkrecht zum Einheitskreise behalten; der Einheitskreis ist „*Orthogonalkreis*" für die Funktion.

Wir sorgen nun dafür, daß die Figur aus Kreisbogenpolygonen, welche wir erhalten, zu einer einfachen Überdeckung des Einheitskreises führt, und zwar so, daß dabei um jeden im Innern gelegenen Eckpunkt eine gerade Anzahl von Polygonen herumliegt; zu diesem Zwecke müssen wir die Winkel zwischen den aneinanderstoßenden Seiten des n-Ecks als von der Form $\frac{\pi}{r_1}, \frac{\pi}{r_2}, \ldots, \frac{\pi}{r_n}$ annehmen, wobei $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ganze rationale Zahlen oder ∞ sind. Als Beispiel ist in der Fig. 106 der Fall $n = 3$, $r_1 = 2$, $r_2 = 7$, $r_3 = 3$ gezeichnet. Eine nähere, hier zu übergehende, elementargeometische Diskussion

ergibt, daß die so entstehenden Polygone dann zu einer einfachen und lückenlosen Überdeckung des Einheitskreises führen, wobei sie sich gegen jeden Randpunkt dieses „Grenzkreises" häufen; ohne weiteres erkennen wir, daß die so gewonnene Funktion $\zeta(z)$ wieder eine ***eindeutige automorphe Funktion*** von z ist; denn einer zweimaligen Spiegelung in der z-Ebene entspricht Rückkehr zum Ausgangswert ζ; in der z-Ebene dagegen liefert eine zweimalige Spiegelung eine lineare Transformation $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, und es wird somit

$$\zeta(z') = \zeta(z).$$

Genau wie bei der Modulfunktion besitzt also unsere Funktion $\zeta(z)$ eine Gruppe linearer Transformationen, bei welchen die Funktion nicht geändert wird. Man nennt diese Funktionen *automorphe Funktionen mit Grenzkreis.*

Auf ein genaueres Studium dieser Funktionen, welches ein Eindringen in die geometrisch gelieferte Transformationsgruppe erfordert, müssen wir hier verzichten; der Leser findet eine ausführliche Darstellung in der Monographie *Fricke-Klein*, „Automorphe Funktionen"[1]). Wir wollen jedoch von der Tatsache der Existenz der Modulfunktion noch eine wichtige Anwendung machen, indem wir den *Picardschen Satz* für ganze transzendente Funktionen beweisen.

§ 10. Der *Picard*sche Satz.

Dieser Satz, welcher eine Vertiefung des *Weierstrass*schen Satzes aus Abschnitt I, Kap. 5, § 7 darstellt, läßt sich folgendermaßen aussprechen: *Jede ganze transzendente Funktion*[2]), ***welche keine Konstante ist, nimmt beliebige vorgeschriebene Werte höchstens mit einer Ausnahme an.***

Daß eine solche Ausnahme möglich ist, lehrt das Beispiel der Exponentialfunktion, welche ja nirgends *verschwindet.*

Zum Beweise des *Picard*schen Satzes nehmen wir an, eine ganze transzendente, d. h. in der ganzen Ebene eindeutige und mit Ausnahme des Punktes $z = \infty$ reguläre Funktion $G(z)$ nähme zwei Werte, etwa $G = a$, $G = b$ nicht an; dann ist $\zeta = g(z) = \frac{G(z) - a}{b - a}$ eine ganze transzendente Funktion, welche die Werte 0 und 1 nicht annimmt; den Wert ∞ nimmt sie nach Definition nicht an, da sie überall im Endlichen regulär ist. Es sei $\zeta = m(\tau)$ die erste im vorigen Paragraphen definierte Modulfunktion, derart, daß der Einheitskreis der τ-Ebene

[1]) Leipzig 1897.

[2]) d. h. für alle endlichen z reguläre, nur im Unendlichen wesentlich singuläre (somit eindeutige) Funktion.

auf die Modulfläche über der ζ-Ebene abgebildet wird. Wir betrachten die Umkehrfunktion $\tau(\zeta)$, welche zwar unendlich vieldeutig ist, da sie über den Stellen 0, 1, ∞ Verzweigungspunkte besitzt, von der wir jedoch irgendeinen Zweig herausgegriffen denken können, indem wir von einem Wert ζ und einem zugehörigen τ ausgehen und dann stetig an diese Zuordnung anschließen. Setzen wir nun als Argument ζ die transzendente Funktion $\zeta = g(z)$ ein, so gelangen wir zu einer Funktion $\tau(g(z)) = T(z)$, welche wir näher zu untersuchen haben. Wir behaupten, daß $T(z)$ eine in der ganzen z-Ebene definierte reguläre, eindeutige Funktion von z wird. In der Tat ist $T(z)$ für jeden Wert von z definiert und regulär, da $\zeta = g(z)$ niemals gleich 0, 1 oder ∞ wird, also die Umkehrung der Modulfunktion $m(\tau) = \zeta$ für jeden so erhaltenen Wert ζ definiert ist. Ferner kann die Funktion $T(z)$ für keinen Wert $z = z_0$ einen Verzweigungspunkt besitzen; denn wenn der Wert z in einem hinreichend kleinen Kreise einen Punkt z_0 umläuft, muß der Bildpunkt ζ einen über der ζ-Ebene geschlossenen Weg bestreichen, der sicherlich nicht einen der Punkte 0, 1 oder ∞ umkreisen kann; also führt dieser Wert ζ beim Umlauf den Funktionswert $\tau(\zeta) = T$ zum Ausgangswert zurück; d. h. eben $T(z)$ ist in der Umgebung jeder Stelle z eindeutig. Mithin muß $T(z)$ wieder eine ganze Funktion sein. Nun liegen aber alle Funktionswerte $T(z) = \tau(\zeta)$ dieser Funktion im Einheitskreise $|T| \leqq 1$; also muß diese Funktion nach dem Satze von *Liouville* (siehe Abschnitt I, Kap. 3 § 8) eine Konstante sein, was offenbar nur möglich ist, wenn auch der Wert des Argumentes ζ, d. h. die ursprüngliche Funktion $g(z) = \zeta$ eine Konstante ist. Damit haben wir den *Picard*schen Satz bewiesen[1]).

§ 11. Die Abbildungsfunktionen von Kreisbogenpolygonen als Lösungen von Differentialgleichungen.

Während wir die Funktionen $\zeta = f(z)$, welche die konforme Abbildung eines geradlinigen Polygons der ζ-Ebene auf die obere z-Halbebene[2]) liefern, explicite darstellen konnten, haben wir dasselbe Ziel bei allgemeinen Kreisbogenpolygonen noch keineswegs erreicht. Wir wollen hier noch in Kürze zeigen, daß diese Funktionen gewissen Differentialgleichungen genügen, welche wir auf Grund der geometrischen Daten aufstellen können und welche umgekehrt für die fragliche konforme Abbildung charakteristisch sind; in diesen Differentialgleichungen, deren Integration ja stets, nötigenfalls durch Potenzreihenentwickelungen, mit Hilfe expliziter Formeln zu bewerkstelligen ist, hat man dann den

[1]) Bei diesem Beweise wird von den Eigenschaften der Modulfunktion wesentlich nur gebraucht, daß ihr Existenzbereich einen Teil der Ebene frei läßt.

[2]) Man beachte, daß hier die Rolle von ζ und z gegenüber § 9 vertauscht ist.

Ersatz für die formelmäßige Darstellung der Abbildungsfunktionen zu erblicken.

Um zu der Differentialgleichung zu gelangen, knüpfen wir an die Betrachtungen von § 7 an; wir denken uns das Kreispolygon Π mit den Winkeln $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$ konform auf die obere z-Halbebene abgebildet, wobei den Ecken sukzessive die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ auf der reellen Achse entsprechen mögen. Die konforme Abbildung läßt sich nun nach dem Spiegelungsprinzip unbegrenzt fortsetzen, wobei man nach einer geraden Anzahl von Spiegelungen über der z-Ebene immer wieder zum selben Werte z gelangt, während dieser Operation in der ζ-Ebene eine lineare Transformation

$$\zeta^* = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} \tag{1}$$

entspricht; auch wenn sich also die Doppelpolygonfigur über der ζ-Ebene nicht schließt, wenn also $z(\zeta)$ keine eindeutige Funktion ist, behält sie doch den durch die Gleichungen $z(\zeta^*) = z(\zeta)$ ausgedrückten ***automorphen Charakter***, während man $\zeta(z)$ eine ***linear polymorphe Funktion*** zu nennen pflegt. Diese lineare Polymorphie läßt sich folgendermaßen erklären: Die Funktion $\zeta(z)$ ist außer für $z = a_1, a_2, \ldots, a_n$ in der Umgebung jedes Punktes der z-Ebene eindeutig und nirgends wesentlich singulär; bei Umlauf des Punktes z um einen der Punkte a_ν erfährt ζ eine lineare Substitution (1).

Aus dieser Eigenschaft folgt leicht, daß ζ die Lösung einer gewissen Differentialgleichung dritter Ordnung sein muß. Um dies einzusehen, wollen wir einen Differentialausdruck $[\zeta]$ für eine willkürliche analytische Funktion ζ herstellen, welcher gegenüber allen linearen Transformationen von ζ invariant ist, das heißt bei Definition von ζ^* durch (1) der Relation $[\zeta^*] = [\zeta]$ genügt, ebenso wie der Ausdruck ζ' gegen die Transformation $\zeta^* = \zeta + \beta$, der Ausdruck $\frac{\zeta}{\zeta'}$ gegen die Transformation $\zeta^* = \alpha\zeta$ und der Ausdruck $\frac{\zeta''}{\zeta'}$ gegen die Transformation $\zeta^* = \alpha\zeta + \beta$ invariant ist.

Um den fraglichen Differentialausdruck zu erhalten, differenzieren wir die Relation

$$\zeta^*(\gamma\zeta + \delta) = \alpha\zeta + \beta$$

dreimal und finden so die Gleichungen

$$\begin{aligned} \gamma(\zeta^*\zeta)' + \delta\zeta^{*\prime} - \alpha\zeta' &= 0 \\ \gamma(\zeta^*\zeta)'' + \delta\zeta^{*\prime\prime} - \alpha\zeta'' &= 0 \\ \gamma(\zeta^*\zeta)''' + \delta\zeta^{*\prime\prime\prime} - \alpha\zeta''' &= 0, \end{aligned}$$

aus welchen sich durch Elimination der Konstanten γ, δ, α ergibt:

$$\begin{vmatrix} (\zeta^*\zeta)' & \zeta^{*\prime} & \zeta' \\ (\zeta^*\zeta)'' & \zeta^{*\prime\prime} & \zeta'' \\ (\zeta^*\zeta)''' & \zeta^{*\prime\prime\prime} & \zeta''' \end{vmatrix} = 0,$$

eine Gleichung, die nach einfacher Umformung die Gestalt

$$\frac{\zeta^{*'''}}{\zeta^{*'}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\zeta^{*''}}{\zeta^{*'}}\right)^2 = \frac{\zeta'''}{\zeta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)^2$$

annimmt; wir haben hiernach in dem Ausdruck

$$(2) \qquad [\zeta] = \frac{2\zeta'\zeta''' - 3\zeta''^2}{\zeta'^2}$$

einen Differentialausdruck dritter Ordnung mit der gesuchten Invarianzeigenschaft, einen Ausdruck, den man in der Literatur unter dem Namen „*Schwarzscher Differentialparameter*“ findet, wenngleich er schon vor *Schwarz* bei *Lagrange* und anderen Autoren vorkommt[1]).

Nunmehr verstehen wir unter ζ unsere linear polymorphe Funktion und schließen sofort, daß der für sie gebildete *Schwarz*sche Differentialparameter sich in der ganzen z-Ebene eindeutig verhält; da weiter wegen der vorausgesetzten Konformität der Abbildung $\zeta'(z)$ nirgends in der oberen Halbebene verschwindet, so erkennt man — wir dürfen annehmen, daß der Ausgangszweig $\zeta(z)$ in der oberen Halbebene keinen Pol hat —, daß $[\zeta]$ lediglich in den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ singulär werden kann. Wir behaupten, daß diese Singularitäten Pole sein müssen; man erkennt dies sofort aus der Erwägung, daß wir es sonst mit einer wesentlich singulären isolierten Eindeutigkeitsstelle zu tun hätten, in deren Umgebung $[\zeta]$ jedem beliebigen Werte beliebig nahe kommen müßte, was offenbar widersinnig ist; explizite schließen wir besser folgendermaßen: Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit etwa an: $a_1 = 0$, $\lim\limits_{z=0} \zeta(z) = 0$, so wird bei der konformen Abbildung der oberen Halbebene auf das Kreisbogenpolygon der gestreckte Winkel π an der reellen Achse in den Winkel $\alpha_1\pi$ verwandelt; die Funktion ζ wird also bei der Substitution $t = z^{\alpha_1}$ eine in der Umgebung des Punktes $t = 0$ umkehrbar eindeutige Funktion von t werden, muß sich daher in eine Potenzreihe nach Potenzen von t entwickeln lassen, welche die Form $c_1 t + c_2 t^2 + \ldots \ (c_1 \neq 0)$ haben muß, weil $\zeta(t)$ für $t = 0$ eine einfache Nullstelle besitzt. Indem wir nun durch Differentiation aus $\zeta(z) = c_1 z^{\alpha_1} + c_2 z^{2\alpha_1} + \ldots$ den Ausdruck $[\zeta]$ bilden, finden wir nach kurzer Rechnung, daß er in der Umgebung von $z = 0$ eine Entwickelung der Form

$$[\zeta] = \frac{\alpha_1^2 - 1}{2\alpha_1^2 \cdot z^2} + \mathfrak{P}(z)$$

besitzen muß, wo $\mathfrak{P}(z)$ eine für $z = 0$ reguläre Potenzreihe in z ist. Damit haben wir den polaren Charakter der Singularität von $[\zeta]$ bestätigt und zugleich den meromorphen Teil für diesen Pol angegeben. Da die Funktion $[\zeta]$ also bis auf endlich viele Pole überall in der

[1]) *H. A. Schwarz* hat in einer grundlegenden Arbeit die Bedeutung dieses Ausdruckes erst zur rechten Geltung gebracht. (Ges. Abhandl. Bd. 2, S. 211 ff.)

Ebene regulär und überdies eindeutig ist, so muß sie eine rationale Funktion sein. Wir haben also das Resultat: *Jede linear polymorphe Funktion $\zeta(z)$ genügt einer Differentialgleichung dritter Ordnung*

$$[\zeta] = R(z), \tag{3}$$

wobei $R(z)$ eine rationale Funktion von z ist.

Die explicite Angabe dieser rationalen Funktion bereitet keinerlei Schwierigkeiten, nachdem ihre meromorphen Teile bekannt sind; im Falle $n = 3$ lautet sie

$$[\zeta] = \frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}\left\{\frac{(\alpha_1^2-1)(a_1-a_2)(a_1-a_3)}{2\alpha_1^2(z-a_1)} + \frac{(\alpha_2^2-1)(a_2-a_1)(a_2-a_3)}{2\alpha_2^2(z-a_2)} + \frac{(\alpha_3^2-1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}{2\alpha_3^2(z-a_3)}\right\}.$$

Die Differentialgleichung (3) hat die bemerkenswerte Eigenschaft, daß man ihre sämtlichen Lösungen kennt, wenn man eine von ihnen ζ besitzt; aus dem Vorangehenden ergibt sich nämlich unmittelbar, *daß jede Lösung ζ^* von* (3) *eine lineare Funktion von einer unter ihnen, ζ, ist*; da umgekehrt diese lineare Funktion drei willkürliche Konstanten enthält, *so gewinnen wir auf diese Art auch das allgemeine Integral der Differentialgleichung* (3).

Die Theorie dieser Differentialgleichung ist aufs engste verknüpft mit der Lehre von den *linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten.* Eine Lösung der Differentialgleichung (3) läßt sich auf mannigfache Weise auffassen als Quotient zweier partikulärer Integrale solcher linearer Differentialgleichungen, und umgekehrt genügt der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung einer Gleichung von Typus (3). Insbesondere führt der Fall $n = 3$ auf die *hypergeometrische Differentialgleichung.*

Auf diese wichtigen und schönen Zusammenhänge kann hier nur hingewiesen werden[1]).

---

[1]) Der Leser findet Näheres z. B. in den Werken von *Klein*, „Vorlesungen über das Ikosaeder", autographierte „Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion" und über „Lineare Differentialgleichungen"; ferner bei *Schlesinger*, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, wo die weitere Literatur nachgewiesen ist.

5. Kapitel.

Das *Riemann*sche Abbildungsprinzip und die Existenztheoreme der Funktionentheorie.

Wir wollen nunmehr das *Riemann*sche Abbildungsprinzip beweisen und die damit zusammenhängenden Fragen erörtern. Dabei wird sich zeigen, daß man von selbst zu sehr viel weiter reichenden Formulierungen und Ergebnissen geführt wird, als der in § 8 des vorigen Kapitels aufgestellte Satz besagt. Wir wollen zunächst zeigen, daß wirklich die Abbildungseigenschaften der analytischen Funktionen zu deren Charakterisierung hinreichen; sodann werden wir das Abbildungsprinzip gleich für einen n-fach zusammenhängenden Bereich formulieren und beweisen, wobei sich die Gültigkeit des Satzes für Bereiche sehr allgemeiner Natur ergeben wird. Es ist dabei wesentlich, daß der *Bereich stets als aus nur inneren Punkten bestehend* aufgefaßt wird, daß also die Berandung nicht zum Bereiche selbst gerechnet wird. Wir nennen ein solches Gebiet ein *offenes Gebiet.* Das Verhalten der Abbildungsfunktionen auf dem Rande werden wir besonders studieren. Ferner sollen noch diejenigen weitergehenden Existenztheoreme bewiesen werden, welche für den systematischen Aufbau einer tieferen Theorie insbesondere der algebraischen Funktionen nötig sind. Alle Existenzbeweise werden wir so führen, daß dabei gleichzeitig, wenigstens im Prinzip, ein Weg zur wirklichen Konstruktion der in Frage stehenden Funktionen gewiesen wird.

§ 1. Charakterisierung analytischer Funktionen durch ihre Abbildungseigenschaften.

Die Tatsache, daß eine analytische Funktion $\zeta(z)$ im wesentlichen, d. h. bis auf eine lineare Transformation, eindeutig festgelegt ist, wenn man das einfach zusammenhängende Gebiet der z-Ebene kennt, auf welches sie den Einheitskreis der ζ-Ebene abbildet, ergibt sich fast unmittelbar aus folgendem Satze:

Eine analytische Funktion $\zeta_1(\zeta)$, welche den Einheitskreis der ζ-Ebene in sich abbildet, ist eine lineare Funktion.

In der Tat können wir die Funktion $\zeta_1(\zeta)$ nach dem Spiegelungsprinzip über den Einheitskreis hinaus in die ganze ζ-Ebene fortsetzen; die so entstehende Funktion bildet die volle ζ-Ebene umkehrbar eindeutig auf die volle ζ_1-Ebene ab. Wir können von vornherein annehmen, daß $\zeta_1(0) = 0$ ist, da wir sonst mittels einer linearen Transformation $\zeta_1^* = \frac{\zeta_1 - \alpha}{\alpha\zeta_1 - 1}$, wo $\alpha = \zeta_1(0)$ gesetzt ist, die Funktion

$\zeta_1(\zeta)$ durch eine dieser Forderung genügende Funktion $\zeta_1^*(\zeta)$ ersetzen könnten, welche ebenfalls den Einheitskreis der ζ-Ebene in den Einheitskreis der ζ_1^*-Ebene überführt. Die Funktion $\zeta_1(\zeta)$ muß für $\zeta = \infty$ den Wert ∞ annehmen, hat dort also einen Pol, während sie für alle endlichen Werte von ζ regulär ist; also ist $\zeta_1^*(\zeta)$ eine rationale ganze Funktion, $\zeta_1 = a_0 + a_1\zeta + \dots + a_n\zeta^n$. Wir behaupten, daß der Grad n dieser Funktion gleich 1 ist. In der Tat würde sonst die Gleichung $\zeta_1' = a_1 + 2a_2\zeta + \dots = 0$ mindestens eine Lösung ζ_0 besitzen. Dann aber würde durch die Funktion $\zeta_1 = \zeta_1(\zeta)$ die Umgebung der Stelle ζ_0 in der ζ-Ebene auf die mehrfach überdeckte Umgebung der entsprechenden Stelle $\zeta_1(\zeta_0)$ der ζ_1-Ebene abgebildet werden, der Punkt ζ_0 wäre ein „Kreuzungspunkt" von $\zeta_1(\zeta)$, der Wert $\zeta_1(\zeta_0)$ ein Verzweigungspunkt der Umkehrfunktion $\zeta(\zeta_1)$ (vgl. Kap. 2, § 3); diese Tatsache aber widerspräche der eindeutigen Umkehrbarkeit von $\zeta_1(\zeta)$; also ist $n = 1$, und mithin ist $\zeta_1(\zeta)$ eine lineare Funktion, welche wegen $\zeta_1(0) = 0$ die Form $\zeta_1 = a\zeta$ haben muß; da für $|\zeta| = 1$ auch $|\zeta_1| = 1$ ist, so wird $|a| = 1$. Setzen wir also noch voraus, daß für $\zeta = 0$ die Ableitung $\zeta_1'(0)$ reell und positiv ist, so wird $a = 1$, d. h. die Transformation hat die Gestalt $\zeta_1 = \zeta$, sie ist die „identische Transformation". Wir haben damit nicht nur unseren Satz bewiesen, sondern weiter gezeigt, daß die Transformation eindeutig bestimmt ist, wenn der Wert $\zeta_1(0)$ und die Amplitude der Ableitung $\zeta_1'(0)$ vorgeschrieben wird.

Aus dem Bewiesenen folgt nun sofort der gewünschte ***Eindeutigkeitssatz*: *Es kann nicht mehr als eine analytische Funktion $\zeta(z)$ geben, welche das Innere eines einfach zusammenhängenden Bereiches G der z-Ebene auf das Innere des Einheitskreises der ζ-Ebene umkehrbar eindeutig und konform so abbildet, daß zwei vorgegebene Linienelemente (Punkt und Richtung durch den Punkt) in den beiden Gebieten einander entsprechen.***

Wir haben nämlich, wenn $\zeta(z)$, $\zeta_1(z)$ zwei solche Funktionen sind, in der Funktion $\zeta_1(\zeta)$ eine lineare Funktion, welche den Einheitskreis in sich abbildet und dabei ein Linienelement im Inneren ungeändert läßt; da wir dieses Element unbeschadet der Allgemeinheit im Nullpunkt annehmen dürfen und seine Richtung in die positive reelle Achse legen können, so schließen wir sofort $\zeta_1 = \zeta$, was gerade die Aussage unseres Eindeutigkeitstheoremes ist. — Weitere Beweise und Verallgemeinerungen dieses Satzes sind in §§ 10, 14 enthalten.

Daß nun eine solche Abbildungsfunktion tatsächlich existiert, wenn der Bereich G in außerordentlich weitgehender Weise willkürlich bleibt, das ist der wesentliche Inhalt des *Riemann*schen Abbildungssatzes.

§ 2. Der *Riemann*sche Abbildungssatz und seine Verallgemeinerungen.

Wir werden zu einer besonders zweckmäßigen und weitgehender Verallgemeinerung fähigen Form des Abbildungssatzes und zugleich zu einem Beweisansatz geführt, wenn wir uns im Sinne *Riemanns* von der anschaulichen Vorstellung der Strömung leiten lassen. Dabei betrachten wir einen über der z-Ebene gelegenen Bereich G, von dem wir fürs erste annehmen wollen, daß er „*schlicht*" ist, d. h. die Ebene nirgends mehrfach überdeckt, welcher jedoch mehrfach, etwa n-fach zusammenhängend sein darf. Wir definieren dabei, um nicht wie im Kap. 2, § 4 auf „Randkurven" uns beziehen zu müssen, den n-fachen Zusammenhang folgendermaßen: Zunächst verstehen wir unter einem *Querschnitt* Q ein stetiges, sich selbst nicht überschneidendes Kurvenstück[1]), dessen beide Endpunkte Randpunkte des Gebietes G sind; *dann heißt das Gebiet G n-fach zusammenhängend, wenn es durch je n voneinander getrennte Querschnitte sicherlich in getrennte Teilgebiete zerlegt wird, während man geeignete $n-1$ Querschnitte ziehen kann, ohne daß G in Stücke zerfällt.*

Unter einem ***zusammenhängenden Randstück*** des Gebietes verstehen wir eine solche Punktmenge Γ von Randpunkten, daß jeder Querschnitt, welcher seine beiden Endpunkte auf Γ hat, das Gebiet G zerlegt; insbesondere kann ein solches Randstück sich auf einen isolierten Punkt reduzieren. Man erkennt anschaulich unmittelbar, daß die hier gegebene vorsichtigere Formulierung der Begriffe im Einklang steht mit der Definition aus Kap. 2, § 4, wo das n-fach zusammenhängende Gebiet als ein Gebiet mit n getrennten Randkurven erklärt wurde. Unsere jetzige Definition ist insofern allgemeiner, als man unter Umständen nicht mehr von Randkurven sprechen kann, wie spätere Beispiele (§ 7) erläutern werden. Genau dieselben Definitionen und Überlegungen gelten für Gebiete auf der Kugel; wir sehen hieraus, daß unsere Begriffe auch noch anwendbar bleiben, wenn das Gebiet den unendlich fernen Punkt im Innern oder auf dem Rande enthält.

Bei der Definition der Zusammenhangszahl können wir *jede Beziehung auf die Randpunkte vermeiden*, wenn wir unter einem Querschnitt des Gebietes G allgemeiner eine solche Kurve verstehen, welche in jedem ganz im Inneren von G liegenden Teilgebiet, soweit sie in diesem verläuft, stetig ist und in G weder sich schließt noch endigt. Es sei ferner schon hier darauf hingewiesen, daß unsere Definition auch dann noch ebenso brauchbar bleibt, wenn der Bereich G die Ebene

---

[1]) Vgl. Anm. [1]) auf S. 43.

nicht mehr einfach überdeckt, sondern als *Riemann*sche Fläche über der z-Ebene ausgebreitet ist.

Wir stellen uns vor, daß wir in einem solchen Bereich G einen Strömungsvorgang erzeugen, indem wir in einem inneren Punkte, etwa dem Punkte O mit den Koordinaten $x = 0$, $y = 0$ $(z = x + iy)$ eine Doppelquelle (Dipol) auf die Oberfläche aufsetzen[1]); das Potential $u(x, y)$ der Strömung möge also in O etwa die Singularität $\frac{x}{x^2 + y^2}$ besitzen, das konjugierte Potential $v(x, y)$ die Singularität $\frac{-y}{x^2 + y^2}$.

Wir wollen uns zunächst durch rein heuristische Betrachtungen eine Vorstellung von dem Verlauf der entstehenden Funktionen verschaffen.

Die Strömung muß längs der Kurven $v =$ konst. erfolgen, indem der Strom aus der Doppelquelle in O parallel zur x-Achse austritt und wieder dorthin in derselben Richtung zurückkehrt, wie das in Fig. 93 auf S. 281 gekennzeichnet ist. Längs einer geschlossenen Kurve $v =$ konst., welche keinen Kreuzungspunkt enthält, werden sich die Werte von u monoton von $-\infty$ bis $+\infty$ ändern, wenn wir von O ausgehend zu O zurückkehren; denn es ist zufolge der *Cauchy-Riemann*schen Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial \nu}$, unter s die in Richtung der Strömung gemessene Bogenlänge auf der Strömungslinie, unter ν die Länge auf der nach der linken Seite genommenen Normale verstanden; und da die Werte von v auf der einen Seite der Kurve $v =$ konst. größer, auf der anderen Seite kleiner sind als konst., so hat $\frac{\partial u}{\partial s}$ längs der ganzen Kurve $v =$ konst. ein konstantes Vorzeichen.

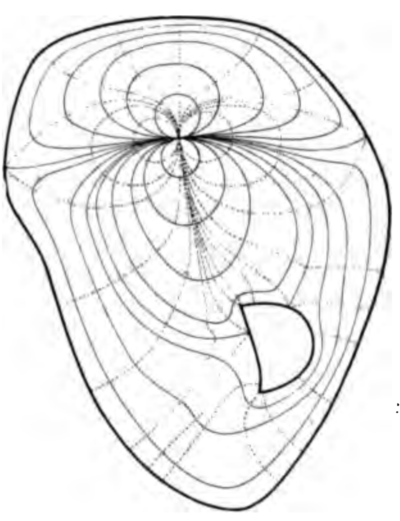


Fig. 107.

Es ist nun ohne weiteres plausibel, daß das Bild der Strömungskurven so aussieht, wie es in der Figur 107 für den Fall $n = 2$ angedeutet ist, d. h. daß Kreuzungspunkte der Strömung in G nirgends entstehen, und daß alle Kurven $v =$ konst. einfach geschlossene durch O gehende, ganz im Innern von G verlaufende Kurven sind, mit Aus-

---

[1]) Wir denken uns z. B. die Oberfläche elektrisch leitend, und setzen in O einen elektrischen Dipol auf.

nahme von zwei Kurven $v = c_1$ und $v = c_2$, von denen jede auf eines der beiden zusammenhängenden Randstücke von G mündet und sich auf diesem gewissermaßen in zwei Stromäste spaltet, die in entgegengesetzter Richtung um das Randstück herumführen, sich an einem Randpunkte wieder vereinigen und durch das Innere nach O gemeinsam zurückfließen. Diese beiden Ausnahmestromlinien können natürlich auch zusammenfallen.

Jede Stromlinie, welche ganz im Inneren verläuft, wird durch die analytische Funktion $\zeta = u + iv = f(z)$ auf eine volle Gerade $v =$ konst. der ζ-Ebene umkehrbar eindeutig abgebildet, wobei der Punkt O dem Punkte $\zeta = \infty$ entspricht; lassen wir den Wert der Konstanten von $-\infty$ bis $+\infty$ monoton wachsen, so wird die Gerade $v =$ konst. die ganze ζ-Ebene einmal überstreichen; nur bei den Ausnahmegeraden $v = c_1$, $v = c_2$ haben wir zu beachten, daß nicht ihre sämtlichen Punkte inneren Punkten von G entsprechen; vielmehr wird zu dem betreffenden Randstück von G eine Strecke auf der Geraden $v = c_1$ bzw. $v = c_2$ gehören, so daß man also die ζ-Ebene längs zwei, allgemein längs n, solchen geradlinigen Strecken parallel zur reellen Achse aufgeschnitten denken muß; einen solchen Bereich wollen wir einen ***geradlinigen Schlitzbereich*** nennen. Dann wird durch unsere Betrachtung folgender Satz plausibel: *Jeder in der z-Ebene liegende schlichte n-fach zusammenhängende Bereich läßt sich umkehrbar eindeutig und konform durch eine analytische Funktion $\zeta = f(z)$ auf einen geradlinigen Schlitzbereich der ζ-Ebene abbilden, und zwar so, daß sich dabei die Abbildungsfunktion $f(z)$ an einer gegebenen Stelle $z = z_0$ in G bei gegebenem α in der Form darstellen läßt:*

$$f(z) = \frac{\alpha}{z - z_0} + g(z),$$

wobei $g(z)$ für $z = z_0$ regulär ist.

Den beiden Ufern des Schlitzes werden dabei natürlich verschiedene Teile des zugehörigen Randstückes von G entsprechen. Unter Umständen können ein oder mehrere Schlitze sich auf einzelne Punkte reduzieren. Dann wird die Umkehrfunktion $z(\zeta)$ in der Umgebung dieses Punktes überall eindeutig, regulär und beschränkt[1]) bleiben, muß also in den Punkt selbst hinein regulär fortgesetzt werden können, d. h. der betreffende Punkt ζ in der ζ-Ebene entspricht einem isolierten Grenzpunkt von G, den man ebensogut hätte weglassen können.

Für den Fall $n = 1$ haben wir in unserem Resultate den *Riemann*schen Abbildungssatz; denn wenn G nicht aus der ganzen oder der

[1]) Falls, wie wir annehmen dürfen, der Punkt $z = \infty$ nicht auf der Begrenzung von G liegt.

„punktierten“ z-Ebene besteht, so können wir also G auf die mit einem geradlinigen Schlitz versehene ζ-Ebene konform abbilden; wir dürfen den Schlitz durch eine Parallelverschiebung und Dilatation in die Strecke $-1 \leqq u \leqq 1$ der u-Achse verlegt denken, und bilden dann durch die uns wohlbekannte Funktion

$$\zeta_1 = \sqrt{\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}}$$

diese geschlitzte Ebene auf die obere ζ_1-Halbebene ab, was ja gleichbedeutend mit der Abbildung auf den Einheitskreis ist; da wir den Einheitskreis so in sich selber konform abbilden können, daß dabei zwei beliebige Linienelemente einander entsprechen, so ist damit der *Riemann*sche Satz in seiner ursprünglichen Form gewonnen. Wir erkennen, *daß bei dieser Formulierung seine Gültigkeit in dem trivialen Ausnahmefall aufhören muß, wenn G die punktierte oder die volle Ebene ist.*

Wollen wir dem Abbildungssatze eine ausnahmslos anwendbare Formulierung geben, so können wir sagen: *Jeder schlichte einfach zusammenhängende Bereich läßt sich umkehrbar eindeutig und konform auf die volle Zahlenkugel höchstens mit Ausnahme eines Kreises abbilden.* Dabei sehen wir im Grenzfalle einen Punkt als einen Kreis von verschwindendem Radius an.

Die vorangehenden Betrachtungen müssen nun zu einem wirklichen Beweise ausgestaltet werden. Unser Ziel wird sein, zu dem vorgegebenen Bereiche G eine überall in G eindeutige analytische Funktion $\zeta = f(z)$ mit der vorgeschriebenen polaren Singularität in $z = z_0$, oder, was keine Beschränkung bedeutet, in $z = 0$ zu konstruieren, deren Imaginärteil v bei Annäherung an ein Randstück einem konstanten Grenzwert zustrebt.

Der gesuchte Beweis wird uns auf Grund eines Ansatzes gelingen, welcher unter dem Namen *„Dirichletsches Prinzip“* schon analog von *Riemann*, allerdings ohne hinreichende Begründung, verwendet wurde.

§ 3. Der Beweisansatz des *Dirichlet*schen Prinzipes.

Wir suchen die Potentialfunktion u der Strömung durch ein Minimalprinzip zu charakterisieren, indem vom physikalischen Standpunkte aus plausibel erscheint, daß z. B. die elektrisch gedachte Strömung möglichst geringe *Joule*sche Wärme entwickelt. Die in einem Gebiete von unserer Strömung erzeugte Wärme ist proportional dem Integral

$$D[u] = \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy,$$

welches über dieses Gebiet zu erstrecken ist und nunmehr unabhängig von seiner physikalischen Deutung der Betrachtung zu Grunde ge-

legt wird[1]). Leider wird aber dieses Integral, wenn es über ein den Punkt O enthaltendes Gebiet erstreckt wird, unendlich. Um diesem Übelstande zu begegnen, denken wir uns den Punkt O mit einem noch ganz im Inneren von G liegenden konzentrischen Kreise K mit der Peripherie $\varkappa$ umgeben, welcher den Radius a haben möge. Wir definieren ferner eine an der Kreisperipherie unstetige Funktion $S(x, y)$ durch

$$(1) \quad S(x,y)\begin{cases} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x}{a^2} & \text{in } K \text{ einschließlich der Peripherie } \varkappa, \\ = 0 & \text{außerhalb } K. \end{cases}$$

Diese Funktion S besitzt dieselbe Singularität wie die gesuchte Potentialfunktion u; die Funktion $U = u - S$ ist zwar an der Kreisperipherie $\varkappa$ unstetig, aber ihr Integral $D[U]$ darf nunmehr über den Punkt O hinüber erstreckt werden[2]).

Wir merken ferner an, daß auch die Funktion S eine Potentialfunktion ist, d. h. überall in K außer in O der Differentialgleichung

$$(2) \qquad \Delta S = 0$$

genügt, und daß ferner längs $\varkappa$ die Relation

$$(3) \qquad \frac{\partial S}{\partial \nu} = 0$$

besteht, wenn mit $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die Differentiation nach der inneren Normale des Kreises bezeichnet wird; diese letzte Eigenschaft ergibt sich sofort, indem wir Polarkoordinaten r, ϑ im Kreise einführen, wodurch S in die Gestalt $\frac{\cos\vartheta}{r} + \frac{r}{a^2}\cos\vartheta$ übergeht, aus der sofort, da die Richtung des Radius mit mit der Normalen ν zusammenfällt,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial S}{\partial \nu}\right)_{r=a} = 0$$

folgt[3]).

Um nun unseren Beweisansatz bequem formulieren zu können, erinnern wir vorab an einige Begriffe aus der Theorie der reellen Funktionen.

Wir wollen eine Funktion $f(x, y)$ in dem Gebiete G ***stückweise stetig*** nennen, wenn G durch endlich viele glatte Linienstücke so in

---

[1]) Bei mechanischer bzw. thermischer Deutung würde die kinetische Energie bzw. die pro Zeiteinheit transportierte Wärmemenge zu betrachten sein.

[2]) Die von *Weyl* herrührende Einführung der obigen Funktion S bringt bei der Durchführung des Beweises gegenüber früheren Ansätzen Vereinfachungen mit sich. Vgl. *Weyl*, Die Idee der *Riemann*schen Fläche (Leipzig 1913).

[3]) Das Bestehen der Relation (3) ist, wie sich in den folgenden Seiten zeigen wird, entscheidend für die Einfachheit der Beweisführung.

endlich viele Teilgebiete zerlegt werden kann, daß f im *Inneren* jedes Teilgebietes stetig ist. Unter dem Integral der Funktion f über das Gebiet G wollen wir dann die Summe der entsprechenden Integrale über die Teilgebiete verstehen.

Ferner müssen wir erklären, was wir unter dem Integral einer Funktion f über ein Gebiet G zu verstehen haben, wenn diese Funktion entsprechend unserer Auffassung des Gebietes als eines offenen nur für die inneren Punkte, nicht aber für den Rand definiert ist. Wir fassen dann das Gebiet G als Grenze einer Folge von „*abgeschlossenen*“ *Gebieten* $G_1, G_2, G_3, \ldots$ auf, d. h. solchen Gebieten, bei denen der Rand hinzugerechnet wird, und wählen diese Gebiete so, daß die Berandung eines jeden aus endlich vielen stückweise glatten Kurvenstücken besteht, daß G_{n-1} ganz in G_n liegt, und daß — hierin liegt die Konvergenz der G_n gegen G — jeder Punkt von G in allen G_n von einem gewissen n ab gelegen ist[1]). Wir definieren das Integral von f über G als den Grenzwert

$$\iint_G f\,dx\,dy = \lim_{n=\infty} \iint_{G_n} f\,dx\,dy,$$

vorausgesetzt, daß dieser Grenzwert existiert und von der speziellen Wahl der Approximationsgebiete G_n unabhängig ist[2]).

Nunmehr betrachten wir alle in G bis auf den Punkt O stetigen und mit stückweise stetigen ersten Ableitungen versehenen Funktionen φ, für welche die Differenz

$$\Phi = \varphi - S \tag{4}$$

im Punkte O stetig ist; wenn das über G erstreckte „*Dirichletsche Integral*“

$$D[\Phi] = \iint_G [\Phi_x^2 + \Phi_y^2]\,dx\,dy$$

für die an der Kreisperipherie $\varkappa$ unstetige Funktion Φ existiert, so wollen wir Φ bzw. φ *zulässige Funktionen* nennen. Wir stellen nun das folgende Minimumproblem: *Unter allen zulässigen Funktionen* Φ

---

[1]) Man erhält z. B. für das schlichte Gebiet G solche „*ineinander geschachtelten*“ Gebiete G_n, indem man von einer Einteilung der Ebene in Quadrate der Seitenlänge 1 ausgeht und diese Quadrate durch fortwährende Seitenhalbierung in Quadrate der Seitenlänge $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ zerlegt; dann definieren wir von einem gewissen n ab G_n als das Gebiet, welches aus allen Quadraten unserer Einteilung besteht, die ganz in G liegen und die Seitenlänge $\frac{1}{2^n}$ besitzen.

[2]) Wenn, wie dies hier der Fall sein wird, f durchweg nicht negativ ist, dann ist die Unabhängigkeit des Grenzwertes von der speziellen Wahl der G_n selbstverständlich.

ist eine solche zu finden, für welche das über G erstreckte Integral $D[\Phi]$ einen möglichst kleinen Wert besitzt.

Wenn es eine solche Funktion U gibt, dann würde aus den Regeln der Variationsrechnung sofort folgen, daß U und ebenso die bis auf O stetige Funktion $u = U + S$ der Potentialgleichung $\Delta U = 0$ bzw. $\Delta u = 0$ genügt; aber gerade die Frage nach der Existenz einer Lösung des Minimumproblems, deren bejahende Antwort *Riemann* als eine Selbstverständlichkeit annahm, bedeutet die wesentliche Schwierigkeit[1]). Wir müssen, um unseren Ansatz, das „*Dirichletsche Prinzip*" zu einem wirklichen Beweise auszugestalten, ohne Berufung auf andere mathematische Disziplinen direkt eine Lösung des Minimumproblems konstruieren und so die Existenz der Lösung nachweisen.

§ 4. Das *Dirichlet*sche Integral.

Der Durchführung des Beweises schicken wir einige Betrachtungen über das *Dirichlet*sche Integral

$$D[\varphi] = \iint_B (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy \tag{1}$$

voraus, welches über einen beliebigen Bereich B erstreckt gedacht wird, und das wir zur Kennzeichnung des Integrationsbereiches, wenn nötig, mit einem Index, bezeichnen, z. B. $D_B[\varphi]$. Bei Einführung von Polarkoordinaten r, ϑ mit einem beliebigen Anfangspunkt nimmt das Integral die Form an

$$D[\varphi] = \iint_B \left(\varphi_r^2 + \frac{1}{r^2}\varphi_\vartheta^2\right) r\, dr\, d\vartheta, \tag{2}$$

wie man aus den Transformationsformeln

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta$$

unmittelbar bestätigt. Bei Drehung und Verschiebung des Koordinatensystems bleibt $D[\varphi]$ ungeändert. Führen wir noch die Bezeichnung

$$D[\varphi, \psi] = \iint_B (\varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y)\, dx\, dy \tag{3}$$

ein, so gilt bei konstantem λ und μ die Identität

$$D[\lambda\varphi + \mu\psi] = \lambda^2 D[\varphi] + 2\lambda\mu D[\varphi, \psi] + \mu^2 D[\psi], \tag{4}$$

und da $D[\lambda\varphi + \mu\psi]$ eine negativer Werte nicht fähige homogene quadratische Funktion von λ, μ ist, folgt

$$D[\varphi, \psi]^2 \leqq D[\varphi]\cdot D[\psi], \tag{5}$$

wobei natürlich überall vorausgesetzt ist, daß die betreffenden Integrale überhaupt einen Sinn haben. Aus (5) folgt sofort, daß die Existenz von $D[\varphi]$ und $D[\psi]$ die von $D[\varphi, \psi]$ nach sich zieht.

[1]) Vgl. zum historischen Zusammenhang § 17.

Mit der Bezeichnung (3) können wir die *Greensche Formel* (3a) aus Kap. 1, § 1 in folgende Gestalt setzen:

$$D[\varphi, \psi] = -\iint_B \varphi \Delta \psi \, dx \, dy + \int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} ds. \tag{6}$$

Hierbei ist B ein von stückweise glatten Randkurven begrenzter Bereich, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ bedeutet die Differentiation nach der äußeren Normale des Gebietes B auf dessen Rande, ds das Bogenelement auf dem Rande, und es wird vorausgesetzt, daß überhaupt die hier auftretenden Integrale einen Sinn haben, daß ferner die Funktionen φ, ψ beide in B einschließlich des Randes stetig sind, und daß dasselbe für die ersten und zweiten Ableitungen von ψ gilt, während für φ nur stückweise die Stetigkeit[1]) der ersten Ableitungen verlangt zu werden braucht. Der Gültigkeitsbereich der Formel (3a) aus Kap. I, § 1 kann nämlich sofort durch folgende Überlegung über die dortigen Voraussetzungen hinaus erweitert werden. Wenn wir für φ die Voraussetzung der Stetigkeit der ersten Ableitungen auf dem Rande aufgeben, ohne daß die linke Seite ihre Bedeutung verliert, so muß diese gleich der rechten Seite bleiben, denn die Formel ist gewiß richtig für jedes ganz in B liegende Teilgebiet B' und geht offenbar in die Formel für B stetig über, wenn wir B' gegen B konvergieren lassen. Indem wir nun aus solchen Bereichen einen neuen Bereich zusammensetzen, erkennen wir, da die Randintegrale über die gemeinsamen Begrenzungsstücke der Teilbereiche sich in gewohnter Weise wegheben, die Gültigkeit von (6) in dem behaupteten Umfang.

Das Dirichletsche Integral ist gegen konforme Abbildung invariant, d. h. bei konformer Abbildung des Gebietes B auf ein Gebiet B^* durch die Funktion $\zeta = f(z) = u + iv$ gilt für jede Funktion φ, bzw. für jedes Funktionenpaar φ, ψ, für welches die betreffenden Integrale einen Sinn haben,

$$\iint_B (\varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y) dx \, dy = \iint_{B^*} (\varphi_u \psi_u + \varphi_v \psi_v) du \, dv.$$

Wegen der *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen haben wir nämlich

$$\varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y = (\varphi_u \psi_u + \varphi_v \psi_v)(u_x^2 + u_y^2).$$

Andererseits ist $u_x^2 + u_y^2 = u_x v_y - u_y v_x$ gerade die Funktionaldeterminante von u, v nach x, y; somit gilt in der Tat nach dem bekannten Satze der Integralrechnung über Transformation von Doppelintegralen die obige Relation.

---

[1]) Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß nach unserer Definition auf S. 328 diese Eigenschaft über das Verhalten der Ableitungen auf den in Frage kommenden Rändern nichts besagt, im Gegensatz zu einem sonst gelegentlich vorkommenden Sprachgebrauch.

Statt uns auf diesen Satz der Integralrechnung zu berufen, könnten wir übrigens auch auf die anschauliche Tatsache hinweisen, daß $u_x^2 + u_y^2 = |f'(z)|^2$ das *flächenhafte Vergrößerungsverhältnis* bei der konformen Abbildung ist.

Setzen wir speziell $\varphi = \psi = u$, so erhalten wir

$$D[u] = \iint_B |f'(z)|^2 \, dx \, dy = \iint_{B^*} du \, dv.$$

Also: *Das Dirichletsche Integral einer Potentialfunktion u über ein Gebiet B stellt den Flächeninhalt des betreffenden Bildbereiches B^* von B dar, welcher durch die Funktion $\zeta = u + iv$ über der ζ-Ebene entworfen wird.*

Wir werden später aus der Kleinheit des *Dirichlet*schen Integrales (1) auf den Integranden selbst Rückschlüsse zu ziehen haben; dies ist bei beliebiger Funktion φ schwierig, gelingt jedoch leicht, wenn man $\varphi = p$ als Potentialfunktion, d. h. Realteil einer analytischen Funktion nimmt. Es gilt dann folgender für zahlreiche Anwendungen in der Funktionentheorie nützliche Hilfssatz.

Hilfssatz I. *Ist $p(x, y)$ eine im Bereiche B reguläre Potentialfunktion, deren Dirichletsches Integral $D[p]$ unterhalb einer Schranke M liegt, ist ferner B' irgendein fester abgeschlossener, ganz im Inneren von B liegender Bereich, so ist überall in B' der Integrand $p_x^2 + p_y^2$ kleiner als eine nur von M abhängige und mit M zugleich gegen Null strebende (übrigens M proportionale) Schranke $m = m(M)$. Mit anderen Worten: Bildet die in B analytische Funktion $\zeta = p + iq = f(z)$ den Bereich B auf einen Bereich ab, dessen Flächeninhalt unter der Schranke M liegt, so bleibt für jeden im Inneren von B liegenden abgeschlossenen Teilbereich B' das Vergrößerungsverhältnis $|f'(z)|$ unterhalb einer nur von M (und natürlich der Wahl von B') abhängigen, mit M gleichzeitig gegen Null rückenden Schranke.*

Berücksichtigt man, daß zufolge der Sätze in Kap. 2, § 5 die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge

$$f_1, f_2, f_3, \ldots \quad \text{bzw.} \quad p_1, p_2, p_3, \ldots$$

wieder eine analytische Funktion von $z = x + iy$ bzw. eine Potentialfunktion von x, y wird, wenn die Funktionen $f_n(z)$ bzw. $p_n(x, y)$ es sind, so erhält man sofort folgendes Resultat:

Hilfssatz Ia. *Ist $u_1, u_2, u_3, \ldots$ eine Folge von Potentialfunktionen in B, für welche*

$$\lim_{n=\infty} D[u_n] = 0$$

wird und welche in einem Punkte von B konvergieren, so konvergieren die Funktionen in jedem ganz innerhalb B liegenden abgeschlossenen

Teilgebiet B' gleichmäßig gegen eine Konstante; setzen wir dagegen außer der Konvergenz der u_n in einem Punkte voraus, daß das Dirichletsche Integral $D[u_n - u_m]$ bei hinreichend großen m und n beliebig klein wird,

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} D[u_n - u_m] = 0,$$

so konvergieren die Funktionen u_n in jedem ganz innerhalb B liegenden Bereiche B' gleichmäßig gegen eine Potentialfunktion u.

Zum Beweise des Hilfssatzes I betrachten wir für die analytische Funktion $f(z) = p + iq$ die Ableitung $f'(z) = p_x + ip_y$ in einem ganz innerhalb B liegenden Kreise K mit dem Radius R.

Nach Kap. 2, § 5 gilt für den Funktionswert $f'(z_0)$ im Mittelpunkte z_0

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(t)}{t - z_0}\, dt \quad (t - z_0 = re^{i\vartheta},\ 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi,\ r \leqq R). \tag{7}$$

Es ist also gewiß, wenn wir Polarkoordinaten r, ϑ in K einführen, mit r multiplizieren und von 0 bis R integrieren

$$f'(z_0)\cdot\frac{R^2}{2} = \frac{1}{2\pi i}\iint_K \frac{f'(t)}{re^{i\vartheta}}\, re^{i\vartheta}\cdot i\, d\vartheta\cdot r\, dr = \frac{1}{2\pi}\iint_K f'(t)\, dx\, dy, \tag{8}$$

somit erst recht

$$|f'(z_0)| \leqq \frac{1}{\pi R^2}\iint |f'(t)|\, dx\, dy.$$

Wir wenden nun die in Abschätzungen der Integralrechnung so häufig wichtige „*Schwarzsche Ungleichung*" an, welche für irgend zwei in einem Gebiete G definierte reelle Funktionen h, l besagt

$$\left(\int h\cdot l\, dg\right)^2 \leqq \int h^2\, dg\cdot\int l^2\, dg; \tag{9}$$

dabei ist es gleichgültig, ob wir es mit Funktionen einer oder mehrerer reeller Variablen zu tun haben; je nachdem wird das Integrationsgebiet G eindimensional oder mehrdimensional sein und mit dg dessen Linienelement bzw. Flächenelement usw. bezeichnet werden. Die Ungleichung (9) folgt sofort aus der Bemerkung, daß der in den Parametern λ, μ homogene quadratische Ausdruck

$$\int_G (\lambda l + \mu h)^2\, dg$$

negativer Werte nicht fähig ist.

Wenden wir die Ungleichung (9) auf den Kreis K an, indem wir $l = 1$, $h = |f'(t)|$ setzen, so erhalten wir aus (8)

$$|f'(z_0)|^2 = p_x^2 + p_y^2 \leqq \frac{1}{R^2\pi}\cdot D_K[p].$$

Nun kann jeder Punkt unseres Bereiches B', welcher ganz im Inneren von B liegt, als Mittelpunkt eines Kreises K mit festem Radius R aufgefaßt werden, der noch ganz im Inneren von B liegt, für den also $D_K[p] \leqq M$ ist. Mithin haben wir für das Gebiet B' gleichmäßig

$$p_x^2 + p_y^2 = |f'(z)|^2 \leqq M \cdot \frac{1}{R^2 \pi}, \tag{10}$$

womit der behauptete Satz I bewiesen ist. Der Hilfssatz I a ist eine unmittelbare Folge von I; denn mit $D[u_n]$ konvergieren auch die Ableitungen von u_n in B' gleichmäßig gegen Null.

Wenn wir zwar nicht die Konvergenz der Funktionen u_n in einem inneren Punkte von B voraussetzen, dagegen entsprechende Voraussetzungen über ein Stück des Randes machen, so können wir ebenfalls auf die Konvergenz im Inneren schließen. Speziell gilt

Hilfssatz I b. *Wenn für die Folge der Potentialfunktionen u_1, u_2, u_3, ... die Relation*

$$\lim_{n=\infty} D[u_n] = 0$$

gilt, und wenn sämtliche u_n auf einem glatten Kurvenstück C des Randes verschwinden, so konvergieren die Funktionen u_n in jedem inneren Teilgebiet B' gleichmäßig gegen Null.

Nach Hilfssatz I a wissen wir, daß bei hinreichend großem n die Funktion u_n in einem festen inneren Teilgebiete B' mit beliebiger Genauigkeit gleich einer Konstanten c_n sein muß. Wir betrachten nun, indem wir annehmen, daß C nicht eine zur x-Achse parallele Strecke sei — sonst würden wir einfach y mit x vertauschen — eine im Inneren von B liegende zur y-Achse parallele Strecke $A_1 A_2$ $(x = a,\ y_0 \leqq y \leqq y_0 + b)$, von der wir annehmen dürfen, daß die von ihren Punkten nach einer Richtung, etwa nach links, gezogenen Parallelen zur x-Achse das Kurvenstück C nur in einem Punkte treffen (siehe Fig. 108).

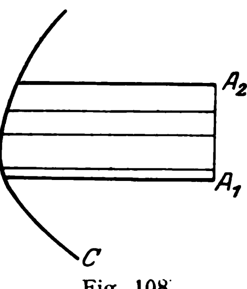


Fig. 108.

Es sei x' die Abszisse dieses Schnittpunktes, dann wird, wenn wir u statt u_n schreiben, $u(x', y) = 0$, und wir haben zufolge der *Schwarz*schen Ungleichung, angewandt für $h = 1$, $l = u_x$,

$$(u(a, y) - u(x', y))^2 = u(a, y)^2$$

$$= (\int_{x'}^{a} u_x(x, y)\, dx)^2 \leqq |a - x'| \cdot \int_{x'}^{a} u_x^2\, dx < L \int_{x'}^{a} (u_x^2 + u_y^2)\, dx,$$

wobei L eine von y unabhängige obere Schranke der Streckenlängen

$|a - x'|$ bedeutet; also wird nach Integration über y im Intervalle $y_0 \leqq y \leqq y_0 + b$

$$\int_{y_0}^{y_0+b} u(a, y)^2 \, dy \leqq L \, D_{B^*}[u] \leqq L \, D[u],$$

wobei B^* das Gebiet zwischen $A_1 A_2$, den Geraden $y = y_0$, $y = y_0 + b$ und C bedeutet. Da die linke Seite bei hinreichend großem n mit beliebiger Annäherung gleich $b \cdot c_n^2$ ist, während rechts eine gegen Null konvergierende Zahl steht, so wird auch c_n gegen Null konvergieren, und somit folgt aus Hilfssatz Ia die Konvergenz der u_n gegen Null in allen inneren Punkten, wie behauptet wurde.

Unsere Hilfssätze behalten ihre Gültigkeit auch, wenn der Bereich B den unendlich fernen Punkt im Innern enthält, worauf ausdrücklich hingewiesen sei. In der Tat können wir ja durch eine geeignete lineare Transformation die Umgebung des unendlich fernen Punktes stets ins Endliche verlegen, wobei das *Dirichlet*sche Integral seinen Wert nicht ändert; wir können daher auch für solche Bereiche alle für den Beweis unserer Hilfssätze nötigen Schlüsse unverändert durchführen, wie ja überhaupt der unendlich ferne Punkt nirgends eine Ausnahmestellung einnimmt.

An zweiter Stelle in diesem Paragraphen wollen wir die Ausnutzung der Minimumsforderung beim Ansatz des vorigen Paragraphen vorbereiten, indem wir folgenden auf einen Kreis K bezüglichen Hilfssatz beweisen.

Hilfssatz II. *Es sei $w(x, y)$ eine im Kreise K vom Radius R einschließlich des Randes stetige und stückweise mit stetigen Ableitungen versehene Funktion mit endlichem Dirichletschen Integral $D[w]$, es sei u diejenige im Inneren von K reguläre Potentialfunktion, welche auf dem Rande mit w übereinstimmt, dann existiert*[1] $D[u]$, *und es gilt*

$$D[u] \leqq D[w]. \tag{11}$$

Die Randwertaufgabe für den Kreis, welche wir in Kap. 2, § 5 durch das Poissonsche Integral gelöst haben, ergibt sich also hiernach als äquivalent mit der Minimumsaufgabe, bei gegebenen Randwerten $D[w]$ zum Minimum zu machen.

Der Beweis unseres Hilfssatzes würde sofort folgen, wenn wir die *Green*sche Formel (6) für $\psi = u$, $\varphi = u - w$ auf den Kreis anwenden dürften; denn dann ergäbe sich $D[u, u - w] = 0$ und also

$$D[w] = D[u + (w - u)] = D[u] + D[w - u] \geqq D[u].$$

[1] Gerade dieser Punkt bedarf eines Beweises, da man leicht stetige Randwerte vorschreiben kann, für welche $D[u]$ unendlich wird; z. B.

$$f(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^3 \vartheta)}{n^2}.$$

Da aber im allgemeinen auf dem Rande von K über die Ableitungen von u gar nichts ausgesagt werden kann, so sind wir zu einem kleinen Umwege beim Beweise gezwungen. Die Randwerte von w oder u bilden eine stetige Funktion $f(\vartheta)$ von ϑ mit der Periode 2π, wenn, wie vorher, mit r, ϑ konzentrische Polarkoordinaten bezeichnet werden. Mit $K_1, K_2, K_3, \ldots$ bezeichnen wir eine Folge wachsender konzentrischer Kreise, deren Radien gegen R konvergieren.

Durch die *Poisson*sche Formel (9) auf S. 270 ist u dargestellt in der Form

$$u = \lim_{n=\infty} u_n,$$

wobei u_n eine in der ganzen Ebene reguläre Potentialfunktion bedeutet, und für $r = R$

$$u_n(r, \vartheta), \quad \frac{\partial}{\partial r} u_n(r, \vartheta)$$

trigonometrische Polynome n-ten Grades, d. h. Ausdrücke der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta)$$

bzw.

$$\frac{1}{R} \sum_{k=1}^{n} (k a_k \cos k\vartheta + k b_k \sin k\vartheta)$$

sind. Dabei ist

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \cos k\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} w(R, \vartheta) \cos k\vartheta \, d\vartheta,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \sin k\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} w(R, \vartheta) \sin k\vartheta \, d\vartheta.$$

Längs der Kreisperipherie wird also für $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$\int_0^{2\pi} (w - u_n) \cos k\vartheta \, d\vartheta = 0, \quad \int_0^{2\pi} (w - u_n) \sin k\vartheta \, d\vartheta = 0,$$

mithin

$$\int_0^{2\pi} (w - u_n) \frac{\partial u_n}{\partial r} \, d\vartheta = 0. \tag{12}$$

Nunmehr bilden wir das Integral

$$D[w] = D[u_n + (w - u_n)] = D[u_n] + 2D[u_n, w - u_n] + D[w - u_n] \tag{13}$$

und formen $D[u_n, w - u_n]$ nach der *Green*schen Formel um, welche wir für $\psi = u_n$, $\varphi = w - u_n$ auf den Kreis K anwenden dürfen, da

u_n stetige erste und zweite Ableitungen in K einschließlich des Randes besitzt. Es ergibt sich, wenn wir (12) berücksichtigen, wegen $\Delta u_n = 0$

$$D[u_n, w - u_n] = 0.$$

Mithin wird

$$D[w] = D[u_n] + D[w - u_n],$$

also gewiß

$$D[u_n] \leqq D[w].$$

Erst recht haben wir daher für jedes h

$$D_{K_h}[u_n] \leqq D[w],$$

und, da in K_h die Funktion u_n mit ihren sämtlichen Ableitungen gleichmäßig gegen u und die Ableitungen von u konvergiert,

$$D_{K_h}[u] \leqq D[w];$$

nun ist aber nach Definition

$$D[u] = \lim_{h=\infty} D_{K_h}[u].$$

Also haben wir auch

$$D[u] \leqq D[w],$$

wie behauptet wurde.

Es sei schließlich noch bemerkt, daß genau dieselben Überlegungen und Resultate gelten, wenn man unter K das *Äußere* eines Kreises versteht.

§ 5. Lösung des *Riemann*schen Minimumproblems.

Wir wollen nunmehr das Minimumproblem lösen, welches wir zum Schluß von § 3 formuliert haben, und halten fürs erste an der Voraussetzung der Schlichtheit von G fest. Wir legen dabei die Bezeichnungen von § 3 zugrunde. Zunächst zeigen wir, daß das Problem überhaupt einen Sinn hat, d. h. daß es wenigstens eine zulässige Funktion $F = \Phi$ gibt, für welche das Integral $D[\Phi]$, über den Bereich G erstreckt, einen endlichen Wert besitzt. Ist nämlich K' ein konzentrischer Kreis zu K mit dem Radius $a' > a$, und liegt auch K' noch ganz im Inneren von G, so definieren wir $F = 0$ in K und außerhalb K' und, in Polarkoordinaten geschrieben, $F = \frac{-2}{a} \cos\vartheta \cdot \frac{r - a'}{a - a'}$ in dem Kreisring zwischen K und K'; offenbar ist F eine zulässige Funktion mit endlichem $D[F]$.

Ob das Minimumproblem eine Lösung besitzt, muß zunächst dahingestellt bleiben; jedenfalls aber ist gewiß, daß die Gesamtheit der Werte $D[\Phi]$, welche durch Einsetzen zulässiger Funktionen Φ ent-

stehen können, eine untere Grenze $d \geqq 0$ besitzt, derart, daß für jede zulässige Funktion

$$(1) \qquad D[\Phi] \geqq d$$

gilt, und daß es Funktionsfolgen $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$ gibt, für welche

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} D[\Phi_n] = d$$

wird; unter Umständen könnten dabei alle Funktionen Φ_n gleich einer und derselben Funktion U sein, falls diese wirklich den Wert $D[U] = d$ liefert, also das Problem löst.

Eine solche Funktionsfolge, deren Existenz sich unmittelbar aus der Existenz der unteren Grenze einer Menge positiver Zahlen ergibt, nennen wir eine *Minimalfolge*[1]). Wir wollen von einer festen solchen Minimalfolge ausgehen und von ihr zur Lösung unseres Problems vordringen. Dabei beachten wir, daß an den Werten $D[\Phi]$ nichts geändert wird, wenn wir zu Φ eine additive Konstante hinzufügen; wir dürfen und wollen daher diese Konstante von vornherein fixieren, indem wir verlangen, daß im singulären Punkte O die Funktionen Φ_n sämtlich den Wert Null haben.

Wir leiten zunächst eine für jede Minimalfolge gültige Bedingung ab: Es seien $h_1, h_2, h_3, \ldots$ in G stetige und stückweise mit stetigen Ableitungen versehene Funktionen, für welche das Integral $D[h_n]$ unterhalb einer von n unabhängigen Schranke M bleibt, dann gilt für jede Minimalfolge

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} D[\Phi_n, h_n] = 0,$$

und zwar gleichmäßig in dem Sinne, daß bei gegebenem M unabhängig von der speziellen Wahl von h_n der Ausdruck auf der linken

---

[1]) Die wirkliche, für den bloßen Existenzbeweis unerhebliche Konstruktion solcher Minimalfolgen macht keinerlei prinzipielle Schwierigkeiten. Ist z. B. G ein ganz im Endlichen gelegener Bereich, begrenzt von Kurven C ohne mehrfache Punkte, so denken wir uns denselben mit einem noch von dem Index j abhängigen Dreiecksnetz T_j überdeckt, dessen Maschen mit wachsendem j immer enger werden. Wir betrachten nun nur solche Funktionen φ bzw. $\Phi = \varphi - S$, wo die Differenz $\varphi - \frac{x}{x^2+y^2}$ in jedem Dreieck von T_j eine lineare Funktion wird. Unter Φ_j verstehen wir diejenige unter den so entstehenden zu T_j konstruierten Funktionen, für welche $D[\Phi]$ einen möglichst kleinen Wert erhält. Diese Forderung $D[\Phi] = \text{Min.}$ ist jetzt ein Problem eines Minimums einer Funktion von einer endlichen Anzahl von Variablen, nämlich des Integrals, aufgefaßt in seiner Abhängigkeit von den Werten von φ in den Eckpunkten der Dreieckseinteilung; dieses Problem ist gewiß lösbar, und zwar, wie leicht ersichtlich, mittels linearer Gleichungen. Daß die so entstehenden Funktionen Φ_j wirklich eine Minimalfolge bilden, folgt sofort aus der unschwer beweisbaren Tatsache, daß man jede zulässige Funktion Φ und deren Dirichletsches Integral mit Hilfe unserer Konstruktion bei hinreichend großem j beliebig genau approximieren kann.

Seite von (3), absolut genommen, unterhalb jede vorgegebene positive Grenze sinkt, wenn nur n hinreichend groß genommen wird.

In der Tat, wir bilden mit einem noch verfügbaren Parameter ε die Funktionen $\Phi_n + \varepsilon h_n$ und haben jedenfalls

$$D[\Phi_n + \varepsilon h_n] = D[\Phi_n] + \varepsilon\{2D[\Phi_n, h_n] + \varepsilon D[h_n]\} \geqq d;$$

wäre nun für gewisse beliebig große Indizes n

$$|D[\Phi_n, h_n]| \geqq \alpha > 0,$$

so setze man $\varepsilon = \pm \frac{\alpha}{M}$; dann ist $\varepsilon\{2D[\Phi_n, h_n] + \varepsilon D[h_n]\}$ absolut genommen $\geqq \frac{\alpha^2}{M}$, und zwar negativ, falls ε entgegengesetztes Vorzeichen wie $D[\Phi_n, h_n]$ bekommt; da nun aber $D[\Phi_n]$ mit wachsendem n gegen d konvergiert, so wäre für gewisse hinreichend große n

$$D[\Phi_n] + \varepsilon\{2D[\Phi_n, h_n] + \varepsilon D[h_n]\} \leqq D[\Phi_n] - \frac{\alpha^2}{M} < d,$$

was ein Widerspruch ist.

Speziell dürfen wir setzen $h_n = \Phi_m - \Phi_n$, wobei m entweder fest bleibt oder irgendwie mit n variieren darf; denn sicher liegt $D[h_n] = D[\Phi_n] + D[\Phi_m] - 2D[\Phi_n, \Phi_m]$ wegen § 4 Beziehung (5) unterhalb einer von n und m unabhängigen Schranke. Schreiben wir nun

$$\begin{aligned} D[\Phi_m] &= D[\Phi_n + (\Phi_m - \Phi_n)] \\ &= D[\Phi_n] + 2D[\Phi_n, \Phi_m - \Phi_n] + D[\Phi_m - \Phi_n], \end{aligned}$$

so folgt, wenn wir n und m hinreichend groß nehmen, aus

$$\lim_{m=\infty} D[\Phi_m] = \lim_{n=\infty} D[\Phi_n] = d$$

mit Rücksicht auf (3) sofort, daß der Ausdruck $D[\Phi_m - \Phi_n]$ beliebig klein wird. *Es gilt also für jede Minimalfolge die Relation*

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} D[\Phi_n - \Phi_m] = 0. \tag{4}$$

Wir bedecken jetzt unseren Bereich G mit einer Reihe von Kreisen K_0, K_1, K_2, ... in folgender Weise: jeder der Kreise liegt ganz im Inneren von G, jeder innere Punkt von G liegt im *Inneren* mindestens eines der Kreise K_n, und schließlich häufen sich die Kreise nirgends im Inneren von G, d. h. jedes ganz im Inneren von G liegende Teilgebiet von G hat nur mit endlich vielen der Kreise Punkte gemein. Enthält der Bereich G den unendlich fernen Punkt, so betrachten wir einen Kreis K_j, dessen Äußeres ganz zu G gehört, und verstehen in der obigen Aufzählung unter einem der K_n das Äußere dieses Kreises. Daß man eine solche Kreisüberdeckung stets erzielen kann, ist eine unmittelbar einleuchtende elementargeometrische

Tatsache[1]). Wir dürfen und wollen im übrigen annehmen, daß der Kreis K um O mit K_0 zusammenfällt und daß kein weiterer Kreis den Punkt O enthält.

Nunmehr gehen wir von der Minimalfolge $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ zu einer neuen „geglätteten" Minimalfolge $\Psi_1, \Psi_2 \ldots$ über, deren Funktionen Ψ_n außerhalb des Kreises K_0 mit den entsprechenden Funktionen Φ_n übereinstimmen, innerhalb aber reguläre Potentialfunktionen sind, nämlich erhalten werden, indem wir mit den Randwerten der Funktion Φ_n — Randwerten bei Annäherung an den Rand von innen — auf der Peripherie $\varkappa$ von K_0 für diesen Kreis die Randwertaufgabe der Potentialtheorie lösen, was durch das *Poisson*sche Integral stets möglich ist. Nun ist zufolge des Hilfssatzes II von § 4 $D[\Psi_n] \leqq D[\Phi_n]$; da nun aber auch die Funktion Ψ_n eine zulässige Funktion darstellt und infolgedessen $D[\Psi_n] \geqq d$ ist, so haben wir wegen (2) auch

$$\lim_{n=\infty} D[\Psi_n] = d, \tag{5}$$

d. h. die Funktionen Ψ_n bilden ebenfalls eine Minimalfolge. Durch Hinzufügung einer geeigneten additiven Konstante fixieren wir wieder in O für Ψ_n den Wert Null. Als Minimalfolge genügen die Funktionen Ψ_n wegen (4) der Relation

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} D[\Psi_n - \Psi_m] = 0, \tag{4a}$$

und da die Funktionen Ψ_n im Inneren von K_0 reguläre Potentialfunktionen sind, die sämtlich in O verschwinden, so besagt Hilfssatz Ia in § 4, daß die Funktionen Ψ_n in K_0 gegen eine Potentialfunktion U konvergieren, und daß für jedes im Inneren von K_0 liegende Gebiet B diese Konvergenz sowie die Konvergenz der sämtlichen Ableitungen gleichmäßig ist.

Es kommt nun darauf an, die so zunächst nur für das Innere von K_0 definierte Potentialfunktion U überall nach G hinein fortzusetzen und zu zeigen, daß wir damit die Lösung des Minimumproblems erhalten. Zu diesem Zwecke betrachten wir den zweiten Kreis K_1, von dem wir annehmen können, daß er ein Gebiet B mit dem ersten gemeinsam hat, und gehen von der vorhin gewonnenen Minimalfolge $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ aus. Wir unterwerfen diese Funktionen für den Kreis K_1 einem ähnlichen

---

[1]) Im Anschluß an die Definition der Approximationsgebiete G_n in Anmerkung [1]) auf S. 329 können wir eine solche Kreiseinteilung einfach folgendermaßen erhalten: Wir schlagen um jeden zu G gehörigen Eckpunkt der Quadrateinteilung mit der Länge 1 einen Kreis vom Radius 1, falls dieser Kreis in G hineinfällt, sodann schlagen wir um jeden noch nicht als Kreismittelpunkt benutzten Eckpunkt der Quadrateinteilung mit der Seitenlänge $^1/_2$ einen Kreis vom Radius $^1/_2$, falls dieser Kreis ganz in G fällt usw. Offenbar liefern uns diese Kreise eine Einteilung der gewünschten Art.

Glättungsprozeß, wie zuerst die Funktionen Φ_n für den Kreis K_0; nur haben wir jetzt die Unstetigkeit zu beachten, welche auf dem in K_1 liegenden Bogen Γ der Peripherie von K_0 vorgeschrieben ist (Fig. 109). Die Funktion $\psi_n = \Psi_n + S$ ist in K_1 einschließlich des Randes stetig, und es existiert gewiß $D_{K_1}[\psi_n]$. Wir konstruieren eine Funktion ω_n, welche außerhalb K_1 mit ψ_n übereinstimmt, innerhalb K_1 eine reguläre Potentialfunktion ist und auf dem Rande von K_1 mit ψ_n übereinstimmt. Wegen Hilfssatz II in § 4 ist gewiß $D_{K_1}[\omega_n] \leqq D_{K_1}[\psi_n]$. Nun sei $\Omega_n = \omega_n - S$, dann gilt

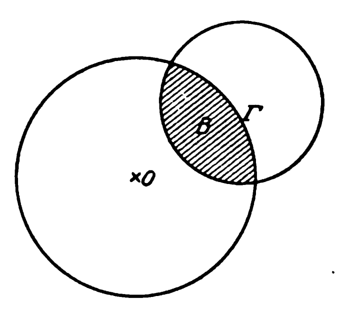


Fig. 109.

$$D_{K_1}[\Omega_n] = D_{K_1}[\omega_n] + D_{K_1}[S] - 2\,D_{K_1}[\omega_n, S],$$
$$D_{K_1}[\Psi_n] = D_{K_1}[\psi_n] + D_{K_1}[S] - 2\,D_{K_1}[\psi_n, S].$$

Wenn wir nun die beiden letzten Integrale rechts nach der *Green*schen Formel umformen, so haben wir K_1 durch den Bogen Γ in zwei Teile zu zerlegen; wegen der auf Γ geltenden Relation $\frac{\partial S}{\partial \nu} = 0$ — wie immer bedeutet $\frac{\partial S}{\partial \nu}$ Differentiation nach der Normale — fallen die Randintegrale über den Bogen Γ weg, so daß wir mit Rücksicht auf $\Delta S = 0$ erhalten

$$D_{K_1}[\omega_n, S] = \int \omega_n \frac{\partial S}{\partial \nu}\, ds, \qquad D_{K_1}[\psi_n, S] = \int \psi_n \frac{\partial S}{\partial \nu}\, ds,$$

wobei die Integrale rechts über die Peripherie von K_1 zu erstrecken sind. Nun sind die Werte von ω_n und ψ_n auf der Peripherie von K_1 miteinander identisch, also wird

$$D_{K_1}[\omega_n, S] = D_{K_1}[\psi_n, S].$$

Daher gilt wegen $D_{K_1}[\omega_n] \leqq D_{K_1}[\psi_n]$ auch $D_{K_1}[\Omega_n] \leqq D_{K_1}[\Psi_n]$, und somit

$$D[\Omega_n] \leqq D[\Psi_n],$$

d. h. auch die Funktionen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ bilden eine Minimalfolge. Es besteht also zufolge (4) die Gleichung

$$\text{(4b)} \qquad \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} D[\Omega_n - \Omega_m] = \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} D[\omega_n - \omega_m] = 0.$$

Nach Hilfssatz Ia aus § 4 schließen wir nunmehr, da die ω_n in K_1 Potentialfunktionen sind, daß diese Funktionen entweder selbst oder doch, nachdem wir zu ω_n eine geeignete additive Konstante c_n hinzugefügt haben, in K_1 gegen eine Potentialfunktion u_1 konvergieren, und zwar mit allen Ableitungen gleichmäßig in jedem inneren

Teilgebiet. Wir wollen zeigen, daß wir diese Konstanten c_n gleich Null nehmen können und daß in dem K_0 und K_1 gemeinsamen Gebiet B die Funktionen $u_1 - S = U_1$ und U identisch sind.

Beides ergibt sich leicht aus den Resultaten von § 4. Da nämlich auch die Funktionenfolge $\Psi_1, \Omega_1, \Psi_2, \Omega_2, \ldots$ eine Minimalfolge ist, so gilt wegen (4)

$$\lim_{n=\infty} D[\Psi_n - \Omega_n] = 0, \tag{4c}$$

und es ist also erst recht für das gemeinsame Gebiet B der Kreise K_0 und K_1

$$\lim_{n=\infty} D_B[\psi_n - \omega_n] = 0.$$

Nun ist in diesem Gebiete die Differenz $\psi_n - \omega_n$ eine reguläre Potentialfunktion, welche auf dem in K_0 liegenden Bogen der Peripherie von K_1 verschwindet; also konvergiert nach Hilfssatz Ib im § 4 die Funktion $\psi_n - \omega_n$ in B gegen Null und zwar sicher gleichmäßig für jedes ganz innerhalb B liegende Gebiet B'.

Da in B' gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \psi_n = u = U + S$$

wird, ist damit gezeigt, daß die Funktionen ω_n, Ω_n in B gegen u, U konvergieren; daß also tatsächlich die Potentialfunktion u_1 und die Funktion $U_1 = u_1 - S$ die Fortsetzungen der Funktionen u, U darstellen und nebst ihren Ableitungen durch Grenzübergang aus ω_n, Ω_n entstehen.

In genau derselben Weise können wir weiter gehen und die Grenzfunktion u bzw. U auch in $K_2, K_3, \ldots$ usw. definieren, wobei wir den Kreis K_n immer so gewählt denken, daß er mit einem der vorangehenden innere Punkte gemeinsam hat. Bei allen Kreisen K_n, welche K_0 nicht treffen, vereinfacht sich das Verfahren, indem dort $S = 0$ ist und die Glättung sich lediglich durch Lösung der Randwertaufgabe für den betreffenden Kreis vollzieht.

So gewinnen wir in G eine Funktion U, für welche $u = U + S$ eine außer in O überall in G reguläre Potentialfunktion darstellt und welche selbst in K_0 eine reguläre Potentialfunktion ist.

Für viele wichtige Anwendungen[1]) genügt die Erreichung dieses Zieles. Zur vollständigen Erledigung unserer Aufgabe haben wir jedoch nun zu zeigen, daß die Funktion U unser Minimumproblem löst, d. h. daß $D[U] = d$ wird. Gewiß ist U eine zulässige Funktion, es ist also

$$D[U] \geqq d. \tag{6}$$

[1]) Vgl. § 12.

Ferner sei G' irgendein abgeschlossenes Teilgebiet ganz im Inneren von G; wir können es in eine endliche Anzahl von Gebieten

$$B_0, B_1, B_2, \ldots, B_N$$

zerlegen, deren jedes ganz im *Inneren* eines der Kreise K_n liegt. Betrachten wir eines darunter, etwa B_h, welches wir z. B. ganz im Inneren von K_1 annehmen wollen; in B_h einschließlich des Randes konvergieren die geglätteten Funktionen Ω_n und deren Ableitungen gleichmäßig gegen U und die Ableitungen von U; es ist also gewiß

$$D_{B_h}[U] = \lim_{n=\infty} D_{B_h}[\Omega_n].$$

Nun ist auch

$$\lim_{n=\infty} D[\Omega_n - \Phi_n] = 0, \quad \lim_{n=\infty} D_{B_h}[\Omega_n - \Phi_n] = 0,$$

da $\Omega_1, \Phi_1, \Omega_2, \Phi_2, \ldots$ eine Minimalfolge bilden; ferner gilt

$$D_{B_h}[\Omega_n] - D_{B_h}[\Phi_n] = D_{B_h}[\Omega_n - \Phi_n] + 2\,D_{B_h}[\Phi_n, \Omega_n - \Phi_n],$$

und wir haben schließlich zufolge der Relation (5) in § 4

$$\lim_{n=\infty} D_{B_h}[\Phi_n, \Omega_n - \Phi_n] = 0.$$

Also wird

$$D_{B_h}[U] = \lim_{n=\infty} D_{B_h}[\Phi_n]. \tag{7}$$

Da die Relation (7) für jedes der Gebiete B_j ebenso gilt, so haben wir durch Addition

$$D_{G'}[U] = \lim_{n=\infty} D_{G'}[\Phi_n]. \tag{8}$$

Nun ist

$$D_{G'}[\Phi_n] \leqq D[\Phi_n],$$

also

$$D_{G'}[U] \leqq \lim_{n=\infty} D[\Phi_n],$$

daher

$$D_{G'}[U] \leqq d. \tag{9}$$

Indem wir das Teilgebiet G' ausdehnen und gegen G konvergieren lassen, erhalten wir

$$D[U] \leqq d, \tag{10}$$

woraus sich mit Rücksicht auf (6) ergibt

$$D[U] = d, \tag{11}$$

wie zu beweisen war. Durch unsere Funktion U ist also das gestellte Minimumproblem gelöst.

Zum Schluß bemerken wir noch, daß die gewonnene Potentialfunktion u von der Wahl des Radius a des Kreises K_0 ganz unab-

hängig bleibt. Ersetzen wir nämlich den Radius a durch einen andern Radius a^*, zu dem eine entsprechende Funktion S^* und ein Kreis K_0^* definiert wird, so können wir zu jeder der vorhin betrachteten Funktionen neben der Funktion

$$\Phi = \varphi - S \quad \text{auch} \quad \Phi^* = \varphi - S^*$$

bilden. Nun wird, wenn $g = S - S^*$ gesetzt wird und $a^* > a$ ist,

$$D_{K_0^*}[\Phi, g] = 0,$$

wie man sofort erkennt, indem man die *Green*sche Formel auf den Kreis K_0 und den Kreisring zwischen K_0 und K_0^* gesondert anwendet und die Beziehungen (2), (3) § 3, sowie die entsprechenden für K_0^* beachtet. Es ist also

$$D[\Phi^*] = D[\Phi] + D[g].$$

Da der Ausdruck $D[g]$ eine feste, von der Wahl der Funktion φ nicht abhängige Zahl ist, so wird das Minimumproblem $D[\Phi] = \text{Min.}$ und das Minimumproblem $D[\Phi^*] = \text{Min.}$ offenbar durch dieselbe Funktion $\varphi = u$ bzw. durch Funktionen

$$\Phi = u - S = U, \quad \Phi^* = u - S^* = U^*$$

gelöst. In dieser Tatsache liegt die innere Rechtfertigung für unseren Ansatz der Funktion S bei Aufstellung des Minimumproblems.

§ 6. Die Abbildungseigenschaften der Lösung.

Um die Abbildungseigenschaften der Lösung zu erhalten, beachten wir, daß aus der Relation (3) des vorigen Paragraphen sofort folgt

$$D[U, h] = 0, \tag{1}$$

wenn h irgendeine in G stetige Funktion mit stückweise stetigen ersten Ableitungen und endlichem Werte von $D[h]$ ist. Denn wir haben gewiß eine Minimalfolge, wenn wir $\Phi_n = U$ für alle n setzen. Wählen wir speziell die Funktion h so, daß sie in K_0 identisch verschwindet, so können wir statt U auch u schreiben und erhalten

$$D[u, h] = 0. \tag{1a}$$

Zufolge der Schlußbemerkung von § 5 gilt diese Relation überhaupt, sobald nur h in irgendeiner, wenn auch noch so kleinen Umgebung von O identisch verschwindet, da wir den Kreis K_0 ganz im Inneren dieser Umgebung wählen können.

Aus der Gleichung (1a) können wir zunächst schließen, ***daß die analytische Funktion $\zeta = u + iv = f(z)$ in G eindeutig ist***, oder, was wegen der nach Definition feststehenden Eindeutigkeit von u dasselbe bedeutet, daß die zu u konjugierte Potentialfunktion v eindeutig ist.

Ist nämlich C eine in G verlaufende geschlossene, nicht durch O gehende Kurve, so zeigen wir, daß für dieselbe stets die Relation

$$(2)\qquad \int \frac{\partial v}{\partial s}\, ds = \int \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds = 0$$

gilt, wobei wieder unter $\frac{\partial}{\partial s}$ die Differentiation nach der Bogenlänge, unter $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die Differentiation nach der mit geeignetem Sinne versehenen Normale verstanden wird. C teilt G in zwei Gebiete G', G'' ein, in deren einem, G', der Punkt O liegt. Wir wählen die Funktion h in G'' identisch gleich 1, in G' so, daß sie jedenfalls in einer Umgebung von O und ferner in der Umgebung jedes Randpunktes von G, der auch Randpunkt von G' ist, verschwindet, was ohne weiteres möglich ist[1]). Dann ist $D_{G''}[u, h] = 0$, also wegen (1a) sicher $D_{G'}[u, h] = 0$, und wenn wir hier die *Green*sche Formel anwenden, folgt sofort die behauptete Gleichung (2).

Wir wollen nun den nach § 2 plausiblen Satz beweisen: *Die Funktion $\zeta = f(z)$ bildet das n-fach zusammenhängende schlichte Gebiet G auf einen geradlinigen Schlitzbereich $\mathfrak{S}$ ab. Dabei verstehen wir wieder unter einem solchen Schlitzbereich die volle ζ-Ebene, welche längs n geradlinigen, zur reellen Achse parallelen Strecken aufgeschnitten ist.*

Wir betrachten zunächst die Kurven $u =$ konst., die Niveaulinien der Strömung. Ist c eine Konstante, so gilt der Hilfssatz: *Die Niveaulinie $u = c$ teilt das Gebiet G in zwei Teilgebiete G' und G'', in deren einem $u > c$, in deren anderem $u < c$ ist, und die beide den Punkt O auf ihrem Rande haben.* In der Tat geht ja durch den Quellpunkt O für jeden Wert von c eine Kurve $u = c$, welche somit zwei Gebiete G' und G'' der oben charakterisierten Art trennt. Gäbe es nun noch ein weiteres Gebiet G''', welches nur von Randpunkten von G und Punkten auf $u = c$ begrenzt wäre, und welches nicht an den Quellpunkt O heranreichen dürfte[2]), so könnten wir bei hinreichend klein gewähltem Radius a eine Funktion Φ definieren, welche in G''' konstant gleich c ist, während sie sonst in G mit $U = u - S$ übereinstimmt. Diese Funktion ist zulässige Funktion für das Minimumproblem von § 3, und es muß also gelten $D[\Phi] \geq d$; andererseits aber ist offenbar $D[\Phi] < D[U] = d$, da U nicht in G''' konstant sein kann; somit führt die Annahme eines derartigen Gebietes G''' zu einem Widerspruch, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

---

[1]) Wir nehmen etwa h nur in einem schmalen an C angrenzenden Streifen von Null verschieden.

[2]) Im Quellpunkte O und seiner Umgebung bietet die Kurvenschar $u = c$ ja, wie wir sahen, das Bild der Fig. 93, S. 281 (vgl. auch folgende Seite); die Kurvenschar bestreicht also diese Umgebung genau einmal, wenn c von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert.

Wir benutzen ferner die Invarianz des *Dirichlet*schen Integrales gegenüber konformer Abbildung, indem wir in die Formel (1 a) die Koordinaten u und v des Bildbereiches $\mathfrak{S}$ als unabhängige Variable einführen; wegen $u_u = 1$, $u_v = 0$ nimmt die Formel dann die einfache Gestalt an

$$\iint_{\mathfrak{G}} h_u \, du \, dv = 0. \tag{2}$$

Dabei bedeutet h irgendeine in der Umgebung des unendlich fernen Bildpunktes von O im Gebiete $\mathfrak{S}$ verschwindende in $\mathfrak{G}$ sonst stetige und stückweise mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktion, für welche $D_{\mathfrak{G}}[h]$ existiert.

Aus diesen Prämissen können wir leicht schließen, daß $\mathfrak{G}$ wirklich ein Schlitzbereich ist.

Für hinreichend große absolute Werte von c müssen die Kurven $u = c$ geschlossene, durch O gehende Linien sein. Man erkennt dies, wenn man sich nicht auf die früheren Ergebnisse berufen will, daraus, daß das Gebiet $u > c$ bzw. $u < -c$ bei hinreichend großem positiven c mit der Peripherie eines festen in G liegenden Kreises um O wegen der Beschränktheit von u auf dieser Kreisperipherie keine Punkte gemein haben kann, also ganz in diesem Kreise bleiben muß. Umlaufen wir dieses Gebiet G' in positivem Sinne, so wird sich dabei wegen der Relation $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial s}$ die konjugierte Funktion v monoton wachsend ändern, indem sie alle Werte von $v = -\infty$ bis $v = +\infty$ durchläuft, wenn wir vom Punkte O ausgehend zu ihm zurückkehren. Das umkehrbar eindeutige Bild dieser Niveaulinie ist also die volle Gerade $u = c$ in der ζ-Ebene. Wir erkennen daher, indem wir c variieren lassen: Außerhalb eines gewissen Parallelstreifens Π $(u_1 \leqq u \leqq u_2)$, wobei u_1, u_2 geeignete Konstante bedeuten, bedeckt das Gebiet $\mathfrak{G}$ die ζ-Ebene einfach und lückenlos. Alle Randpunkte des Gebiets $\mathfrak{G}$ müssen über dem Parallelstreifen Π der ζ-Ebene liegen.

Wir nehmen zunächst der Deutlichkeit halber an, daß G und somit $\mathfrak{G}$ einfach zusammenhängend sei. Dann muß jede Kurve $u = c$, welche nicht in G geschlossen ist, aus einem einzigen durch O gehenden (und im Inneren von G natürlich nirgends endigenden) Zuge bestehen, da die Existenz eines weiteren Kurvenzuges $u = c$ sofort zu einem Widerspruch mit unserem Hilfssatze führen würde. Durchlaufen wir diesen Kurvenzug in einem Sinne, so muß sich wieder der Bildpunkt in der ζ-Ebene auf der Geraden $u = c$ monoton bewegen, wobei er den unendlich fernen Punkt, das Bild von O, passiert. Das umkehrbar eindeutige Bild der Kurve $u = c$ besteht also aus zwei Stücken der Geraden $u = c$, von denen das eine nach $v = +\infty$, das andere nach $v = -\infty$ ins Unendliche reicht, und die möglicherweise sich teilweise überdecken könnten. Der Bildbereich $\mathfrak{G}$

bedeckt also auch im Streifen Π die Ebene nirgends mehr als zweimal und muß den in der Fig. 110 gezeichneten Typus haben. Wir bezeichnen den Rand von $\mathfrak{S}$ mit Σ und wollen zeigen, daß Σ ein zur u-Achse paralleler Schlitz ist. Gäbe es nämlich auf Σ zwei Punkte mit verschiedenen v-Koordinaten v_1 und v_2, so können wir durch Angabe einer geeigneten Funktion h sofort einen Widerspruch zu Gleichung (2) konstatieren.

Zu diesem Zwecke betrachten wir außerhalb des Streifens Π, etwa rechts von ihm, in $\mathfrak{S}$ eine Strecke $A_1 A_2$, so daß die Punkte A_1 und A_2 beide dieselbe Koordinate $u = c > u_2$ und die v-Koordinaten v_1 und v_2 besitzen. Ziehen wir dann von A_1 und A_2 nach

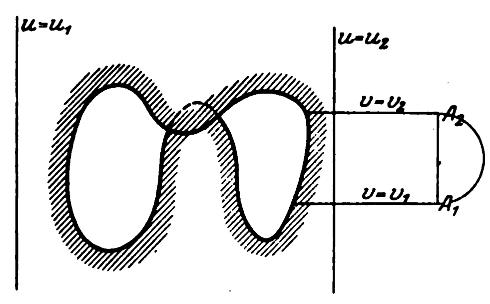


Fig. 110.

links die Geraden $v = v_1$ und $v = v_2$, soweit sie in $\mathfrak{S}$ verlaufen, dann müssen diese Geraden sicherlich den Rand Σ treffen und mit diesem und der Strecke $A_1 A_2$ zusammen jedenfalls ein an diese Strecke angrenzendes Gebiet $\mathfrak{S}'$ begrenzen[1]). Wir betrachten nun irgendeine Funktion $g(v)$ von v im Intervalle $v_2 \leqq v \leqq v_1$, von der wir voraussetzen, daß sie für $v = v_1$, $v = v_2$ null ist, aber nicht identisch verschwindet und daß sie nirgends negativ wird, z. B. $g(v) = (v - v_1)^2 (v - v_2)^2$. Wir definieren in dem Gebiete $\mathfrak{S}'$ überall $h(u, v) = g(v)$; ferner schlagen wir über $A_1 A_2$ den Halbkreis nach rechts und denken uns h in diesen Halbkreis so fortgesetzt, daß h auf dem Rande überall

[1]) Will man, um sich diese Tatsache einsichtig zu machen, die anschauliche Bezugnahme auf die Begrenzungsmannigfaltigkeit Σ vermeiden, so verfährt man zweckmäßig folgendermaßen. Man faßt in der auf S. 329 geschilderten Art G als Limes von ineinander geschachtelten Bereichen $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_j \ldots$ auf, deren jeder von einer stückweise glatten Kurve C_j begrenzt ist. Das Bild $\mathfrak{S}_j$ des Gebietes G_j über der ζ-Ebene wird dann ebenfalls von einer stückweise glatten Kurve Σ_j begrenzt sein. Wenn auf Σ zwei Punkte mit $v = v_1$ und $v = v_2$ liegen, so müssen bei hinreichend großem j die beiden von den Punkten A_1 und A_2 aus gezogenen Geraden $v = v_1$, $v = v_2$ sicherlich auch jede Kurve C_j treffen und werden mit dieser zusammen ein Gebiet $\mathfrak{S}_j'$ definieren, das an $A_1 A_2$ anschließt; unter $\mathfrak{S}'$ haben wir dann den Limes der ineinander geschachtelten Gebiete $\mathfrak{S}_j'$ zu verstehen.

verschwindet, etwa, indem wir h auf allen vom Mittelpunkt gleich weit entfernten Punkten denselben Wert beilegen. Den Halbkreis und $\mathfrak{G}'$ fassen wir zu einem Gebiete $\mathfrak{G}^*$ zusammen und setzen außerhalb $\mathfrak{G}^*$ überall in $\mathfrak{G}$ die Funktion h gleich Null. Nun ist für diese Funktion h offenbar

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} h_u \, du \, dv = \iint\limits_{\mathfrak{G}^*} h_u \, du \, dv = -\int\limits_{v_1}^{v_2} g(v) \, dv,$$

also sicherlich im Gegensatze zu der Gleichung (2) nicht Null, wenn wirklich v_1 und v_2 verschieden sind. Mithin ist bewiesen, daß alle Punkte von Σ auf einer zur u-Achse parallelen Strecke liegen, d. h. aber, daß $\mathfrak{G}$ wirklich ein Schlitzbereich der charakterisierten Art ist.

Wenn der Bereich G mehrfach, etwa n-fach zusammenhängt, erleiden unsere Schlüsse nur unwesentliche Modifikationen. Wir betrachten wieder eine in G nicht geschlossene Kurve $u = c$ und das von ihr begrenzte Gebiet G', in welchem $u > c$ ist. Die Berandung dieses Gebietes muß, abgesehen von Teilen des Randes von G, aus einem oder mehreren zusammenhängenden Stücken unserer Kurve $u = c$ bestehen; jedes dieser Stücke definiert einen Querschnitt des Gebietes G im Sinne der Definition auf S. 324; da nun G (ebenso wie die Approximationsgebiete G_j) n-fach zusammenhängt, so kann die Anzahl dieser Stücke nicht größer als n sein; denn sonst gäbe es mindestens n solche Querschnitte, welche den Punkt O nicht enthalten, und diese müßten für sich schon das Gebiet G zerlegen, so daß es ein Gebiet $u > c$ gäbe, welches O nicht als Randpunkt hat.

Durchlaufen wir jedes der Kurvenstücke $u = c$, so daß das Gebiet G' zur Linken bleibt, dann wird sich dabei v monoton wachsend ändern, so daß jedes dieser Stücke umkehrbar eindeutig auf ein Stück der Geraden $u = c$ über der ζ-Ebene abgebildet wird; dem Stück durch O entsprechen zwei Geradenstücke, welche nach $v = +\infty$ bzw. $v = -\infty$ ins Unendliche reichen. Sicherlich wird also in dem Streifen Π die ζ-Ebene von dem Bilde $\mathfrak{G}$ des Gebietes G nirgends mehr als $n + 1$-mal überdeckt werden.

Wir bezeichnen die n zusammenhängenden Randstücke von $\mathfrak{G}$ mit $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ und behaupten, daß sie sich sämtlich auf geradlinige zur u-Achse parallele Schlitze reduzieren. Der Beweis verläuft genau so wie im Falle $n = 1$. Ist Σ ein Begrenzungsstück von $\mathfrak{G}$, auf welchem es Punkte mit zwei verschiedenen v-Koordinaten v_1, v_2 gibt, so können wir genau dieselbe Konstruktion der Funktion h vornehmen wie vorhin. Wesentlich ist dabei nur, daß die Gerade $A_1 A_2$ und die beiden durch die Punkte A_1 und A_2 gezogenen Geraden $v = v_1$, $v = v_2$ zusammen mit dem Begrenzungsstück Σ, — bzw. gegebenenfalls mit einem anderen Randstück Σ', welches ebenfalls Randpunkte mit Ordinaten v_1 und v_2 besitzt und sich zwischen $A_1 A_2$ und

Σ einschiebt — ein Gebiet $\mathfrak{S}'$ begrenzt[1]). Es ergibt sich so, daß die Annahme $v_1 \neq v_2$ nicht haltbar ist, und daß somit alle Randstücke Σ_i Schlitze der in Frage stehenden Art sind. Der gewünschte Nachweis ist damit vollständig erbracht.

Wir haben in den vorangehenden Betrachtungen stets angenommen, daß es überhaupt Kurven $u =$ konst. gibt, welche in G nicht geschlossen sind. Sollten alle Äquipotentialkurven geschlossen sein, so muß das *Bild* $\mathfrak{S}$ offenbar *aus der vollen Ebene* ohne Randpunkte bestehen. Dann aber kann auch G keinen Rand besitzen, d. h. *G ist die volle z-Ebene.*

§ 7. Die Abbildung am Rande.

Wir haben unsere Gebiete als offene Gebiete vorausgesetzt und uns demgemäß zunächst nur für die umkehrbar eindeutige Abbildung des *Inneren* auf das *Innere* des Schlitzbereiches interessiert. Jedoch gelingt es leicht, die Abbildung noch bis auf den Rand zu verfolgen. Um das Ergebnis der anzustellenden Betrachtung gleich mit voller Allgemeinheit formulieren zu können, unterscheiden wir zwei Kategorien von Randpunkten: *erreichbare und unerreichbare Randpunkte.* Wir nennen einen Randpunkt P erreichbar, wenn er Endpunkt eines stetigen Kurvenstückes E ist, dessen sämtliche übrigen Punkte im Inneren von G liegen. Alle anderen Randpunkte heißen unerreichbar. *Jedes, von stückweise glatten Kurven begrenzte Gebiet hat nur erreichbare Randpunkte*[2]). Beispiele für das Auftreten unerreichbarer Randpunkte geben die nebenstehenden Figuren; in Fig. 111 ist das Rechteck $ABCD$ durch unendlich viele, abwechselnd von der Seite AB und CD ausgehende, gegen die Seite BC sich häufende geradlinige Einschnitte modifiziert, wodurch alle Randpunkte auf BC unerreichbar werden, ohne daß der einfache Zusammenhang verloren geht; in Fig. 112 windet sich das Gebiet asymptotisch um eine Grenzkurve A. In beiden Fällen kann jedenfalls zufolge der früheren Ergebnisse das Innere noch auf das Innere des Einheitskreises umkehrbar eindeutig und konform abgebildet werden, was zunächst völlig paradox erscheinen mag.

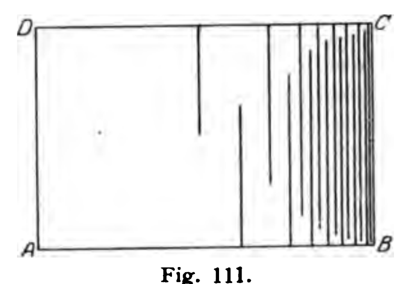


Fig. 111.

---

[1]) Die Definition des Gebietes $\mathfrak{S}'$ kann hier genau ebenso wie in Anm. S. 347 ohne anschauliche Bezugnahme auf die Begrenzungsmannigfaltigkeiten $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ gegeben werden.

[2]) In der Tat folgt dies sofort aus der Existenz einer ins Innere weisenden Normalen, die zur Definition von E benutzt werden kann.

Jeder erreichbare nicht isolierte Randpunkt P hat folgende anschaulich einleuchtende Eigenschaft: Ein hinreichend kleiner, mit dem Radius r um P geschlagener Kreis schneidet aus G ein Teilgebiet K_r heraus, welches den Punkt P auf seiner Begrenzung enthält und dessen volle Begrenzung aus einem Teile der Kreisperipherie sowie einem Teil des P enthaltenden Randstückes Γ besteht. Um dies ohne Berufung auf die Anschauung einzusehen, brauchen wir nur zu beachten, daß eine in G gelegene und in P endigende stetige Kurve, vom Randpunkt P aus nach dem Inneren von G verfolgt, jedenfalls bei hinreichend kleinem r einmal aus dem Kreise austreten muß; indem man die Kreisperipherie von dem Austrittspunkt nach beiden Seiten bis zum ersten Schnittpunkt mit Γ verfolgt — ein solcher Schnittpunkt muß bei hinreichend kleinem r wegen des Zusammenhanges des Randstückes Γ sicherlich existieren —, erhalten wir einen beiderseits auf Γ endigenden Querschnitt, welcher das fragliche Gebiet K_r definiert.

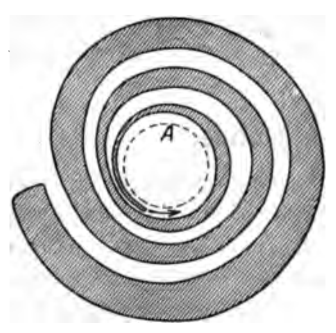


Fig. 112.

Wir wollen ferner beachten, daß unter Umständen (z. B. wenn G ein Schlitzbereich ist) zwei verschieden zu rechnende Randpunkte demselben Wert von z in der Zahlenebene zugehören können. Wir wollen nämlich einen *erreichbaren* Randpunkt P *mehrfachen Randpunkt* nennen, wenn man bei hinreichend kleinem r zu P verschiedene Gebiete K_r konstruieren kann, welche voneinander getrennt liegen. Indem wir einen solchen mehrfachen Randpunkt wie mehrere verschiedene einfache rechnen, können wir sagen, daß auf jedem zwei verschiedene erreichbare Randpunkte P', P'' verbindenden Querschnitt Punkte existieren, deren geradlinige Entfernung oberhalb einer nur von P' und P'' abhängigen positiven Schranke bleibt. Wenn wir ferner sagen, daß eine Punktfolge $P_1, P_2, P_3, \ldots$ von inneren Punkten des Gebietes gegen einen erreichbaren Randpunkt P konvergiert, so meinen wir, daß es eine Folge von *ineinandergeschachtelten* zum Randpunkt P gehörigen Gebieten K_r mit unbegrenzt abnehmenden Radius r gibt, deren jedem alle Punkte P_i mit endlich vielen Ausnahmen angehören.

Nunmehr sprechen wir den folgenden Satz aus: *Bei der konformen Abbildung von G auf einen Schlitzbereich $\mathfrak{S}$ entspricht jedem erreichbaren Randpunkte von G ein bestimmter Randpunkt des Schlitzbereiches. Zwei verschiedenen erreichbaren Randpunkten von G entsprechen verschiedene Randpunkte des Schlitzbereiches. Ist speziell G ein Bereich mit lauter erreichbaren Randpunkten, so bleibt die im Inneren konforme Abbildung auch am Rande noch umkehrbar eindeutig und stetig.*

Zum Beweise des Satzes betrachten wir einen erreichbaren Randpunkt P und in seiner Umgebung zwei Punkte P_1 und P_2 von G, welche ganz im Inneren des oben definierten zum hinreichend kleinen Kreisradius ε gehörigen Gebietes K_ε liegen und den Werten z_1, z_2 entsprechen mögen. Wir betrachten die Differenz $f(z_1) - f(z_2) = u_1 - u_2 + i(v_1 - v_2)$. Wegen der Konstanz der Randwerte von v wird der Betrag $|f(z_1) - f(z_2)|$ bei hinreichend kleinem ε annähernd gleich dem Betrage $|u_1 - u_2|$. Es gilt also gewiß, wenn $\delta = \delta(\varepsilon)$ eine geeignete positive, mit ε gegen Null strebende, nur von ε abhängige Zahl ist,

$$(1) \qquad |f(z_1) - f(z_2)| \leqq |u_1 - u_2| + \delta.$$

Nun müssen die durch P_1, P_2 gehenden Äquipotentialkurven $u = u_1$, $u = u_2$ sicherlich aus dem Gebiete K_r austreten, wenn r zwischen ε und einem geeigneten fest gewählten Werte $R > \varepsilon$ liegt, wobei K_R den Quellpunkt O außerhalb läßt (Fig. 113). Denn alle diese Äquipotentialkurven müssen, dem Verlaufe ihrer Bildgeraden entsprechend, entweder in den Quellpunkt O oder nach einem von Γ verschiedenen Randstück von G führen. Es muß daher auf den Begrenzungskreisbögen der K_r die Schwankung des Realteiles u von $f(z)$ mindestens gleich $|u_1 - u_2|$ sein; also gibt es erst recht zwei Punkte z', z'' auf dieser Kreisperipherie, so daß

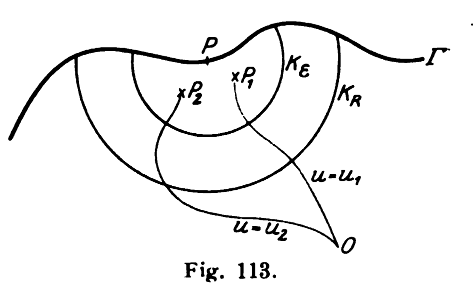


Fig. 113.

$$\left|\int_{z'}^{z''} f'(z)\,dz\right| = |f(z') - f(z'')| \geqq |u_1 - u_2|$$

wird, und somit gilt weiter, wenn wir Polarkoordinaten r, ϑ um P einführen,

$$(2) \qquad \int |f'(z)|\, r\, d\vartheta \geqq |u_1 - u_2|,$$

wobei dieses Integral über den Begrenzungskreisbogen von K_r oder einen geeigneten Teil desselben erstreckt wird. Mit Rücksicht auf (1) haben wir also nach Anwendung der *Schwarz*schen Ungleichheit (9) aus § 4

$$(|f(z_1) - f(z_2)| - \delta)^2 \leqq \int |f'(z)|^2\, r\, d\vartheta \cdot 2 r \pi.$$

Indem wir diese Relation durch r dividieren und sodann nach r von ε bis R integrieren, erhalten wir

$$(3) \qquad \begin{cases} \lg\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) \cdot (|f(z_1) - f(z_2)| - \delta)^2 \leqq 2\pi \iint |f'(z)|^2\, r\, dr\, d\vartheta \\ \qquad \leqq 2\pi \iint\limits_{K_R} |f'(z)|^2\, r\, dr\, d\vartheta. \end{cases}$$

Hierbei ist die rechte Seite gerade der Flächeninhalt des Bildes unseres Gebietes K_R; dieser Flächeninhalt ist gewiß eine feste von ε unabhängige Schranke M; denn sobald, was wir voraussetzen, O außerhalb K_R liegt, wird ja der Flächeninhalt des Bildbereiches von K_R endlich. Also erhalten wir aus (3)

$$(4) \qquad |f(z_1) - f(z_2)| \leqq \sqrt{2\pi M \frac{1}{\lg R - \lg \varepsilon}} + \delta,$$

und hierin steckt der erste Teil unseres Satzes, nämlich daß $f(z)$ für jeden erreichbaren Randpunkt gegen einen festen Grenzwert konvergiert; gleichzeitig gibt (4) eine genauere Aussage über die Schärfe dieser Konvergenz bei abnehmendem ε.

Genau analog folgt der zweite Teil des Satzes, nämlich, daß zwei verschiedenen Randpunkten P_1, P_2 desselben Randstückes Γ zwei verschiedene Punkte R_1, R_2 eines Schlitzes Σ entsprechen müssen.

Es seien nämlich P_1, P_2 zwei verschiedene erreichbare Randpunkte auf dem Randstück Γ, welches wir der Kürze halber ganz im Endlichen liegend annehmen mögen, und E_1, E_2 zwei Einschnitte der oben charakterisierten Art, welche nach P_1, P_2 hinführen (Fig. 114). Wäre das Bild beider Randpunkte P_1, P_2 derselbe Randpunkt T auf dem Schlitze Σ,

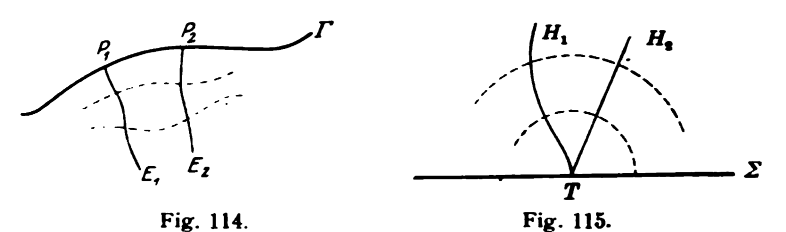


Fig. 114. Fig. 115.

so müßten die Bildkurven H_1, H_2 von E_1, E_2 beide, aus dem Inneren des Schlitzbereiches kommend, in T endigen (Fig. 115). Schlagen wir um T die konzentrischen Kreise mit hinreichend kleinen Radien r, so muß, (wofern P_1, P_2 wirklich verschiedene Randpunkte sind), da die Kurven H_1, H_2 aus jedem dieser Kreise austreten, für die inverse Funktion $z(\zeta)$ der Ausdruck $|z(\zeta') - z(\zeta'')|$ oberhalb einer festen positiven von r unabhängigen Schranke liegen, wenn ζ' und ζ'' geeignete Punkte auf dem Kreisbogen vom Radius r sind. Denn die Bilder dieser Kreisbögen müssen bei hinreichend kleinem r beiden Randpunkten P_1 und P_2 beliebig nahe kommen und mit Stücken der Linien E_1 und E_2 zusammen einen Querschnitt von G bilden, der P_1 und P_2 verbindet. Genau derselbe Schluß wie oben lehrt nun, daß dies mit der Endlichkeit des Flächeninhaltes von G, dem durch die Funktion $z(\zeta)$ charakterisierten Bildbereich von $\mathfrak{S}$, unverträglich ist. Also müssen die Punkte P_1, P_2 identisch sein.

Aus dem Bewiesenen folgt, daß für Bereiche mit lauter erreichbaren Randpunkten — und dies sind wohl die meisten praktisch vorkommenden — die Zuordnung der Ränder noch umkehrbar eindeutig bleibt. Daß sie auch stetig ist, ergibt sich nun ebenfalls unmittelbar. Denn andernfalls gäbe es z. B. auf einem Schlitz Σ Punktepaare T'_m, T''_m ($m = 1, 2, 3, \ldots$), welche selbst gegen einen bestimmten Punkt T konvergieren, während ihre Bildpunkte P'_m, P''_m sich nicht gegen denselben Grenzpunkt von G häufen; dies aber kann nicht eintreten, denn es müssen nach dem oben Bewiesenen den Punkten T'_m, T''_m bei hinreichend großem m sicherlich Bildpunkte in beliebiger Nähe des Bildpunktes P von T entsprechen.

Wir können für solche Gebiete das Ergebnis auch so formulieren: *Bei der konformen Abbildung eines Gebietes mit lauter erreichbaren Randpunkten auf ein ebensolches ist die Abbildungsfunktion im ganzen Gebiete — höchstens mit Ausnahme des unendlich fernen Punktes bzw. seines Bildes — gleichmäßig stetig.*

Treten unerreichbare Randpunkte auf wie in Fig. 111 die Linie BC oder in Fig. 112 die Kurve A, so definieren wir einfachste Bestandteile des Randes, **„Primenden"**, folgendermaßen: Es seien $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, eine Folge einander nicht treffender Querschnitte von G, so daß alle Punkte von Q_h mit wachsendem h gegen einen festen Randpunkt P von G konvergieren und daß die Q_h eine Folge ineinander geschachtelter P auf ihrem Rande enthaltender Teilgebiete G_h von G bestimmen. Die Menge der allen G_h gemeinsam angehörigen Randpunkte bildet dann ein Primende von G. Die Linien BC und A in unseren Beispielen sind solche Primenden. Eine ganz geringfügige Modifikation unserer obigen Betrachtung, welche wir dem Leser überlassen können, liefert dann die Erweiterung unseres Satzes: *Die Primenden von G und die Randpunkte des Schlitzbereiches sind umkehrbar eindeutig einander zugeordnet*[1]).

§ 8. Erweiterung der vorangehenden Resultate.

Die Ergebnisse der vorangehenden Paragraphen lassen eine Verallgemeinerung und Erweiterung in verschiedener Hinsicht zu. Zunächst bemerken wir, daß die Konstruktion unserer Potentialfunktion u keineswegs abhängig war von der Voraussetzung, daß G ein über der Ebene einfach ausgebreiteter „schlichter" Bereich ist. *Der Bereich G darf*

[1]) Die Klärung der im § 7 behandelten Fragen verdankt man *Osgood* und vor allem *Carathéodory*, welcher insbesondere die Bedeutung der Primenden erkannte (Math. Annalen, Bd. 73). Die hier gegebene Darstellung schließt sich an Arbeiten des Verfassers an.

ein beliebiger endlich- oder unendlichvielblättriger, berandeter oder unberandeter, als Riemannsche Fläche über der z-Ebene ausgebreiteter Bereich sein. Denn jeder solche wie früher als offen zu betrachtende Bereich läßt sich in der nach § 5 geforderten Weise mit einer Folge von Kreisen $K_0, K_1, K_2, \ldots$ überdecken. Wir werden nämlich entsprechend den Festsetzungen in § 3 den Bereich G, mag er endlich viele oder unendlich viele Blätter über der z-Ebene aufweisen, als Limes einer Folge ineinandergeschachtelter abgeschlossener, mit stückweise glatten Randkurven versehenen Bereichen G_h $(h = 1, 2, 3, \ldots)$ auffassen, wobei jeder der Bereiche G_h nur endlich viele Blätter aufweist, d. h. die Ebene überall nur endlich oft überdeckt.

Diejenigen Verzweigungspunkte P in G, in denen nur endlich viele Blätter, etwa m, zusammenhängen, dürfen wir dabei als innere Punkte mitzählen; wir müssen dann unter den Kreisen K_i des § 5 zu dem Punkt P einen, K_j, so definieren, daß er kein gewöhnlicher schlichter Kreis, sondern eine m-mal überdeckte Kreisscheibe mit P als Mittelpunkt wird. Vermöge einer konformen Abbildung der Form $z^{\frac{1}{m}} = z' = x' + iy'$ können wir diese m-fache Kreisscheibe auf eine gewöhnliche schlichte abbilden; da wir für diese die Randwertaufgabe der Potentialtheorie und die zugehörige Minimumsaufgabe aus § 4 lösen können, so gilt dasselbe sofort auch für die mehrfach überdeckte Kreisscheibe; denn einerseits bleibt eine Potentialfunktion als Realteil einer analytischen Funktion auch nach einer konformen Abbildung Potentialfunktion in den neuen Koordinaten; andererseits ändert sich bei konformer Abbildung das Integral $D[\Phi]$ nicht. Nach dieser Bemerkung bleibt der Gang der Überlegung zur Konstruktion von u hier wörtlich derselbe wie in § 5.

Bezüglich der konjugierten Funktion v bleiben ebenfalls alle Schlüsse dieselben wie vorher. Insbesondere schließen wir, *daß v eindeutig in G bleibt, wenn jede ganz in G verlaufende geschlossene Kurve C das Gebiet G in zwei Teilgebiete zerlegt.* (Daß dies nicht immer der Fall zu sein braucht, werden wir später noch sehen.) Ein solcher Bereich heißt **„schlichtartig“.**

Es gilt nun der folgende schon sehr allgemeine Satz: *Jeder schlichtartige endlich vielfach zusammenhängende Bereich G mit endlich oder unendlich vielen Blättern wird durch unsere Funktion*

$$\zeta = u + iv = f(z)$$

auf einen geradlinigen Schlitzbereich $\mathfrak{S}$ der ζ-Ebene umkehrbar eindeutig und konform abgebildet. Ausnahmsweise kann das Bild $\mathfrak{S}$ aus der ganzen unberandeten ζ-Ebene bestehen.

Der Beweis unseres Satzes ist vollständig in § 6 enthalten; denn dort ist nirgends die Schlichtheit oder die Endlichkeit der Blätteranzahl benutzt worden.

Es bleibt nur übrig, den *Ausnahmefall* näher zu charakterisieren, daß $\mathfrak{S}$ aus der *vollen ζ-Ebene* besteht. Dann muß die Umkehrfunktion $z = \psi(\zeta)$ von $f(z)$ in der vollen Ebene definiert und eindeutig sein und kann, da jedem Werte von ζ ein bestimmter innerer Punkt von G entsprechen muß, als Singularitäten nur Pole besitzen, also gewiß auch nur endlich viele. Daher ist $\psi(\zeta)$ eine rationale Funktion, etwa vom m-ten Grade, und *G ist die zu dieser Funktion gehörige geschlossene m-blättrige Riemannsche Fläche über der z-Ebene.*

Viel schwieriger ist die Frage, was es für das Gebiet G bedeutet, wenn einer der Schlitze von $\mathfrak{S}$ sich auf einen Punkt reduziert. Ist $n = 1$, und wird dieser Grenzpunkt durch eine lineare Transformation ins Unendliche verlegt, so haben wir in der Umkehrfunktion $\psi(\zeta)$ eine ganze (transzendente oder rationale) bzw. allgemeiner meromorphe Funktion vor uns; wir werden so auf die Problemstellungen im Sinne des *Picard*schen Satzes verwiesen; doch sind die betreffenden Fragen noch nicht restlos geklärt.

Unsere Ergebnisse sind noch in einer Richtung einer Erweiterung fähig. Wir können nämlich unter Beibehaltung der Voraussetzung der Schlichtartigkeit dem Bereiche G erlauben, *unendlich vielfach zusammenhängend* zu sein, d. h. unendlich viele Querschnitte zu gestatten, ohne in Teile zu zerfallen. Wir werden einen solchen Bereich definieren als Limes einer Folge von Bereichen G_j, deren jeder endlich vielfach zusammenhängend ist. Auch ein solcher Bereich G wird durch unsere Funktion $\zeta = f(z) = u + iv$ auf einen schlichten Bereich und zwar einen, nunmehr von *unendlich vielen* Schlitzen begrenzten geradlinigen Schlitzbereich abgebildet. Wir wollen dieses Resultat, welches man direkt durch eine Verfeinerung der Überlegungen von § 6 erhalten könnte, im nächsten Paragraphen auf Grund eines allgemeinen, auch für sich wichtigen Satzes über die Funktionen $f(z)$ ableiten.

Daß die Sätze über Ränderzuordnung aus § 7 keineswegs an die Schlichtheit des Bereiches G gebunden sind, bedarf kaum einer besonderen Hervorhebung.

§ 9. Die Stetigkeit der Abbildungsfunktion in ihrer Abhängigkeit vom Gebiet. Allgemeines Uniformisierungsprinzip.

Wir beweisen für unsere Abbildungsfunktionen folgende Eigenschaft, welche wir als die *Stetigkeit der Abhängigkeit vom Gebiet G* bezeichnen könnten:

Es sei das schlichtartige Gebiet G der Limes einer Folge ineinandergeschachtelter Gebiete G_j, deren jedes den Punkt O $(z = 0)$ ent-

halten möge; es seien $f_j(z) = u_j + iv_j$ unsere Abbildungsfunktionen für G_j, welche sich im Punkte O verhalten wie $\frac{1}{z}$, dann konvergieren die Funktionen $f_j(z)$ in jedem O ausschließenden in G liegenden abgeschlossenen Teilgebiet $\overline{G}$ von G gleichmäßig gegen die Abbildungsfunktion $f(z)$ von G.

Wir definieren zum Beweise mit einer allen G_j gemeinsamen Funktion S (vgl. § 3)

$$U_j = u_j - S, \quad U = u - S.$$

Ferner schreiben wir $D_j[\Phi]$ statt $D_{G_j}[\Phi]$ und setzen

$$d_j = D_j[U_j]. \tag{1}$$

Diese Zahlen d_j sind die Minimumswerte für die betreffenden Minimumprobleme im Sinne von § 5. Sicherlich gilt für jedes j

$$d_j \leqq d. \tag{2}$$

Denn wegen der Minimumeigenschaft von U_j für G_j gilt

$$d_j = D_j[U_j] \leqq D_j[U] \leqq D[U] = d.$$

Ebenso folgt für $k > j$ wegen

$$D_j[U_j] \leqq D_j[U_k] \leqq D_k[U_k] = d_k$$

die Beziehung

$$d_j \leqq d_k \qquad (j < k). \tag{3}$$

Mithin existiert

$$\lim_{j=\infty} d_j = d^* \leqq d. \tag{4}$$

Ferner haben wir zufolge Gleichung (1) aus § 6 für jede in G_j stetige, mit stückweise stetigen ersten Ableitungen und endlichem $D_j[h]$ versehene Funktion h die Gleichung $D_j[U_j, h] = 0$. Wir setzen speziell $h = U_k - U_j$ und schließen dann aus der Beziehung

$$d_k = D_k[U_k] \geqq D_j[U_k] = D_j[U_j + h] = D_j[U_j] + D_j[h]$$
$$= d_j + D_j[U_k - U_j],$$

daß bei hinreichend großem j und k das Integral $D_j[U_k - U_j]$ beliebig klein wird. Es gilt also sicher für jedes feste im Inneren von G liegende Teilgebiet $\overline{\overline{G}}$

$$\lim_{\substack{k=\infty \\ j=\infty}} D_{\overline{\overline{G}}}[U_k - U_j] = 0. \tag{5}$$

Aus Hilfssatz I a in § 4 und der Voraussetzung $U = 0$ in O folgt nunmehr in $\overline{G}$ die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen U_j bzw. das Entsprechende für die Potentiale u_j und somit für die analytischen Funktionen $f_j(z)$.

Wir nennen die Grenzfunktionen U^* bzw. u^*, $f^*(z)$, Da die Konvergenz auch für die Ableitungen gleichmäßig bleibt, so ist wegen (1), (2), (4)

$$D_{\overline{G}}[U^*] = \lim_{j=\infty} D_{\overline{G}}[U_j] \leqq d^* \leqq d.$$

Da $\overline{G}$ ein beliebiges inneres Teilgebiet von G ist, so folgt hieraus sofort die Existenz von $D[U^*]$ und zwar genauer die Relation

$$D[U^*] \leqq d. \tag{6}$$

Wäre $D[U^*] < d$, so hätte das Minimumproblem für G, entgegen der Voraussetzung, nicht U zur Lösung, da man einen kleineren Wert des *Dirichlet*schen Integrales als $D[U] = d$ durch eine zulässige Funktion U^* erzielen könnte. Also ist $D[U^*] = d = d^*$, und U^* stellt eine[1]) Lösung des Minimumproblems für G dar; wir können also setzen

$$U^* = U \tag{7}$$

und haben damit unseren Satz bewiesen.

Wir benutzen diesen Satz, um die konforme Abbildung des Gebietes G zu studieren, welche von der Funktion $f(z)$ vermittelt wird, wenn G zwar *schlichtartig*, aber *unendlich vielfach zusammenhängend* ist (man denke etwa an die z-Ebene, welche mit unendlich vielen Löchern oder Einschnitten versehen ist). Die Gebiete G_j seien alle endlich vielfach zusammenhängend. Dann ist das durch die Funktion $\zeta = f_j(z)$ entworfene Bild $\mathfrak{S}_j$ von G_j jedenfalls ein schlichter Bereich, nämlich ein Schlitzbereich. Zwei getrennten Gebieten G', G'', welche ganz in G_j liegen und in deren Innerem zwei Punkte P' bzw. P'' fixiert sein mögen, werden also in der ζ-Ebene getrennte Gebiete $\mathfrak{S}_j'$, $\mathfrak{S}_j''$ entsprechen; wegen der Konvergenz der Funktionen $f_j(z)$ werden also die Gebiete G', G'' durch die Funktion $\zeta = f(z)$ ebenfalls auf Gebiete $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$ über der ζ-Ebene abgebildet, die einander jedenfalls nicht überdecken; den zwei, in G beliebig wählbaren getrennten Punkten P', P'' entsprechen daher als inneren Punkten von G' bzw. G'' vermittels der Funktion $\zeta = f(z)$ sicher verschiedene Werte von ζ; oder mit anderen Worten, der Bildbereich $\mathfrak{S}$ von G ist schlicht. Wir haben damit den Satz bewiesen: *Jedes schlichtartige Gebiet läßt sich umkehrbar eindeutig und konform auf ein schlichtes Gebiet abbilden.*

Dieser merkwürdige Satz heißt nach *Koebe* das *allgemeine Uniformisierungsprinzip*, eine Bezeichnung, welche später durch § 13 verständlich werden wird.

[1]) Daß es keine andere Lösung geben kann, besagt der Satz des nächsten Paragraphen.

Nachdem die Schlichtheit des Bereiches $\mathfrak{S}$ erkannt ist, liefern die Überlegungen von § 6 ohne Modifikation das weitere übrigens später hier nicht benutzte *Resultat, daß $\mathfrak{S}$ wieder ein geradliniger Schlitzbereich sein muß,* d. h. von geradlinigen zur u-Achse parallelen Strecken begrenzt ist, indem jede zusammenhängende Punktmenge Σ von Randpunkten des Bereiches $\mathfrak{S}$ konstante Ordinaten v besitzt.

§ 10. Der Eindeutigkeitssatz für die Abbildung.

Wir können den Punkt O und die Richtung der x-Achse im Bereiche G, den wir wieder als n-fach zusammenhängend annehmen, beliebig wählen, und die Funktion $f(z)$ mit einer beliebigen reellen von Null verschiedenen Konstanten multipliziert denken. Wir erhalten so zu jeder Stelle O $(z = z_0)$ von G und jeder komplexen Zahl α eine „*Strömungsfunktion*“ $\zeta = f(z) = u + iv$, welche überall in G außer in O regulär ist, für die $f(z) - \frac{\alpha}{z - z_0}$ in O regulär bleibt, und durch welche das Gebiet G auf einen Schlitzbereich der ζ-Ebene abgebildet wird. *Wir behaupten, daß durch diese Eigenschaften die Funktion $\zeta = f(z)$ bis auf eine willkürliche additive Konstante eindeutig bestimmt ist.* In der Tat nehmen wir an, $\zeta^* = u^* + iv^*$ sei eine zweite solche Funktion von z, dann ist $\zeta^* = u^* + iv^* = \varphi(\zeta)$ eine analytische Funktion von $\zeta = u + iv$, welche einen Schlitzbereich $\mathfrak{S}$ der ζ-Ebene auf einen Schlitzbereich $\mathfrak{S}^*$ der ζ^*-Ebene konform abbildet und sich im Unendlichen verhält wie $\zeta +$ regulärer Funktion. Wir bilden für die Differenz

$$\eta = \zeta^* - \zeta = p + iq = (u^* - u) + i(v^* - v) = \psi(\zeta)$$

das über den Bereich S erstreckte Integral

$$D[p] = \iint_{\mathfrak{S}} |\psi'(\zeta)|^2 \, du \, dv,$$

indem wir beachten, daß wir wegen der Regularität von $\psi(\zeta)$ über den Punkt $\zeta = \infty$ der ζ-Ebene ohne weiteres hinweg integrieren dürfen[1]). Formen wir nach der *Green*schen Formel um und beachten, daß $\Delta p = 0$ in G ist, daß ferner die zu p konjugierte Potentialfunktion q an jedem Schlitz konstante Randwerte besitzen muß, so folgt $D[p] = 0$, und hieraus die Konstanz von p und damit die von η.

Wir können auch folgendermaßen schließen: Die Funktion $\eta(\zeta)$ ist überall im Schlitzbereich $\mathfrak{S}$ regulär und absolut genommen beschränkt; sie bildet den Bereich $\mathfrak{S}$ auf einen über der η-Ebene ausgebreiteten Bereich T ab, dessen Randpunkte wegen der Konstanz der Randwerte von q auf jedem Schlitz Σ von $\mathfrak{S}$ selbst n Schlitze, d. h. geradlinige Stücke bilden müssen. Das Gebiet T liegt ganz im

[1]) Vgl. Kap. 3, § 3, S. 287.

Endlichen. Besäße es einen inneren Punkt P, so könnten wir von diesem aus über der η-Ebene eine beispielsweise aus endlich vielen geraden Stücken bestehende ins Unendliche verlaufende Linie ziehen, die keinen der Begrenzungsschlitze von T trifft. Diese Linie müßte aus T austreten, also einen Randpunkt von T enthalten, der auf keinem der Schlitze von T liegt, was nicht angeht, da diese Schlitze die volle Begrenzung von T bilden. Also kann T keine inneren Punkte besitzen, muß sich mit anderen Worten auf einen Punkt reduzieren; es muß also η eine Konstante sein.

Hiermit ist das behauptete Eindeutigkeitstheorem bewiesen.

§ 11. Die algebraischen *Riemann*schen Flächen und ihre Analysis situs.

Wir werden von den Überlegungen des § 5 eine Anwendung machen, um einige der wichtigsten tieferen Probleme der *Riemann*schen Funktionentheorie zu lösen. Als Vorbereitung hierzu müssen wir zunächst uns eine genauere Vorstellung von dem Verlaufe der sogenannten *algebraischen Riemannschen Flächen* verschaffen. Wir wollen unter einer algebraischen *Riemann*schen Fläche ein Gebiet G verstehen, welches aus einer endlichen Anzahl vollständiger Exemplare der z-Ebene bzw. der z-Kugel besteht, die in endlich vielen Verzweigungspunkten miteinander verbunden sind. Wir haben also in G eine geschlossene *Riemann*sche Fläche der schon früher in § 8 betrachteten Art vor uns. Jede algebraische Funktion von z liefert uns eine solche Fläche; denn man kann nach Kap. 4 § 7 eine algebraische Funktion geradezu charakterisieren als eine solche, die auf einer algebraischen *Riemann*schen Fläche bis auf endlich viele Pole regulär ist. So liefert uns z. B. die Funktion $\zeta = \sqrt{R_n(z)}$, wobei $R_n(z)$ eine ganze rationale Funktion $2n$-ten Grades ohne mehrfache Nullstellen ist, eine zweiblättrige *Riemann*sche Fläche G mit $2n$ einfachen Verzweigungspunkten in den Nullstellen von $R_n(z)$. Wir können diese Fläche, welche im Falle $n = 1$ schon in Kap. 3 § 4, 5, im Falle $n = 2$ in der Theorie der elliptischen Funktionen ausführlich diskutiert ist, entstanden denken, indem wir die z-Ebene längs n etwa geradlinigen Schnitten aufschneiden, zwei kongruente Exemplare übereinanderlegen und dann die Schnittränder in der üblichen Art kreuzweise aneinanderheften. Man nennt die so entstehenden Flächen *„hyperelliptische“ Flächen*.

Diese hyperelliptischen wie schon die elliptischen Flächen ($n = 2$) geben die einfachsten *Beispiele nicht mehr schlichtartiger Gebiete.* Man kann nämlich, wie in der Figur 116 durch die teils stark, teils punktiert gezeichneten Kurven angedeutet ist, auf diesen Flächen doppelpunktlose geschlossene Kurven Q bzw. Q' ziehen, welche die Fläche

nicht in getrennte Stücke zerlegen. Solche Linien, die wir stückweise glatt annehmen wollen, nennen wir kurz „*Rückkehrschnitte*" der Fläche. Jeder Rückkehrschnitt besitzt zwei „*Ufer*", und nach Definition gehören beide Ufer nicht getrennten Gebieten an, d. h. es ist möglich, von irgendeinem Punkte P eines Rückkehrschnittes Q eine wieder zu P zurückführende Kurve Q' in G so zu führen, daß Q und Q' sich sonst nirgends schneiden. Q und Q' stehen offenbar in derselben Beziehung zueinander wie Q' und Q, d. h. auch Q' ist ein Rückkehrschnitt. Wir nennen die Rückkehrschnitte Q und Q' *zueinander konjugiert*.

Auf unseren hyperelliptischen Flächen können wir sofort $p = n - 1$ getrennte Paare konjugierter Rückkehrschnitte angeben, wie dies in der Figur für $p = 2$ angedeutet ist.

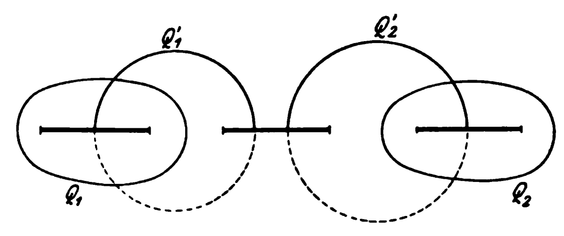


Fig. 116.

Um sich allgemein eine anschauliche Vorstellung von den Zusammenhangsverhältnissen unserer *Riemann*schen Fläche zu verschaffen, was wegen der Selbstdurchdringungen und Verzweigungen schwierig ist, kann man folgendermaßen vorgehen: Man denke sich die m Blätter der Fläche G auseinandergenommen, so daß m volle durch gewisse Schnitte, die „Verzweigungsschnitte", aufgeschlitzte Ebenen entstehen. Jedes Ufer eines Verzweigungsschnittes denken wir uns mit einer Zahl bezeichnet, und zwar solche Ufer verschiedener Blätter, welche in G zusammengeheftet sind, mit derselben Zahl. Wir betrachten ein solches aufgeschnittenes Blatt, welches etwa q-fach zusammenhängend sein möge, und denken uns dasselbe, um die Vorstellung des unendlich Fernen zu vermeiden, durch stereographische Projektion auf eine Kugel übertragen. Sodann verzerren wir dieses Blatt im Raume stetig, bis es die röhrenförmige oder sackförmige Gestalt angenommen hat, welche in den Fig. 117—119c für den Fall $q = 1, 2, 3$ gezeichnet ist. Die Bezeichnung der Ufer in dem verzerrten Gebilde behalten wir bei. So erhalten wir m räumliche Gebilde $R_1, R_2, \ldots, R_m$ dieser Form, deren Ränder aus den Verzweigungsschnitten von G entstanden sind. Nunmehr heften wir diese Gebilde $R_1, R_2, \ldots, R_m$ derart aneinander, daß dabei die gleichbezeichneten Randstücke zur Deckung kommen, wobei wir nötigen-

falls durch eine neue stetige Verzerrung dafür Sorge tragen können, daß überall genau solche Punkte miteinander vereinigt werden, welche früher auf der *Riemann*schen Fläche ebenfalls zusammenfielen. Indem wir dabei Schritt für Schritt vorgehen, nämlich jeweils durch Anheftung eines neuen Gebildes R_j, können wir offenbar, nötigenfalls durch nochmalige stetige Verzerrung, dafür sorgen, daß die entstehende, notwendig

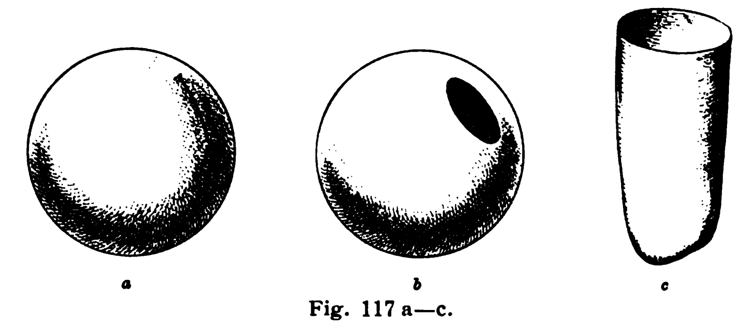


Fig. 117 a—c.

im Raume geschlossene Fläche sich nirgends selbst durchdringt oder knotet und somit die Gestalt der Flächen in Fig. 120 a—c aufweisen wird, d. h. *geschlossener, im Raume liegender Flächen, welche Löcher zeigen, ohne Ränder zu besitzen.* Die erste der gezeichneten Flächen ist die schon aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannte *Ring-*

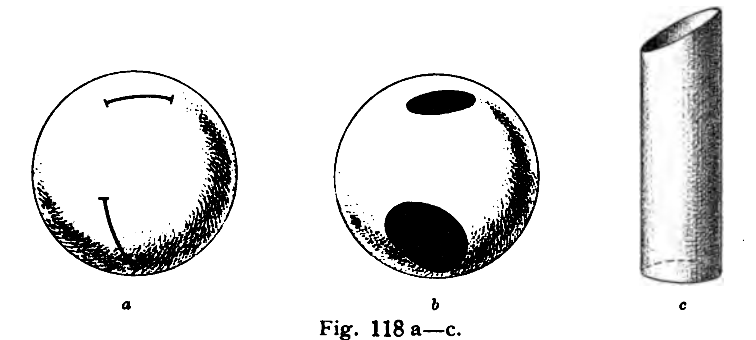


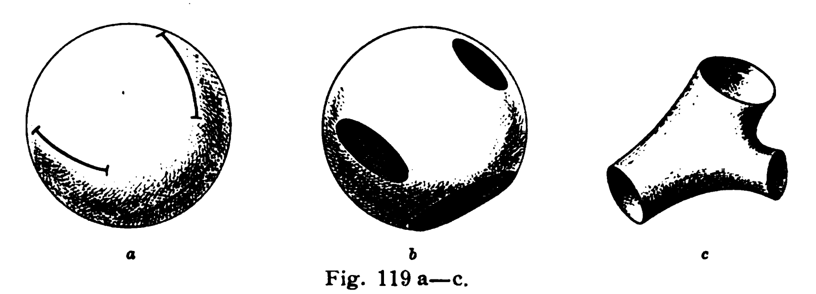
Fig. 118 a—c.

fläche, die zweite hat *Brezelform*, die dritte weist drei Löcher auf, und offenbar kann man so beliebig weitergehen. Selbstverständlich können bei unserem Verfahren auch Flächen vom Typus der Kugel, d. h. Flächen ohne Löcher, entstehen.

Man kann, indem man diese räumlichen Flächen sich wieder flach zusammengepresst denkt, sagen: Unsere Flächen mit p-Löchern lassen sich umkehrbar eindeutig und stetig auf einen *Doppelbereich* abbilden, der zu einem $p+1$-fach zusammenhängenden schlichten Be-

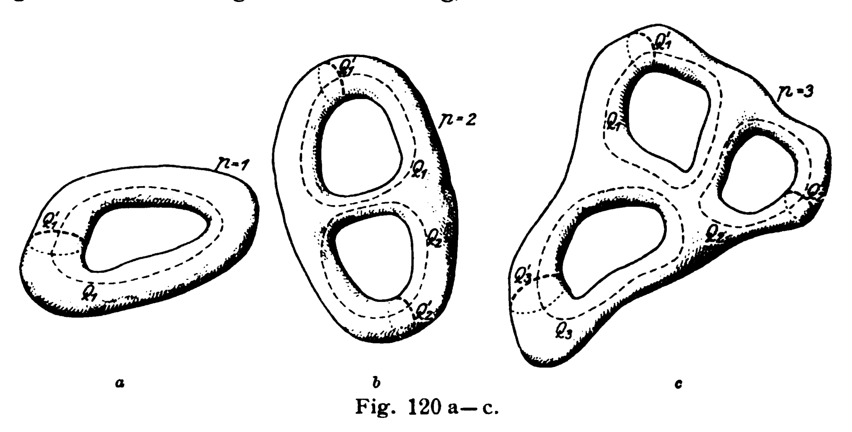
reich B gehört. Dabei verstehen wir unter diesem Doppelbereich den durch Hinzufügung der Unterseite von B zu B gebildeten Bereich.

Die so aus G entstandene räumliche Fläche, welche wir mit R bezeichnen wollen und ebenfalls als „*Riemann*sche Fläche" bezeichnen können, besitzt genau dieselben inneren Zusammenhangsverhältnisse wie G; d. h. jeder geschlossenen doppelpunktlosen Kurve auf G ent-



a b c
Fig. 119 a—c.

spricht eine ebensolche Linie auf R, jedem Rückkehrschnitt auf G entspricht eine doppelpunktlose geschlossene Kurve auf R, welche R nicht in zwei Teile zerlegt, oder, wie wir ebenfalls sagen können, ein Rückkehrschnitt auf R[1]). Dasselbe gilt umgekehrt. Es bedeutet eine große Erleichterung der Anschauung, wenn wir uns die Zusammen-



a b c
Fig. 120 a—c.

hangsverhältnisse auf G durch Betrachtung von R klarmachen. Die Anzahl p der Löcher in der Fläche R nennen wir das *Geschlecht* von R. Es wird sich im folgenden von selbst zeigen, *daß diese Anzahl p ganz unabhängig von der Art der Deformation der Fläche G* ist und eine fundamentale, der Fläche G zugehörige Konstante dar-

[1]) Wir können übrigens alle stetigen Verzerrungen, welche wir vorzunehmen haben, so treffen, daß R eine stückweise stetig gekrümmte Fläche wird und stückweise glatte Kurven auf G in ebensolche auf R übergehen.

stellt; wir nennen darum auch p das ***Geschlecht der Riemannschen Fläche*** G.

Um die Bedeutung von p zu verstehen, betrachten wir die Fläche R und ziehen auf ihr wie in der Figur p Rückkehrschnittpaare $Q_1, Q_1', \ldots, Q_p, Q_p'$, welche ganz voneinander getrennt liegen, so daß zu jedem Loch ein Paar gehört. Man erkennt unmittelbar, daß durch diese Schnitte die Fläche R in eine schlichtartige Fläche R^* verwandelt wird; denn nach Ausführung der sämtlichen Schnitte Q_i, Q_i' ist kein weiterer, die Fläche R^* nicht zerlegender Rückkehrschnitt mehr möglich. Entsprechend erhalten wir auch auf G p Paare konjugierter Rückkehrschnitte, welche G in einen schlichtartigen Bereich G^* verwandeln und die wir ebenfalls mit $Q_1, Q_1', \ldots, Q_p, Q_p'$ bezeichnen wollen.

Beiläufig sei bemerkt, daß schon durch die p Rückkehrschnitte Q_i die Fläche G in eine schlichtartige verwandelt wird.

Als Ergebnis unserer Betrachtungen halten wir fest: *Die Riemannsche Fläche G läßt sich durch p getrennte Paare konjugierter Rückkehrschnitte in ein schlichtartiges Gebiet G^* verwandeln.*

Nunmehr stellen wir uns vor, daß von einem beliebigen Punkt von G aus nach je einem Punkt jedes Rückkehrschnittpaares, etwa nach dessen Treffpunkt, ein Einschnitt C_1 bzw. $C_2, \ldots, C_p$ gezogen wird, so daß alle diese Einschnitte weder einander noch sonst die Rückkehrschnitte Q_i, Q_i' treffen. Wir behaupten, daß durch die Rückkehrschnittpaare und die Einschnitte G in ein einfach zusammenhängendes Gebiet verwandelt wird. In der Tat, wir können nach § 6 sicherlich G^* auf einen schlichten Bereich $\mathfrak{S}$ abbilden, wobei jedes Rückkehrschnittpaar, das ja eine zusammenhängende Randlinie von G^* darstellt, in einen Schlitz übergeht; jede Linie C_i geht in einen von einem festen Punkte P in $\mathfrak{S}$ nach einem der Schlitze führenden Schnitt über, und da ein p-fach zusammenhängender schlichter Bereich durch p derartige Schnitte in einen einfach zusammenhängenden verwandelt wird, so ist unsere Behauptung bewiesen. Wir können nun auch alle die Einschnitte C_i zum Verschwinden bringen, indem wir z. B. den Treffpunkt jedes Rückkehrschnittpaares in den Punkt P hineingezogen vorstellen; hier zu brauchen wir ihn nur unter stetiger geeigneter Deformation des Schnittpaares längs C_i zu verschieben. Wir haben dann die Fläche *von einem Punkte P aus* ***„kanonisch zerschnitten“***, wie dies in Fig. 121 für $p = 2$ veranschaulicht ist. Das System der Rückkehrschnitte Q_i, Q_i' bildet dann einen geschlossenen Zug, welcher die Fläche G in einen einfach zusammenhängenden Bereich $\overline{G}$ ver-

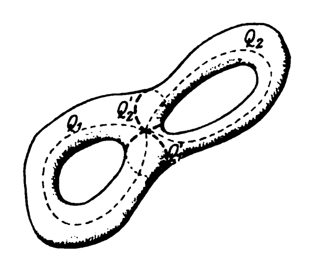


Fig. 121.

wandelt. Wir können uns von dieser zerschnittenen Fläche und der Zuordnung der Schnittufer eine Vorstellung machen, indem wir $\overline{G}$ erst auf einen schlichten Kreis abgebildet denken und sodann diesen durch stetige Deformation derart in ein geradliniges Polygon mit $4p$ Seiten verwandeln, daß jedem Schnittufer eine Polygonseite entspricht. Dann ist, wie man leicht erkennt, die Zuordnung der Seiten so beschaffen, wie es in der Fig. 122 für den Fall $p = 2$ durch die gezeichneten Pfeile dargestellt wird.

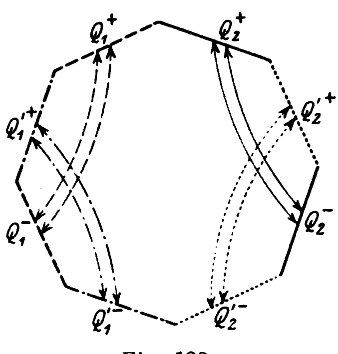


Fig. 122.

In den vorangehenden Betrachtungen, welche der von *Leibniz* als „*Analysis situs*" bezeichneten geometrischen Disziplin angehören, ist von der räumlichen geometrischen Anschauung ausgiebig Gebrauch gemacht worden. Man kann diese Berufung auf die Anschauung ohne prinzipielle Schwierigkeiten umgehen und die Betrachtungen der Analysis situs auf einen axiomatischen Boden stellen, genau wie andere mathematische Disziplinen; doch würde dies für den gegenwärtigen Zweck zu weit führen[1]). Für das Folgende wollen wir einfach *als Voraussetzung fordern*, daß der zu betrachtende Bereich G durch p Rückkehrschnittpaare in der angegebenen Weise kanonisch zerschnitten *sei*. Daß diese Zahl p von der Willkür unabhängig ist, welche bei der Art der kanonischen Zerschneidung noch bleibt, wird sich im folgenden Paragraphen von selbst ergeben.

§ 12. Die *Abel*schen Integrale und algebraischen Funktionen auf gegebenen *Riemann*schen Flächen.

Einer der größten Erfolge der *Riemann*schen Ideenbildungen war der Einblick, den sie in das Wesen der *algebraischen Funktionen* und *ihrer Integrale* gestatten. Wir sind nunmehr hinreichend vorbereitet, um diese Gedankengänge zu erfassen. *Riemann* geht nicht von einer algebraischen Gleichung zur Definition der algebraischen Funktion aus, um von da aus eine *Riemann*sche Fläche zur Darstellung des Funktionsverlaufes zu konstruieren, sondern er legt eine geometrisch ganz beliebig definierte algebraische *Riemann*sche Fläche G, d. h. eine Fläche der eben charakterisierten Art zugrunde und stellt zunächst die fundamentale Frage, ob es stets zu einer solchen Fläche eine algebra-

[1]) Es sei vor allem auf das auf S. 328 zitierte Werk von *Weyl* verwiesen.

ische Funktion gibt, deren *Riemann*sche Fläche G ist. Diese Frage werden wir in positivem Sinne beantworten, indem wir mit *Riemann* nicht unmittelbar auf die Konstruktion algebraischer Funktionen ausgehen, sondern zunächst solche Funktionen auf G suchen, die zwar selbst in G noch nicht eindeutig sind, deren Differentialquotient jedoch eindeutig wird, d. h. eine algebraische Funktion ist. Diese Funktionen nennt man *Abelsche Integrale* nach dem großen Mathematiker, der zum ersten Male solche transzendenten Funktionen systematisch studiert hat.

Wir wollen daran gehen, *alle* zur Fläche G gehörigen *Abel*schen Integrale aufzustellen. Nach ihrer Definition sind es einfach die Integrale der algebraischen Funktionen auf G, aufgefaßt in ihrer Abhängigkeit von der oberen Grenze. Kennt man alle *Abel*schen Integrale auf G, so erhält man durch deren Differentiation offenbar alle algebraischen Funktionen. Diese selbst sind ganz spezielle, nämlich auf G eindeutige, *Abel*sche Integrale.

Wir unterscheiden drei Typen von *Abel*schen Integralen, auf welche, wie sich nachher zeigen wird, alle andern sich zurückführen lassen:

Integrale erster Gattung oder *überall endliche Integrale* heißen solche *Abel*schen Integrale, welche überall auf G regulär sind, also nirgends auf G unendlich werden.

Integrale zweiter Gattung nennt man die *Abel*schen Integrale, welche auf der Fläche G Pole besitzen, sonst aber nirgends singulär werden.

Integrale dritter Gattung schließlich heißen solche, die logarithmische Singularitäten aufweisen.

Es sei $f(z)$ ein *Abel*sches Integral erster oder zweiter Gattung und Q, Q^* zwei „*äquivalente*" *Rückkehrschnitte*, d. h. zwei solche Rückkehrschnitte, welche durch stetige Deformation auseinander hervorgehen. Wir dürfen annehmen, daß sie entweder einander nicht treffen und aus G ein zweifach zusammenhängendes schlichtartiges Gebiet G' ausschneiden, oder einander zwar treffen, aber zu einem dritten Rückkehrschnitt Q^{**} in jener Beziehung stehen.

Die Funktion $f'(z)$ besitzt als Singularitäten in G nur Pole von mindestens zweiter Ordnung; wir wollen annehmen, daß auf Q, Q^* kein Pol liegt; dann ist, falls Q, Q^* einander nicht treffen, nach dem Residuensatz[1]) das Integral von $f'(z)$, um den Rand des Gebietes G' herum erstreckt, gleich Null; d. h. aber, die Integrale $\int f'(z)\,dz$ über die beiden Rückkehrschnitte Q und Q^* sind einander gleich; dasselbe folgt, wenn Q, Q^* sich treffen, unter Zuhilfenahme von Q^{**}. Wir nennen diesen Wert, welcher die Änderung der Funktion $f(z)$ beim

---

[1]) Vgl. Abschn. I, Kap. 5 § 8.

Umlauf um einen Rückkehrschnitt Q oder einen äquivalenten darstellt, den *zu diesem Schnitt gehörigen* ***Periodizitätsmodul.***

Haben wir ein Integral dritter Gattung vor uns, so kommt zu der additiven Mehrdeutigkeit durch die Periodizitätsmoduln noch die beim Umlauf um die logarithmischen singulären Stellen hinzu.

Um den Existenzbeweis für die verschiedenen Typen der *Abel*schen Integrale zu führen und zugleich eine Übersicht über die verschiedenen sich so ergebenden Funktionen zu erhalten, brauchen wir uns nur der Überlegungen von § 5 zu erinnern. Diese liefern uns sofort die Existenz eines *Abel*schen Integrals zweiter Gattung, welches in einem gegebenen Punkte O (etwa $z = 0$) von G einen Pol erster Ordnung mit dem gegebenen Hauptteil $\frac{1}{z}$ oder allgemeiner $\frac{\alpha}{z}$ besitzt und sonst nirgends unendlich wird. Ist der betreffende Punkt O gerade ein Verzweigungspunkt $m - 1$-ter Ordnung von G, so bilden wir vorher die Fläche G durch eine Transformation der Gestalt $z' = z^{\frac{1}{m}}$ so auf eine andere über der z'-Ebene ausgebreitete Fläche G' ab, daß der Umgebung des Punktes O ein schlichtes Gebiet in G' entspricht, und übertragen dann rückwärts die für G' gefundene Funktion auf G.

Um Integrale zweiter Gattung mit höheren Polen bzw. Integrale dritter Gattung zu erhalten, können wir wörtlich wie in § 5 verfahren; nur müssen wir die dort mit S bezeichnete Funktion etwas anders definieren. Suchen wir etwa ein Integral zweiter Gattung, welches im Punkte O unendlich wird wie $\frac{1}{z^n}$, so definieren wir im Kreise K

$$S = \frac{1}{r^n} \cos n\vartheta + \frac{r^n}{a^{2n}} \cos n\vartheta,$$

wobei r, ϑ zum Kreise konzentrische Polarkoordinaten sind. Auch diese Funktion hat die Eigenschaft, auf der Peripherie von K verschwindende normale Ableitungen zu besitzen, so daß, wenn wir außerhalb K die Funktion S gleich Null setzen, die Überlegungen von § 5 wörtlich unverändert bleiben. Sie vereinfachen sich sogar prinzipiell für geschlossene Flächen dadurch, *daß sich G mit endlich vielen Kreisen* in der nötigen Art *überdecken läßt.* Durch Addition verschiedener solcher Integrale können wir sofort ein *Integral zweiter Gattung* herstellen, welches *an gegebenen Stellen gegebene Hauptteile* besitzt. Indem wir beachten, daß die Potentialfunktion u, welche wir als Lösung unseres Minimumproblems erhalten, ihrer Definition nach eindeutig ist, erkennen wir, daß die Mehrdeutigkeit von $f(z)$ sich allein im Imaginärteil v ausprägt, *daß also die konstruierten Integrale rein imaginäre Periodizitätsmodulen besitzen.* Durch Multiplikation mit i

können wir natürlich ebenso solche mit reellen Periodizitätsmoduln erhalten.

Auch die Konstruktion der Integrale dritter Gattung gelingt sofort, wenn wir nur eine geeignete Singularitätenfunktion S angeben können. Zu dieser gelangen wir folgendermaßen: Wir nehmen zwei Punkte P_1 und P_2, welche beide im Inneren einer schlichten in G liegenden Kreisscheibe K um einen von P_1, P_2 verschiedenen Punkt liegen, und spiegeln diese Punkte an dem Kreise K. Die Spiegelpunkte bezeichnen wir mit P_1', P_2'; z_1, z_2, z_1', z_2' seien die zu unsern Punkten gehörigen komplexen Zahlenwerte; die Entfernungen eines Punktes P von P_1, P_2, P_1', P_2' bezeichnen wir mit r_1, r_2, r_1', r_2'. Wir setzen nun einfach in K einschließlich des Randes

$$S = (\lg r_1 - \lg r_2) + (\lg r_1' - \lg r_2'),$$

während außerhalb K wieder $S = 0$ ist. In K ist S die konjugierte Potentialfunktion zu $(\vartheta_1 - \vartheta_2) + (\vartheta_1' - \vartheta_2')$, wenn mit $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_1', \vartheta_2'$ die Winkel der komplexen Zahlen $z - z_1$, $z - z_2$, $z - z_1'$, $z - z_2'$ bezeichnet werden. Nun ist aber auf der Kreisperipherie nach einem bekannten und leicht zu beweisenden elementargeometrischen Satze $(\vartheta_1 - \vartheta_2) + (\vartheta_1' - \vartheta_2') = 0$; also gilt für die normale Ableitung von S auf der Kreisperipherie die Relation

$$\frac{\partial S}{\partial \nu} = 0,$$

und wir können daher auch hier wieder wörtlich wie in § 5 weiter schließen.

So gelangen wir zu einem *Abel*schen Integrale dritter Gattung, welches auf G lediglich in P_1 und P_2 singulär wird, und zwar wie $\lg(z - z_1)$ bzw. $-\lg(z - z_2)$, wenn P_1, P_2 zu den Werten z_1, z_2 gehören. Auch dieses Integral besitzt rein imaginäre Periodizitätsmoduln; bei positiver Umkreisung der Punkte P_1, P_2 wächst es um $2\pi i$ bzw. $-2\pi i$.

Ebenso könnten wir statt der obigen Funktion S die Potentialfunktion

$$S = (\vartheta_1 - \vartheta_2) - (\vartheta_1' - \vartheta_2')$$

wählen.

Auch diese Funktion ist erstens in K eindeutig und besitzt zweitens verschwindende normale Ableitungen auf der Peripherie, da sie zu der auf der Peripherie konstanten Potentialfunktion $(\lg r_1 - \lg r_1') - (\lg r_2 - \lg r_2')$ konjugiert ist.

So gelangen wir zu einem *Abel*schen Integral dritter Gattung mit rein imaginären Periodizitätsmoduln, welches sich beim Umlauf um die beiden einzigen singulären Stellen P_1, P_2 um die reellen Zahlen 2π bzw. -2π vermehrt.

Wir wollen die so gewonnenen Integrale dritter Gattung mit $\psi(z; z_1, z_2)$ bzw. $\psi^*(z; z_1, z_2)$ bezeichnen. Sie sind zunächst nur definiert, wenn z_1, z_2 in einer ganz in G liegenden schlichten Kreisscheibe gelegen sind; aber mit Hilfe der einleuchtenden[1]) Relation

$$(1)\quad \begin{cases} \psi\ (z; z_1, z_2) = \psi\ (z; z_1, z') + \psi\ (z; z', z'') + \ldots + \psi\ (z; z^{(n-1)}, z_2) \\ \psi^*(z; z_1, z_2) = \psi^*(z; z_1, z') + \psi^*(z; z', z'') + \ldots + \psi^*(z; z^{(n-1)}, z_2) \end{cases}$$

dehnt sich ihre Definition sofort auf den Fall zweier allgemein in G liegender Punkte z_1, z_2 aus, da sich stets eine Kette von Punktepaaren der gewünschten Art zwischenschalten läßt. Ist einer der Punkte oder beide Verzweigungspunkt, so können wir vorher seine Umgebung auf ein schlichtes Gebiet abgebildet denken und die Konstruktion von S entsprechend vornehmen.

Durch Multiplikation mit konstanten reellen Koeffizienten und Addition solcher Integrale dritter Gattung, wobei unter den singulären Punkten $z_1, z_2, z_3, \ldots$ derselbe mehrfach auftreten darf, erhalten wir nun ein *allgemeineres Integral dritter Gattung, welches an gegebenen Stellen von G logarithmische Unstetigkeiten besitzt, so daß die Residuen der Ableitung die Summe Null haben, im übrigen aber willkürlich gewählt werden können, während die Periodizitätsmoduln der reellen Teile Null sind.* Daß die Bedingung für die Residuen wirklich naturgemäß und notwendig ist, folgt unmittelbar aus dem *Cauchy*schen Residuensatz des Abschnittes I, Kap. 5, § 8, wenn man diesen auf die Ableitung eines Integrales dritter Gattung für die ganze Fläche $\overline{G}$ anwendet.

Indem wir G längs eines beliebigen Schnittes E von z_1 nach z_2 aufschneiden, verwandeln wir das Integral $\psi^*(z; z_1, z_2)$ bzw. $\psi(z; z_1, z_2)$ in eine Funktion, welche bis auf ihre rein imaginären Periodizitätsmoduln in der zerschnittenen Fläche eindeutig ist und beim Überschreiten des Schnittes den Sprung 2π bzw. $2\pi i$ erleidet.

Von hier aus gelangen wir leicht auch zu den überall endlichen Integralen erster Gattung.

Es sei Q ein beliebiger Rückkehrschnitt, $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = z_1$ eine geschlossene Kette von Punkten auf Q, so daß die Integrale $\psi^*(z; z_a, z_{a+1})$ durch unser obiges Verfahren eindeutig definiert sind; dann wird die Summe

$$j(z) = \psi^*(z; z_1, z_2) + \ldots + \psi^*(z; z_{n-1}, z_n),$$

jedenfalls überall eine in G reguläre, also endlich bleibende Funktion sein; aber ihr reeller Teil ist nicht, wie bei den früheren Ausdrücken, eindeutig, sondern erleidet beim Überschreiten des Querschnittes Q

[1]) Wenn $z_1, z_2, z', \ldots$ alle in einer Kreisscheibe K liegen, ist diese Relation selbstverständlich, andernfalls dient sie als Definitionsgleichung. Wir werden sogleich sehen, daß diese Definition nicht eindeutig ist.

den Sprung 2π, oder besser ausgedrückt, *$j(z)$ besitzt auf dem zu Q konjugierten Rückkehrschnitt Q' einen Periodizitätsmodul mit dem reellen Teil 2π.* Wir haben also wirklich ein nicht identisch verschwindendes Integral erster Gattung vor uns. Offenbar können wir für jeden von den $2p$ Rückkehrschnitten eines kanonischen Schnittsystems eine solche Konstruktion ausführen und erhalten so *$2p$ voneinander „linear unabhängige[1]) Integrale" erster Gattung.*

Wir wollen die so entstehenden $2p$ Integrale erster Gattung mit $j_1(z), j_2(z), \ldots, j_{2p}(z)$ bezeichnen. Dann gilt der Satz: *Jedes auf G überall endliche Integral ist bis auf eine additive Konstante eine lineare Kombination der Integrale $j_1(z), j_2(z), \ldots, j_{2p}(z)$ mit reellen Koeffizienten.* In der Tat möge der reelle Teil eines vorgelegten Integrales erster Gattung $j(z)$ an den $2p$ Rückkehrschnitten $Q_1, Q_1', \ldots, Q_p, Q_p'$ unseres Schnittsystems die Periodizitätsmoduln $2\pi c_1, 2\pi c_2, \ldots, 2\pi c_{2p}$ des reellen Teiles besitzen. Dann ist $\bar{j}(z) = j - c_1 j_1 - c_2 j_2 - \cdots - c_{2p} j_{2p}$ ein Integral erster Gattung, dessen reeller Teil auf den Rückkehrschnitten Q_ν, Q_ν' die Periodizitätsmoduln Null besitzt, somit auf G überhaupt eindeutig ist. *Eine auf G überall eindeutige und endliche Potentialfunktion w muß aber eine Konstante sein;* denn wendet man die *Green*sche Formel auf die zerschnittene Fläche $\bar{\bar{G}}$ an, so erhält man sofort die Relation

$$D_{\bar{\bar{G}}}[w] = 0.$$

Also ist der Realteil w von $\bar{j}(z)$ und somit $\bar{j}(z)$ selbst eine Konstante.

Wir können den oben bewiesenen Satz in verständlicher Sprechweise auch so aussprechen: *Die größte Anzahl der voneinander reell linear unabhängigen Abelschen Integrale erster Gattung ist gleich dem doppelten Geschlecht der Fläche.* Damit haben wir gezeigt, daß die Zahl p wirklich eine von der speziellen Zerschneidung der Fläche unabhängige Konstante der Fläche ist.

Daß durch Addition des geschlossenen Zyklus von Integralen dritter Gattung nicht identisch Null herauskommt, wie man vielleicht entsprechend den Relationen (1) erwarten möchte, ist keineswegs paradox; durch (1) ist eben das Symbol $\psi^*(z; z_1, z_2)$ gar nicht eindeutig definiert, sondern nur bis auf ein beliebiges additives Integral erster Gattung.

Wir haben damit die Aufstellung sämtlicher Abelscher Integrale auf G erreicht. Denn wir sind nun in der Lage, durch Kombination der gewonnenen Funktionen ein Integral herzustellen, welches an ge-

[1]) Jede lineare Kombination dieser Funktionen mit konstanten reellen Koeffizienten muß nämlich, wenn diese Koeffizienten nicht alle Null sind, mindestens einen nicht verschwindenden Periodizitätsmodul besitzen, kann also nicht identisch Null oder konstant sein.

gebenen Stellen von G Pole mit gegebenen meromorphen Teilen besitzt, an anderen gegebenen Stellen logarithmische Unstetigkeiten mit gegebenen Residuen der Ableitung (so daß die Residuensumme verschwindet), und deren Periodizitätsmoduln an den $2p$ Rückkehrschnitten gegebene reelle Teile besitzen, wodurch andererseits das *Abel*sche Integral bis auf eine additive Konstante festgelegt ist[1]).

Dem Leser sei übrigens empfohlen, sich diese Verhältnisse an dem Beispiel $p = 1$, wo es sich um elliptische Integrale handelt, an Hand des 2. Abschnittes explizite klarzumachen.

Unter den algebraischen Funktionen auf G, welche wir durch Differentiation der *Abel*schen Integrale erhalten, befinden sich sicherlich auch solche, deren Vieldeutigkeit genau mit der Blätteranzahl m übereinstimmt. Wir brauchen uns z. B. nur ein *Abel*sches Integral zweiter Gattung zu konstruieren, welches in den über einer Stelle der z-Ebene liegenden Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_m$ von G je einen Pol erster Ordnung hat, wobei die Residuen dieser Pole alle voneinander verschieden gewählt werden; dann ist die Ableitung dieses Integrales sicherlich auf G genau m-deutig.

Die Differentiation der *Abel*schen Integrale ist nicht die einzige Art zur Erzeugung algebraischer Funktionen. Man kann zu diesen z. B. auch durch *Addition von Integralen* erster und zweiter Gattung gelangen, indem man die Periodizitätsmoduln vermöge der verfügbaren Konstanten zum Verschwinden bringt. Die nähere Ausführung dieser Gedanken und die daran anschließende systematische Behandlung der algebraischen Funktionen findet der Leser in der spezielleren Literatur[2]).

Zum Schluß dieses Paragraphen sei noch bemerkt, daß man zu den Integralen erster Gattung auch direkt gelangen könnte, indem man nach dem Muster von § 5 diejenige überall in G außer auf Q stetige und stückweise mit stetigen ersten Ableitungen erster Ordnung versehene reelle Funktion u von x und y sucht, welche bei Überschreitung von Q den Sprung 2π erfährt und für welche das Integral $D[u]$ möglichst klein wird.

Diese Funktion, deren Existenz genau wie in § 5 folgt, muß natürlich eine Potentialfunktion sein und erweist sich sofort als Realteil des von uns oben betrachteten zum Querschnitt Q gehörigen Integrales erster Gattung. Wir können, indem wir auf unsere Strömungsbetrachtungen zurückgreifen, das so gewonnene Potential u charakterisieren als das *Potential einer elektrischen oder thermischen Strömung, die auf unserer leitend gedachten Fläche entstehen würde, wenn man sie längs*

[1]) Nämlich deswegen, weil eine überall auf G eindeutige reguläre Potentialfunktion eine Konstante sein muß.

[2]) Unter neueren Werken sei das schon zitierte Buch von *Weyl* genannt, sowie *Hensel-Landsberg*, Theorie der algebraischen Funktionen, Leipzig 1902.

Q zerschneidet und an den beiden Ufern eine konstante Spannung 2π bzw. bei Wärmeströmung eine konstante Temperaturdifferenz 2π anbringt.

§ 13. Die Uniformisierung der algebraischen und analytischen Funktionen durch automorphe Funktionen mit Grenzkreis.

Unser allgemeinster Abbildungssatz für einfach zusammenhängende schlichtartige Gebiete liefert uns mit Leichtigkeit die Lösung eines wichtigen Problems der höheren Funktionentheorie, welches die Mathematiker während der letzten Dezennien viel beschäftigt hat. Von jeher besteht das Bestreben, Mehrdeutigkeiten in einem Funktionsverlaufe $\zeta = f(z)$ dadurch der Betrachtung zugänglicher zu machen, daß man beide Variable ζ, z gleichzeitig als eindeutige Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ eines komplexen Parameters t darstellt; man sagt dann, daß die Funktion $\zeta = f(z)$ durch die eindeutigen analytischen Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *uniformisiert* sei, und nennt t die *uniformisierende Variable*. So z. B. wird die Funktion $\zeta = z^\alpha$ bei beliebigem α uniformisiert durch die Darstellung $z = e^t$, $\zeta = e^{\alpha t}$, die Funktion $\zeta = \sqrt{1 - z^2}$ durch die Darstellung

$$\zeta = \cos t, \qquad z = \sin t,$$

oder

$$\zeta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad z = \frac{2t}{1 + t^2},$$

die Funktion

$$\zeta = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}$$

nach Abschnitt II, Kap. 5, § 1 durch

$$\zeta = \wp'(t), \qquad z = \wp(t),$$

wobei $\wp(t)$ die *Weierstraß*sche $\wp$-Funktion bedeutet.

In der Umgebung eines algebraischen Verzweigungspunktes haben wir ebenfalls den Funktionsverlauf in Kap. 4, § 8 durch eine uniformisierende Variable dargestellt. Aber wir haben bisher keineswegs eine *für den gesamten Funktionsverlauf gültige Uniformisierung* hergestellt derart, daß das Wertsystem (ζ, z) den *ganzen* Funktionsverlauf der algebraischen Funktion $\zeta = f(z)$ durchmißt, wenn die uniformisierende Variable t ein gewisses Gebiet der t-Ebene bestreicht und $\zeta = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$ eindeutige und in diesem Gebiete bis auf Pole reguläre Funktionen von t sind. Die unter anderem auch für geometrische Anwendungen wichtige Aufgabe, eine solche *Uniformisierung für den Gesamtverlauf der algebraischen Funktion* zu finden, heißt das „*Uniformisierungsproblem*". Es hat seine vollständige

Lösung erst in neuerer Zeit vor allem durch Arbeiten von *Poincaré* und *Koebe* gefunden. Mit Rücksicht auf den in diesem Buche gezogenen Rahmen wollen wir uns hier auf den einfachsten — und auch interessantesten — Fall beschränken, die sogenannte *Grenzkreisuniformisierung.* Dabei ziehen wir zunächst eine beliebige algebraische Funktion $\zeta = f(z)$ mit der *Riemann*schen Fläche G in betracht.

Man könnte versuchen, folgendermaßen vorzugehen: Wir bilden die kanonisch zerschnittene Fläche $\overline{G}$ konform auf ein ebenes Gebiet B der t-Ebene ab, dann entspricht jedem Werte t in B eindeutig ein Punkt der Fläche $\overline{G}$, somit auch der diesem zugehörige Funktionswert ζ; ebenso gehört natürlich erst recht zu jedem t in B eindeutig der Wert z des entsprechenden Punktes auf G; es sind also ζ, z eindeutige Funktionen von t in B. Das so Erreichte aber kann uns nicht befriedigen, einmal weil am Rande von B Singularitäten der Funktionen $\zeta(t)$, $z(t)$ auftreten, vor allem aber, weil wir über den Gesamtverlauf dieser Funktionen keinerlei Überblick erhalten. Daher schreiten wir zu einer Verfeinerung des gefaßten Gedankens.

Wir konstruieren uns zunächst an Stelle von G eine neue Fläche $\overline{\overline{G}}$, welche zwar unendlich viele Blätter besitzt, jedoch hinsichtlich ihrer Zusammenhangsverhältnisse viel einfacher ist als G; diese Fläche, welche wir die zu G gehörige ***einfach zusammenhängende universelle Überlagerungsfläche*** nennen werden, erhalten wir folgendermaßen: Wir denken uns die kanonisch zerschnittene Fläche $\overline{G}$ in unendlich vielen kongruenten Exemplaren vorhanden, die Schnittufer der Rückkehrschnitte überall in derselben Weise mit den Buchstaben Q_i^+, Q_i^-, $Q_i'^+$, $Q_i'^-$ bezeichnet, und heften nun an jedes Schnittufer Q^+ von $\overline{G}$ ein neues Exemplar der Fläche mit seinem entsprechenden Ufer Q^- an, ebenso an jedes Ufer Q^- ein neues Exemplar mit Q^+, und fahren so fort, indem wir an jeden entstehenden freien Schnittuferrand eine neue Fläche $\overline{G}$ mit dem entsprechenden Rand anfügen. Sobald bei diesem Prozeß entsprechende Ufer Q_h^+ und Q_h^- oder $Q_h'^+$ und $Q_h'^-$ zusammenstoßen. d. h. sobald in der Berandung eines so entstehenden Bereiches z. B. zwei entsprechende Ufer Q_h^+ und Q_h^- mit demselben h aufeinanderfolgen, sind diese beiden Ufer zusammenzufügen. Indem wir uns diesen Prozeß in infinitum fortgesetzt denken, haben wir einen unendlich vielblättrigen Bereich $\overline{\overline{G}}$ definiert, der aus unendlich vielen kongruenten Exemplaren von $\overline{\overline{G}}$ besteht, und der unsere gesuchte Überlagerungsfläche darstellt. Wir haben uns davon zu überzeugen, daß $\overline{\overline{G}}$ wirklich ein schlichtartiger einfach zusammenhängender Bereich ist. Dies aber erkennen wir unmittelbar an Hand der Figur 122 aus § 11, indem wir $\overline{G}$ ebenso wie die kongruenten Exemplare durch ein ebenes Polygon repräsentieren, dessen Seiten je ein Schnittufer darstellen.

Wenn wir unseren Anhängungsprozeß mit den Polygonen vornehmen (wobei diese, sofern es uns nur auf die Zusammenhangsverhältnisse ankommt, keineswegs kongruent zu sein brauchen, sondern sogar alle schlicht in einer Ebene untergebracht werden könnten), sehen wir unmittelbar die Richtigkeit unserer Behauptung hinsichtlich des Zusammenhanges von $\overline{\overline{G}}$ ein.

Jeder auf $\overline{\overline{G}}$ geschlossene Weg über der z-Ebene ist natürlich erst recht auf G geschlossen, jede auf G eindeutige Funktion erst recht auf der Überlagerungsfläche $\overline{\overline{G}}$ eindeutig[1]).

Nach § 6 und 8 können wir nunmehr die Überlagerungsfläche $\overline{\overline{G}}$ umkehrbar eindeutig und konform auf einen schlichten Bereich abbilden, und zwar entweder auf die volle unberandete t-Ebene, oder auf die nur von einem Punkte, etwa dem Punkte ∞, berandete t-Ebene, oder schließlich auf das Innere des Einheitskreises. Der erste Fall ist nach der Bemerkung in § 8 (S. 355) ausgeschlossen, sobald $p > 0$ ist, weil dann sicher die Überlagerungsfläche $\overline{\overline{G}}$ von G verschieden, also unendlich vielblättrig wird; im Falle $p = 0$ dagegen erhalten wir wirklich als Bild von G die volle t-Ebene, weil G in einen einfach zusammenhängenden schlichtartigen Bereich übergeht, sobald wir G „*punktieren*", d. h. irgendeinen in G willkürlich gewählten Punkt für den Augenblick als Randpunkt ansehen; dann wird die punktierte Fläche G auf die punktierte t-Ebene abgebildet, somit auch die nicht punktierten Bereiche aufeinander. Nach § 8 werden nunmehr $\psi(t)$,

[1]) Allgemein wird man eine über einer gegebenen Fläche G ausgebreitete Fläche G^* dann Überlagerungsfläche zu G nennen, wenn jeder auf G^* geschlossene Weg auch auf G geschlossen ist. Jede solche Überlagerungsfläche kann, wenn sie schlichtartig ist, zur Uniformisierung im Sinne der folgenden Ausführungen benutzt werden. Die hier zugrunde gelegte gibt den übersichtlichsten Fall. — Man kann unsere Überlagerungsfläche, wie auch jede andere, ohne den oben geschilderten Anheftungsprozeß definieren, indem man von der Bemerkung ausgeht, daß ein über der z-Ebene ausgebreiteter Bereich B für unsere funktionentheoretischen Zwecke vollständig definiert ist, wenn von jedem in der z-Ebene geschlossenen Wege feststeht, ob der entsprechende Weg auch in B geschlossen sein soll oder ob seinen Endpunkten verschiedene Punkte in B (in verschiedenen Blättern) zuzuweisen sind. Ebenso kann man zu einer *Riemann*schen Fläche G eine Überlagerungsfläche U definieren, indem man von jedem auf G geschlossenen Wege festsetzt, ob er auch auf der Fläche U geschlossen sein soll oder nicht. Dann kann man unsere Überlagerungsfläche $\overline{\overline{G}}$ einfach definieren, indem man verlangt: Jeder auf G geschlossenen, stetig um einen Punkt zusammenziehbaren Kurve soll auch auf $\overline{\overline{G}}$ eine geschlossene Kurve entsprechen; jeder anderen eine auf $\overline{\overline{G}}$ nicht geschlossene Kurve. Der Leser wird die Äquivalenz beider Definitionen selbst nachprüfen können. Die zuletzt gegebene hat den Vorteil, von einer Zerschneidung des Gebietes G keinen Gebrauch zu machen; *sie läßt sich darum auch für ganz beliebige Bereiche anwenden.*

$\varphi(t)$ rationale Funktionen von t. ***Für Flächen G vom Geschlechte Null gelingt also die Uniformisierung stets durch rationale Funktionen.***

Im Falle $p > 0$ bezeichnen wir den Bildbereich von $\bar{\bar{G}}$ in der t-Ebene mit T, gleichviel ob er die ganze Ebene außer dem Punkte ∞ oder der Einheitskreis ist. Dann werden die Punkte der Fläche $\bar{\bar{G}}$, also gewiß auch die auf dieser Fläche eindeutigen Werte von ζ eindeutig den Punkten von T zugeordnet sein, also ζ eine überall in T eindeutige Funktion $\varphi(t)$ von t werden; dasselbe gilt erst recht von den Zahlenwerten $z = \psi(t)$ in der komplexen z-Ebene, über denen der betreffende Punkt von $\bar{\bar{G}}$ liegt. Also sind auf $\bar{\bar{G}}$ und somit erst recht auf G, ζ und z eindeutige Funktionen

$$\zeta = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

der ***uniformisierenden Variablen t***; durchläuft diese irgendeinen Weg in T, so durchläuft das Wertsystem (ζ, z) ebenfalls einen Weg auf der Fläche $\bar{\bar{G}}$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, auf G. Ist der erstere Weg geschlossen, so ist es sicher auch der letztere.

Wir wollen nun die Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ näher charakterisieren, indem wir die inneren Symmetrien beachten, welche die Überlagerungsfläche $\bar{G}$ aufweist. *Die Überlagerungsfläche $\bar{G}$ gestattet „Decktransformationen", d. h. kongruente Transformationen in sich.* Jeder Punkt P auf G liegt nämlich in irgendeinem Exemplar der unendlich vielen Flächen $\bar{G}$; zu diesem Exemplar gehört eindeutig ein bestimmtes weiteres, in welches wir bei Überschreitung eines Schnittufers Q^+ oder Q^-, Q'^+, Q'^- gelangen, und in diesem Exemplar gibt es einen bestimmten zu P kongruent gelegenen Punkt. (Um die Zuordnung auch noch auf den Ufern Q eindeutig zu machen, brauchen wir immer nur für jeden Schnitt das eine Ufer Q^+, Q'^+ zu $\bar{G}$ zu rechnen, das andere nicht.) Wir ordnen nun jedem Punkt P auf $\bar{G}$ den so durch Überschreitung eines der Ufer Q_i^+ oder Q_i^-, $Q_i'^+$, $Q_i'^-$ für ein irgendwie festgewähltes i erhaltenen Punkt P' zu, und erkennen unmittelbar, daß dabei $\bar{\bar{G}}$ in sich übergeht. Die so erhaltenen Decktransformationen und alle durch wiederholte Anwendung daraus entstehenden bilden die *„Gruppe der Decktransformationen von G"*.

Wir wollen untersuchen, was dies für die Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ bedeutet. Einer Decktransformation unserer Gruppe entspricht umkehrbar eindeutig in der t-Ebene eine Zuordnung von Punkten des Bereiches T zueinander, durch welche T in sich abgebildet wird; da die Decktransformation als kongruente Abbildung konform ist, so ist es auch die Abbildung von T in sich. Mithin ist nach § 1 diese Abbildung eine lineare Transformation

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}. \tag{1}$$

Die sämtlichen linearen Transformationen, die wir so als Korrelat zu den Decktransformationen erhalten, bilden ihrer Natur nach *eine Gruppe*, d. h. jede aus mehreren Transformationen der Gesamtheit (1) zusammengesetzte Transformation gehört wieder der Gesamtheit an; desgleichen gehört die zu einer Transformation (1) inverse wieder zur Gesamtheit. Die Gruppe wird „*erzeugt*" durch die $2p$ zu den verschiedenen Rückkehrschnittufern Q_i^+, $Q_i'^+$ gehörigen Decktransformationen, bzw. durch die entsprechenden linearen Transformationen; d. h. alle Transformationen der Gruppe lassen sich aus diesen und ihren inversen Transformationen zusammensetzen.

Da nun zu zwei auf $\overline{\overline{G}}$ in dem angegebenen Sinne durch eine Decktransformation einander zugeordneten Punkten genau dieselben Werte der komplexen Variablen z und ihrer algebraischen Funktion ζ gehören, so folgt für alle Transformationen unserer Gruppe die Relation

$$\varphi\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)=\varphi(t);\qquad \psi\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)=\psi(t). \tag{2}$$

Wir erhalten also in der Bezeichnung von Kap. 4, § 9 das Ergebnis: *Die algebraische Funktion ist durch eindeutige automorphe Funktionen von t mit der Gruppe* (1) *uniformisiert.*

Wir wollen diese automorphen Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ näher charakterisieren. Ist erstens der Bereich T die ganze t-Ebene mit Ausnahme des Punktes ∞, so müssen die Funktionen (1), da der Punkt ∞ in sich übergeht, die Gestalt haben

$$t'=\alpha t+\beta. \tag{3}$$

Wir kennen solche Funktionen für den Fall $p=1$, nämlich die elliptischen Funktionen mit den Perioden ω_1, ω_2; diese sind offenbar gerade automorphe Funktionen dieses Typus; in der Tat leisten sie ja die Uniformisierung der elliptischen *Riemann*schen Fläche. Es läßt sich leicht zeigen, daß wir mit dem Falle $p=1$ und der Uniformisierung durch elliptische Funktionen die erste Möglichkeit erschöpft haben, wo T die ganze punktierte Ebene ist.

In der Tat muß in Gleichung (3) die Konstante α den Wert 1 haben; denn anderenfalls gäbe es einen Wert t_0, so daß $t_0=\alpha t_0+\beta$ wäre, nämlich $t_0=\frac{\beta}{1-\alpha}$. Es würde also dieser Punkt bei der Transformation fest bleiben, also auch der entsprechende Punkt auf $\overline{\overline{G}}$ bei der entsprechenden Decktransformation, was offenbar widersinnig ist, also hat (3) die Form $t'=t+\beta$. Die Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sind also entweder einfach periodisch oder, zufolge der Lehre von den mehrfach periodischen Funktionen, doppeltperiodisch, da mehr als zwei unabhängige Perioden nicht auftreten können. Der Fall einfacher Periodizität, also nur einer erzeugenden Substitution der Gruppe, führt

aber auf das Geschlecht Null, da für $p > 0$ schon mindestens 4 Schnittufer auftreten, also mindestens zwei wesentlich verschiedene, mit den inversen vier wesentlich verschiedene Transformationen die Gruppe erzeugen.

Zu wesentlich neuen Funktionen gelangt man im zweiten Falle, wenn T der Einheitskreis (oder natürlich irgendein anderer Kreis) der t-Ebene wird. Alle linearen Transformationen der Gruppe müssen diesen Kreis in sich überführen, indem sie das Innere umkehrbar eindeutig auf sich selbst abbilden. Das Bild eines Exemplares $\overline{G}$ von $\overline{\overline{G}}$ wird ein schlichter Bereich in T sein, in dem die Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ den gesamten Vorrat ihrer Wertepaare genau einmal annehmen müssen; wir sprechen von dem gemeinsamen ***„Fundamentalbereich“ F der automorphen Funktionen.*** Unendlich viele solcher Fundamentalbereiche, die alle durch Transformationen (1) ineinander übergehen, müssen den ganzen Einheitskreis ausfüllen und infolgedessen jedenfalls, in eine Reihe $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_h, \ldots$ geordnet, einen gegen Null konvergierenden Flächeninhalt besitzen. Dies ist, da sie durch lineare Transformationen aus irgendeinem festen im Inneren liegenden Fundamentalbereich F entstehen, nur möglich, wenn sie selbst bei hinreichend großem h in einem beliebig kleinen Kreise Platz finden[1]). Daraus schließen wir, daß in beliebiger Nähe jedes Randpunktes des Einheitskreises noch ganze Fundamentalbereiche liegen. Denn jeder Punkt in hinreichender Nähe des Kreisrandes muß notwendig zu einem Fundamentalbereich F_j mit beliebig großem Index j gehören. Somit nehmen die Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ dort noch jeden beliebigen Wert an; also ist jeder Punkt der Kreisperipherie wesentlich singulärer Punkt beider Funktionen; mit anderen Worten, *dieser Kreis ist die natürliche Grenze für die uniformisierenden automorphen Funktionen.* Wir sagen: die *Uniformisierung der algebraischen Funktion gelingt stets durch automorphe Funktionen mit Grenzkreis,* indem wir den Fall, daß T die punktierte Ebene ist, in diese Bezeichnung einbeziehen[2]).

Die automorphen Funktionen mit Grenzkreis sind uns aus Kap. 4,

---

[1]) Dies folgt z. B. sofort aus Hilfssatz Ia in § 4, wenn wir diesen Hilfssatz auf ein Gebiet anwenden, welches ganz in T liegt und den Ausgangsfundamentalbereich F in sich enthält, etwa durch Hinzufügung der sämtlichen anstoßenden Fundamentalbereiche aus ihm entsteht; auch dieses Gebiet wird durch die betreffende Transformation noch auf eines mit beliebig kleinem Flächeninhalt abgebildet. und nun folgt aus dem Hilfssatz Ia, daß dann im ursprünglichen Fundamentalbereich die Abbildungsfunktion entsprechend der Kleinheit der Bildfläche annähernd konstant wird.

[2]) Diese Freiheit in der Bezeichnung rechtfertigt sich sofort, wenn wir statt einer z-Ebene eine Kugel zugrunde legen; der Existenzbereich der automorphen Funktionen ist dann das Äußere eines gewissen Kreises auf der Kugel, welcher sich im Grenzfalle auf einen Punkt zusammenziehen kann.

§ 9 schon bekannt, wo die Fundamentalbereiche als Kreisbogenpolygone auftraten, deren Seiten auf dem Grenzkreis orthogonal standen.

Der Einheitskreis in der t-Ebene und seine Einteilung in Fundamentalbereiche repräsentieren uns vollkommen die *Riemann*sche Fläche der algebraischen Funktion. Indem wir die linearen Transformationen des Einheitskreises in sich als *„Nichteuklidische Bewegungen"* bezeichnen, so daß also die Fundamentalbereiche in diesem Sinne „kongruent" zu nennen wären, können wir sagen: *Die Riemannsche Fläche einer algebraischen Funktion wird repräsentiert durch ein aus unendlich vielen nichteuklidisch kongruenten Bestandteilen aufgebautes Stück der Ebene.* Im Falle der elliptischen Funktionen tritt an Stelle der nichteuklidischen die wirkliche Kongruenz.

Auf die genauere geometrische und gruppentheoretische Untersuchung unserer Transformationsgruppe (1) können wir hier ebensowenig weiter eingehen, wie auf andere Möglichkeiten der Uniformisierung algebraischer Funktionen. Es muß da etwa auf die Monographie von *Fricke-Klein* über automorphe Funktionen verwiesen werden.

Nur beiläufig sei zum Schluß noch bemerkt, daß unsere Betrachtungen auch die Möglichkeit der *Uniformisierung beliebiger analytischer Funktionen durch eindeutige automorphe Funktionen mit Grenzkreis* dartun, sobald es uns gelingt, die Konstruktion der entsprechenden einfach zusammenhängenden Überlagerungsfläche für den Existenzbereich G der analytischen Funktion durchzuführen; in welcher Art dies möglich ist, ergibt sich aus Anm. [1]) S. 373.

Ferner sei darauf hingewiesen, daß unsere Betrachtungen fast unmittelbar auch die *gleichzeitige Uniformisierung mehrerer Funktionen* $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... durch automorphe Funktionen mit Grenzkreis und gemeinsamer Gruppe liefern. Man braucht ja nur von einer *Riemann*schen Fläche auszugehen, auf welcher gleichzeitig alle betrachteten Funktionen eindeutig sind.

§ 14. Die konforme Abbildung schlichtartiger Bereiche auf Kreisbereiche.

Wir wollen zum Schluß noch eine Anwendung des allgemeinen Theorems von § 9 machen, welches besagt, daß man jeden beliebigen schlichtartigen Bereich konform auf einen schlichten abbilden kann; und zwar wollen wir den *Satz* beweisen, *daß es möglich ist, jeden endlich vielfach zusammenhängenden schlichtartigen Bereich auf die volle Ebene mit Ausschluß endlich vieler kreisförmiger Löcher (bzw. die unberandete volle Ebene) umkehrbar eindeutig und konform abzubilden.* Es genügt hierzu nach dem schon Bewiesenen, den Beweis unter der

Voraussetzung zu führen, daß der Ausgangsbereich G ein ebener geradliniger Schlitzbereich über der z-Ebene ist und daß dieser wirklich Grenzschlitze aufweist, die sich nicht auf einen Punkt reduzieren (solche punktförmige Schlitze könnten wir als Kreise mit verschwindendem Radius auffassen). Das behauptete Theorem ist genau die Verallgemeinerung des *Riemann*schen Abbildungssatzes in seiner ursprünglichen Form, wie wir ihn auf S. 327 formuliert haben.

Zum Beweise werden wir auf ganz naturgemäße Art geführt, wenn wir die konforme Abbildung von G auf einen Kreisbereich K der ζ-Ebene für den Augenblick einmal hypothetisch als vorliegend annehmen und diese Abbildung sodann nach dem Spiegelungsprinzip fortgesetzt denken. Über der ζ-Ebene entsteht dann ein schlichter Bereich, dessen merkwürdige Natur wir nachher noch studieren werden, jetzt aber nicht weiter zu charakterisieren brauchen, während wir das über der z-Ebene entstehende Gebilde folgendermaßen definieren können. Wir gehen zunächst von G zu einem Gebiete G_1 über, indem wir G an seinen sämtlich n Schlitzen spiegeln. Im Falle $n > 1$, den wir allein ins Auge zu fassen brauchen (der Fall $n = 1$ ist schon durch die konforme Abbildung $\zeta = z + \frac{1}{z}$ des § 5 in Kap. 3 erledigt), erhalten wir in G_1 einen mehrblättrigen, nämlich aus $n+1$ vollen Ebenen bestehenden Bereich, dessen Begrenzung aus $n(n-1)$ geradlinigen zur reellen x-Achse parallelen Schlitzen besteht, den je $n-1$ Spiegelbildern jedes der ursprünglichen Schlitze $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$. Von G_1 aus erzeugen wir uns nun weiter eine Fläche G_2, indem wir G_1 wieder an jedem seiner freien Schlitzränder spiegeln, und gehen so weiter zu $G_3, G_4, G_5, \ldots$. Den Limes der ineinandergeschachtelten Bereiche G_j bezeichnen wir mit $\overline{G}$.

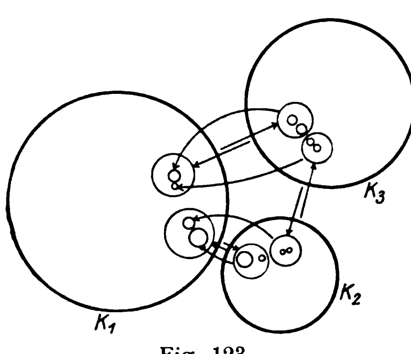


Fig. 123.

Von den Zusammenhangsverhältnissen der anschaulich vielleicht nicht leicht vorstellbaren Bereiche G_j bzw. $\overline{G}$ erhalten wir sofort ein übersichtliches Bild, indem wir die entsprechenden Spiegelungen an dem hypothetischen Kreisbereiche K vorgenommen denken und so zu Bereichen $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \mathsf{K}_3, \ldots$ übergehen, welche ebenfalls ineinander geschachtelt sind und sämtlich wieder Kreisbereiche mit einer immer wachsenden Anzahl von Kreislöchern darstellen (siehe die Fig. 123 für $n = 3$). Gleichviel nun, ob diese Kreisfigur durch wirkliche konforme Abbildung herstellbar ist oder nicht, so veran-

schaulicht sie uns doch im Sinne der analysis situs die Zusammenhangsverhältnisse von G_j und $\bar{G}$. Wir sehen also, daß $\bar{G}$ jedenfalls schlichtartig ist, wenn auch nicht mehr von endlicher Zusammenhangszahl.

Wir fassen nun irgendeine Stelle O $(z = z_0)$ auf $\bar{G}$ ins Auge, etwa eine Stelle, die im ursprünglichen Bereiche G liegt, und können dann nach §§ 5, 6, 9 eine auf $\bar{G}$ eindeutige analytische Funktion $\zeta = u + iv = f(z)$ konstruieren, welche nur im Punkte O einen Pol erster Ordnung mit gegebenem Residuum besitzt und den Bereich $\bar{G}$ auf einen schlichten Bereich $\bar{\mathsf{K}}$ abbildet. Die ineinandergeschachtelten Bereiche, welche dabei als Bilder von $G, G_1, G_2, \ldots, G_j \ldots$ entstehen, wollen wir mit $\mathsf{K}, \mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \ldots, \mathsf{K}_j \ldots$ bezeichnen und haben dann zu beweisen, daß diese wirklich mit den vorhin hypothetisch angenommenen, gleichbezeichneten Gebieten identisch sind.

Wir zeigen zunächst, daß die analytische Funktion $\zeta = f(z)$ eindeutig bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, wenn ihre polare Singularität vorgegeben und außerdem die Endlichkeit für den Bildflächeninhalt des aus $\bar{G}$ durch Weglassung von K_0[1]) entstehenden Bereiches $\bar{G} - K_0$

$$D_{\bar{G}-K_0}[u] = \iint\limits_{\bar{G}-K_0} |f'(z)|^2\, dx\, dy$$

vorausgesetzt wird. Ist $\zeta^* = u^* + iv^* = f^*(z)$ eine zweite Funktion mit denselben Eigenschaften, so genügt es zu zeigen, daß für die überall in $\bar{G}$ reguläre und absolut beschränkte Potentialfunktion $w = u - u^*$ die Relation

$$D_{\bar{G}}[w] = 0$$

gilt.

Zu diesem Zwecke bedenken wir zunächst, daß das Integral $D_{\bar{G}}[w]$, erstreckt über den ganzen Bereich $\bar{G}$, existieren muß; denn erstlich existiert offenbar $D_{K_0}[w]$, und zweitens wegen der aus § 4, Gleichung (5) folgenden Relation

$$D[u - u^*] \leq D[u] + D[u^*] + 2\sqrt{D[u]\,D[u^*]}$$

auch $D_{\bar{G}-K_0}[w]$.

Wir denken uns weiter jeden der n ursprünglichen Schlitze mit einer Kurve $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ umgeben und betrachten den Gebietsstreifen B_i aller der Punkte auf $\bar{G}$, welche von Q_i einen Abstand nicht größer als eine feste Zahl R besitzen; dabei wählen wir die Linien Q_i (etwa als Rechtecke) und die Zahl R so, daß die Gebiete B_i und also alle aus ihnen durch das angegebene Spiegelungsverfahren entstehenden Gebiete schlichte, einander nirgends überdeckende Bereiche werden.

---

[1]) K_0 ist ein beliebiger Kreis um O, der ganz in G liegt (vgl. § 5).

Die durch Spiegelung aus Q_i und B_i entstehenden Gebilde wollen wir in eine Reihe

$$Q_{i,1}, Q_{i,2}, Q_{i,3}, \ldots; \quad B_{i,1}, B_{i,2}, B_{i,3}, \ldots$$

so geordnet denken, daß bei dieser Aufzählung zuerst alle in G_1 liegenden, dann alle in G_2 neu hinzukommenden Gebilde angeführt werden usw. Wir setzen

$$D_{B_{i,r}}[w] = W_{i,r},$$

dann ist wegen der Existenz von $D[w]$ klar, daß die Relation

$$\lim_{j=\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} W_{i,r} = 0 \tag{1}$$

besteht.

Nach Hilfssatz I, § 4, Gl. (10) gilt für jeden Punkt von $Q_{i,r}$ eine Ungleichung

$$w_x^2 + w_y^2 \leqq \frac{1}{R^2 \pi} W_{i,r}. \tag{2}$$

Es ist also, wenn s auf $Q_{i,r}$ die Bogenlänge, ν die Normale bedeutet,

$$\frac{\partial w}{\partial s} \leqq \frac{1}{R\sqrt{\pi}} \sqrt{W_{i,r}}, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} \leqq \frac{1}{R\sqrt{\pi}} \sqrt{W_{i,r}}. \tag{3}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, wenn wir unter $w^0_{i,r}$ irgendeinen von w auf $Q_{i,r}$ angenommenen Wert verstehen, für alle Werte von w auf $Q_{i,r}$

$$|w - w^0_{i,r}| \leqq \frac{1}{R\sqrt{\pi}} \sqrt{W_{i,r}} \cdot L, \tag{4}$$

wobei L eine gemeinsame obere Schranke für die Länge aller Q_i bedeutet.

Nunmehr betrachten wir statt des Bereiches G_j denjenigen Bereich G_j', welcher aus G_j entsteht, wenn wir die freien Randschlitze auf G_j durch die jeweils benachbarten Kurven $Q_{i,r}$ ersetzen. G_j' liegt in G_j, enthält jedoch G_{j-1} in sich, so daß $\bar{G}$ auch als Limes der G_j' aufgefaßt werden kann. Nach der *Green*schen Formel (6) aus § 4, angewandt für den Bereich G_j' und die Funktionen $\varphi = w$, $\psi = w$, wird wegen $\Delta w = 0$

$$D_{G_j'}[w] = \sum \int_{Q_{i,r}} w \frac{\partial w}{\partial \nu} ds,$$

wobei die Randintegrale über diejenigen Kurven $Q_{i,r}$ zu erstrecken sind, welche die Begrenzung von G_j' darstellen; bei hinreichend großem j liegen sicher die Indizes r alle oberhalb einer beliebig groß vorgegebenen Schranke. Nun haben wir sicherlich

$$\int_{Q_{i,r}} \frac{\partial w}{\partial \nu} ds = 0,$$

also

$$\int\limits_{Q_{i,r}} w \frac{\partial w}{\partial \nu} ds = \int\limits_{Q_{i,r}} (w - w^0_{i,r}) \frac{\partial w}{\partial \nu} ds,$$

mithin wegen (3), (4)

$$\left| \int\limits_{Q_{i,r}} w \frac{\partial w}{\partial \nu} ds \right| \leqq \frac{1}{R^2 \pi} W_{i,r} \cdot L^2.$$

Es ist also

$$D_{G'_j}[w] \leqq \frac{L}{R^2 \pi} \sum W_{i,r},$$

und da bei hinreichend großem j alle Indizes r hier beliebig groß werden, ergibt sich nunmehr unmittelbar wegen (1)

$$D_{\bar{G}}[w] = \lim_{j=\infty} D_{G'_j}[w] = 0.$$

Damit aber ist die behauptete Konstanz von w und somit von $f(z) - f^*(z)$ bewiesen.

Nachdem wir so unsere Funktion $\zeta = f(z)$ charakterisiert haben, folgern wir, daß die zu verschiedenen Unstetigkeitspunkten O in $\bar{G}$ und beliebigen dort vorgegebenen Residuen gehörigen Funktionen, welche $\bar{G}$ auf ein schlichtes Gebiet abbilden, lineare Funktionen voneinander sind; in der Tat ist, wenn $\zeta = f(z)$ unsere zum Punkte z_0 gehörige Funktion bedeutet, jede lineare Funktion

$$\zeta^* = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} \tag{5}$$

wieder eine Funktion von z, welche das Gebiet $\bar{G}$ auf einen schlichten Bereich der ζ^*-Ebene abbildet — nämlich auf den durch (5) aus dem Bildbereich $\bar{K}$ von $\bar{G}$ entstehenden —, und welche bei geeigneter Wahl der Konstanten α, β, γ δ an einer beliebig gegebenen Stelle der ζ-Ebene, also gewiß auch an einer beliebig gegebenen Stelle von $\bar{G}$ einen Pol mit gegebenem Residuum besitzt; diese Funktionen ζ^* erschöpfen somit die Gesamtheit der zu $\bar{G}$ gehörigen Funktionen mit den angegebenen Eigenschaften.

Wir können das Resultat auch so ausdrücken: Jede konforme Abbildung von $\bar{G}$ auf ein schlichtes Gebiet der ζ^*-Ebene, welches den Punkt $\zeta^* = \infty$ im Inneren[1]) enthält, wird vermittelt durch eine lineare Funktion irgendeiner unserer Funktionen ζ. Genau ebenso folgt, daß jede solche konforme Abbildung mit Änderung des Drehsinnes der Winkel[2]) durch Übergang von der Funktion ζ oder einer linearen Funktion von ζ zu der konjugiert komplexen Größe vermittelt wird, also durch eine Relation der Form

$$\bar{\zeta}^{**} = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}, \tag{5a}$$

[1]) Natürlich ist diese Bedingung im Grunde genommen unwesentlich.

[2]) Vgl. Kap. 2, § 2.

wobei $\bar{\zeta}^{**}$ die zu ζ^{**} konjugiert komplexe Zahl bedeutet und $\bar{G}$ auf einen Bereich der ζ^{**}-Ebene abgebildet wird.

Bisher haben wir noch keinerlei Gebrauch gemacht von den Symmetrieeigenschaften des Bereiches $\bar{G}$; indem wir dies tun, erhalten wir das Resultat, daß die Funktionen (5) in der Tat den Ausgangsbereich $\bar{G}$ auf einen Kreisbereich der gewünschten Art abbilden. Der Bereich $\bar{G}$ gestattet nämlich Transformationen in sich: Er geht punktweise in sich selbst über, wenn man ihn an einem der Begrenzungs-Schlitze Σ spiegelt; dabei vertauschen sich die beiden Gebiete miteinander, in welche $\bar{G}$ durch Σ zerlegt wird, und die Punkte von Σ entsprechen sich selbst bei der umkehrbar eindeutigen Abbildung von $\bar{G}$ auf sich. Diese Abbildung von $\bar{G}$ in sich ist eine konforme Abbildung mit Umlegung der Winkel. Wir betrachten unsere Funktion $\zeta = f(z)$ und bezeichnen sie, indem wir sie als Funktion eines Punktes P auf $\bar{G}$ betrachten, mit $\zeta = f\{P\}$. Mit P' wollen wir den aus P durch Spiegelung an unserem Schlitz Σ entstehenden Punkt bezeichnen und nunmehr dem Punkte P' in einer ζ^{**}-Ebene den Punkt $\zeta^{**}\{P'\} = f\{P\}$ zuordnen. Dann ist durch diese Zuordnung eine konforme Abbildung der Fläche $\bar{G}$ auf einen schlichten Bereich mit Umlegung der Winkel definiert, wie man sofort erkennt.

Das Bild von $\bar{G}$ enthält den Punkt $\zeta^{**} = \infty$ im Inneren, nämlich den zu O' gehörigen Punkt $\zeta^{**} = f\{O\} = f(z_0) = \infty$. Also ist ζ^{**} eine zu einer linearen Funktion von ζ konjugiert komplexe Größe (5a).

Deuten wir ζ und ζ^{**} in derselben Ebene, so definiert die Gleichung (5a) eine solche Abbildung der Ebene in sich, daß dabei Kreise wieder in Kreise übergehen. Ferner muß jeder Punkt des Bildes C von Σ in sich selbst übergehen und das Innere und Äußere von C miteinander vertauscht werden. Hieraus können wir schließen, daß C ein Kreis ist. In der Tat betrachten wir drei auf C willkürlich gewählte Punkte A_1, A_2, A_3 und legen durch sie einen Kreis, so muß dieser Kreis, da drei seiner Punkte bei der Abbildung (5a) fest bleiben, in sich übergehen; also kann der Kreis keine Punkte im Inneren oder im Äußeren von C haben, weil solche Punkte ja in äußere bzw. innere Punkte übergehen müssen; das heißt aber, C ist mit dem Kreise identisch. Bei der Abbildung von $\bar{G}$ auf die ζ-Ebene wird also jeder Schlitz des Ausgangsbereiches G auf einen Kreis abgebildet, das Gebiet G ist somit in der Tat auf einen durch Kreise begrenzten schlichten Bereich konform abgebildet, der im übrigen den Punkt ∞ im Inneren enthält, sobald der Pol O auf $\bar{G}$ im Ausgangsbereich G gewählt ist.

Das behauptete Abbildungstheorem ist damit bewiesen.

Gleichzeitig ist *bewiesen, daß diese Abbildung im wesentlichen, d. h. bis auf eine lineare Transformation, eindeutig bestimmt ist.* Denn wenn zwei verschiedene Kreisbereiche der z-Ebene aufeinander konform abgebildet sind, so lassen sie sich auf denselben Schlitzbereich G der z-Ebene konform abbilden; indem wir zu G die obige Fläche $\overline{G}$ konstruieren und die Abbildung von $\overline{G}$ auf die Kreisbereiche nach dem Spiegelungsverfahren fortsetzen, erkennen wir, daß unsere Abbildungsfunktionen notwendig mit unseren oben betrachteten Funktionen $f(z)$ identisch, also lineare Funktionen voneinander sind. Wir können dieses Eindeutigkeitstheorem geradezu so formulieren: *Zwei Kreisbereiche lassen sich nur dann umkehrbar eindeutig und konform aufeinander abbilden, wenn sie durch lineare Transformationen auseinander hervorgehen.*

Wir wollen schließlich noch die Struktur des Bereiches $\overline{\mathsf{K}}$ betrachten, auf welchen die Fläche $\overline{G}$ durch die Funktion $\zeta = f(z)$ abgebildet wird. Da $\overline{\mathsf{K}}$ durch das Spiegelungsverfahren aus dem Kreisbereiche K entsteht, so erscheint, wie in der Fig. 123 angedeutet, $\overline{\mathsf{K}}$ als Limes ineinandergeschachtelter Kreisbereiche K_j, deren Zusammenhangszahl mit j über alle Grenzen wächst; dabei ist K_j das Bild des Bereiches G_j. Wir behaupten: Jeder einzelne der Begrenzungskreise von K_j hat einen bei hinreichend großem j beliebig kleinen Radius, und zwar konvergiert der Gesamtflächeninhalt der von diesen Kreisen aus der ζ-Ebene ausgeschnittenen Fläche bei wachsendem j gegen Null. Diese Tatsache ergibt sich z. B., indem wir beachten, daß die Relationen (1), (2), (3), (4) auch bestehen bleiben, wenn wir darin w durch u oder v ersetzen. Wir haben dann, indem wir für das *Dirichlet*sche Integral von u oder v die Bezeichnung W beibehalten, wegen (4) auf dem Rande des Bildes $\Gamma_{i,r}$ von $Q_{i,r}$

$$(u - u^0_{i,r})^2 + (v - v^0_{i,r})^2 \leqq \frac{2}{R^2\pi} L^2 W_{i,r},$$

d. h. dieses Bild läßt sich in einen Kreis vom Inhalt nicht größer als $\frac{2}{R^2\pi} L^2 W_{i,r}$ einschließen, woraus wegen (1) unsere Behauptung folgt. *Die Begrenzung* unseres Bildbereiches $\overline{\mathsf{K}}$ *wird also aus einer Punktmenge,* den Häufungspunkten unserer Kreise, *bestehen,* welche den „*Inhalt Null*“ *hat,* d. h. sich in endlich viele Gebiete von beliebig kleinem Gesamtflächeninhalt einschließen läßt; welche außerdem *diskret* ist, indem je zwei ihrer Punkte sich durch eine ganz außerhalb derselben laufende Kurve trennen lassen, und welche doch „*perfekt*“, d. h. mit der Menge ihrer Häufungspunkte identisch ist.

§ 15. Die Moduln eines schlichtartigen Bereiches.

Wir machen von den gewonnenen Ergebnissen noch eine Anwendung, um die Frage zu beantworten, unter welchen Umständen zwei vorgegebene schlichtartige Bereiche G_1 und G_2 sich konform aufeinander abbilden lassen. Wenn die Bereiche einfach zusammenhängend sind, so ist dies immer möglich, höchstens abgesehen von dem Ausnahmefall, daß einer der Bereiche aus der vollen oder der punktierten Ebene besteht bzw. auf diese abbildbar ist. Im Falle einer beliebigen endlichen Zusammenhangszahl n denken wir uns beide Bereiche nach dem vorigen Paragraphen auf Kreisbereiche, nämlich K_1 und K_2, abgebildet. Dann sind G_1 und G_2 zufolge des letzten Satzes aus § 14 dann und nur dann konform aufeinander abbildbar, wenn die Kreisbereiche K_1 und K_2 auseinander durch lineare Transformationen hervorgehen. Im Falle des zweifachen Zusammenhanges können wir durch eine lineare Transformation sicherlich die beiden Begrenzungskreise so konzentrisch um den Nullpunkt angeordnet denken, daß der Kreisbereich K_1 bzw. K_2 einfach der Kreisring zwischen diesen beiden konzentrischen Kreisen wird[1]). Die beiden äußeren sowie die beiden inneren Kreise der betreffenden Kreisringe mögen dabei einander entsprechen. Im Grenzfalle kann einer der Kreise in den Nullpunkt bzw. in den Punkt ∞ übergehen oder auch beides eintreten; wir wollen auch dann noch von einem konzentrischen Kreisring sprechen. Die lineare Transformation, welche zwei derartige Kreisringe ineinander überführt, muß notwendig die Form $\zeta_1 = \alpha \zeta_2$ besitzen, weil jeder Radius der konzentrischen Kreise als gemeinsamer Orthogonalkreis wieder in einen solchen Orthogonalkreis, d. h. in einen Radius übergehen muß. Bei einer solchen Transformation wird das Radienverhältnis der beiden Kreise nicht geändert (das auch den Wert Null haben bzw. bei der doppelt punktierten Ebene durch $0:\infty$ repräsentiert sein kann). Umgekehrt lassen sich sicherlich zwei konzentrische Kreisbereiche von gleichem Radienverhältnis aufeinander durch Dilatation und Drehung konform abbilden. Wir schließen also: ***Zwei zweifach zusammenhängende Bereiche lassen sich dann und nur dann konform aufeinander abbilden, wenn das Radienverhältnis der zugehörigen konzentrischen Kreisbereiche bei beiden dasselbe ist.*** Es ist also *eine reelle Bedingung* notwendig und hinreichend, oder wie man nach *Riemann* sagt, *ein zweifach zusammenhängender schlichtartiger Bereich besitzt einen „Modul“.*

Ist die Zusammenhangszahl n der Bereiche G_1 und G_2 größer als 2, so können wir wieder durch eine lineare Transformation jeden

[1]) Man erkennt diese Möglichkeit sofort aus Kap. 3 §, 1, indem man berücksichtigt, daß man in einer linearen Transformation 6 wesentliche reelle Konstanten zur Verfügung hat.

der zugehörigen Kreisbereiche K_1, K_2 von vornherein so umgestaltet denken, daß zwei seiner Kreise konzentrisch um den Nullpunkt und die übrigen in dem zwischengelegenen Kreisring liegen, so daß also K_1, K_2 je ein mit kreisförmigen Löchern versehener konzentrischer Kreisring ist, wobei der Fall einer mehrfach punktierten Ebene als Grenzfall eingeschlossen bleibt. Die beiden äußeren sowie die beiden inneren Kreise der Kreisringe mögen dabei einander entsprechende Kurven sein. Eine lineare Transformation, welche die beiden konzentrischen Kreise wieder in konzentrische ebenso angeordnete Kreise um den Nullpunkt überführt, muß die Form $\zeta_1 = \alpha\zeta_2$ besitzen, d. h. aus einer Dilatation und Drehung bestehen; es müssen daher K_1 und K_2 durch Drehung und Dilatation auseinander hervorgehen. Wir schließen also, indem wir beachten, daß hier alle Schlüsse umkehrbar sind. *Zwei schlichtartige n-fach zusammenhängende Bereiche sind dann und nur dann konform aufeinander abbildbar, wenn bei den betrachteten zugehörigen ringförmigen Kreisbereichen die Verhältnisse der n Radien sowie die Winkel, unter welchen die inneren Kreise und die gegenseitigen Abstände der Kreismittelpunkte vom Nullpunkt aus erscheinen, in beiden Bereichen miteinander übereinstimmen.* Wir haben also hier, da die Radienverhältnisse durch $n-1$, die Winkel der ersten Sorte durch $n-2$ und die der zweiten Sorte durch $n-3$ Zahlen gegeben sind, als notwendige und hinreichende Bedingung für die Abbildbarkeit der Gebiete aufeinander paarweise die Gleichheit von je gewissen $3n-6$ reellen Zahlen zu fordern, die zu den Bereichen G_1 und G_2 gehören. Solche für die Abbildbarkeit eines Gebietes charakteristischen Zahlen nennt man nach *Riemann* „*Moduln*" des Bereiches, und kann daher zusammenfassend sagen: *Ein n-fach schlichtartiger zusammenhängender Bereich hat für $n=1$ gar keinen, für $n=2$ einen und für $n>2$ $3n-6$ Moduln.*

Daß für $n=1$ und $n=2$ der allgemeine Ausdruck $3n-6$ für die Anzahl der Moduln nicht gilt, hat seinen inneren Grund in dem Umstande, daß für $n=1$ der Bereich sich noch durch eine von drei willkürlichen reellen Konstanten abhängige Funktion, im Falle $n=2$ durch eine von einer willkürlichen reellen Konstanten abhängige Funktion in sich transformieren läßt, während bei $n>2$ keine solche Scharen von Transformationen mehr auftreten können, wie die obigen Betrachtungen zeigen.

§ 16. Ergänzende Bemerkungen.

Wir wollen die in diesem Kapitel entwickelten Theorien durch eine Reihe verschiedenartiger ergänzender Bemerkungen abschließen, wobei hinsichtlich der Ausführung im einzelnen auf die Literatur verwiesen werden muß.

Zunächst sei betont, daß die betrachteten geradlinigen Schlitzbereiche oder Kreisbereiche keineswegs die einzigen *Normalbereiche* sind, auf die man jeden schlichtartigen Bereich konform abbilden kann. Um zwei andere bemerkenswerte Typen solcher Normalbereiche zu erhalten, beachten wir, daß in dem Variationsproblem des § 5, in welchem wir die Abbildungsfunktion $\zeta = u + iv$ konstruierten, von vornherein statt der dort betrachteten Funktion S auch eine der Funktionen S genommen werden könnte, welche wir in § 12 zur Konstruktion der *Abel*schen Integrale dritter Gattung benutzt haben. Nehmen wir etwa für S in der Bezeichnung von § 12 die zu zwei Stellen P_1, P_2 des zunächst als schlicht vorausgesetzten Bereiches G gehörige Funktion

$$S = (\vartheta_1 - \vartheta_2) - (\vartheta_1' - \vartheta_2').$$

Die zugehörige Funktion

$$\zeta = f(z) = u + iv$$

wird genau wie die in § 5 konstruierte Funktion an jedem zusammenhängenden Randstück von G konstante Randwerte für den imaginären Teil v besitzen und sich in der Umgebung der Stellen P_1, P_2 verhalten wie $-i \log (z - z_1)$ bzw. $+ i \log (z - z_2)$. Man erkennt hieraus, indem man die Kurven $u =$ konst., $v =$ konst. betrachtet, leicht, daß *durch die Funktion*

$$\eta = e^{i\zeta} = e^{iu} e^{-v}$$

der Bereich G auf einen Bereich abgebildet wird, welcher aus der vollen η-Ebene besteht, die längs endlich vieler oder unendlich vieler konzentrisch um den Nullpunkt angeordneter Kreisbögen aufgeschnitten ist.

Wählen wir dagegen für S die Funktion

$$S = (\log r_1 - \log r_2) + (\log r_1' - \log r_2')$$

in der Bezeichnung von § 12, so erhalten wir eine Funktion

$$\zeta = u + iv = f(z),$$

deren Imaginärteil v wiederum auf jedem zusammenhängenden Randstück von G konstante Randwerte annimmt, die sich selbst an den Stellen P_1 und P_2 aber verhält wie

$$\log (z - z_1) - \log (z - z_2).$$

So erkennen wir, *daß* hier *die Funktion*

$$\eta = e^{\zeta} = e^{u} e^{iv}$$

den Bereich G konform abbildet auf die volle η-Ebene, welche längs endlich oder unendlich vieler geradliniger auf Strahlen durch den Nullpunkt angeordneter Schlitze aufgeschnitten ist.

Es bedarf kaum einer besonderen Erwähnung, daß diese Abbildungssätze auch noch dann bestehen bleiben, wenn G nicht mehr schlicht ist, sondern einen beliebigen schlichtartigen Bereich darstellt[1]).

Etwas wesentlich Neues erhalten wir, wenn wir uns die Frage stellen, ob es auch *Normalabbildungen für nicht schlichtartige Bereiche* gibt. Wir beschränken uns hier darauf, referierend diese Frage für den Fall zu beantworten, daß es sich um eine geschlossene *Riemann*sche Fläche vom Geschlechte p handelt. Jedes *Abel*sche Integral $\zeta = f(z) = u + iv$ zweiter Gattung, welches an einer einzigen Stelle P der *Riemann*schen Fläche G einen Pol erster Ordnung besitzt, bildet die geeignet von der Stelle P aus kanonisch zerschnittene Fläche G auf die volle schlichte ζ-Ebene ab, deren Begrenzung von $2p$ Paaren zur reellen Achse paralleler sämtlich nach negativ unendlich großen Werten von v reichender Schlitze gebildet wird; jedes Schlitzpaar entspricht dabei einem Rückkehrschnitt; die Ränder der Schlitze eines Paares sind einander so zugeordnet, daß übereinanderliegende Punkte, d. h. Punkte mit demselben Werte der u-Koordinate miteinander zu identifizieren sind, so daß dabei der obere Rand des einen dem unteren Rand des anderen Schlitzes entspricht.

Die Schlitzpaare sind so angeordnet, daß je zwei zusammengehören, deren eines die Schlitze des anderen trennt. Zwei solche Schlitzpaare entsprechen einem Paar konjugierter Rückkehrschnitte auf G[2]).

Die so geschilderte Figur können wir also als die *Normalform einer algebraischen Riemannschen Fläche* betrachten. Sie enthält in den Koordinaten der Schlitzenden $6p$ reelle Konstanten. Wir können eine gegebene Fläche G auf unendlich viele Arten in dieser Weise abbilden, indem wir den Pol des abbildenden Integrals zweiter Gattung auf G beliebig annehmen, ihm dort ein beliebiges Residuum zuweisen können und schließlich noch eine willkürliche additive Konstante zur Verfügung haben. Nun gilt der Satz, daß eine Fläche vom Geschlecht $p > 1$ nur eine endliche Anzahl von konformen Abbildungen in sich selbst gestattet; wir formulieren mit Rücksicht auf diese Tatsache die oben geschilderten Verhältnisse, indem wir sagen: *Eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht $p > 1$ hängt im Sinne der konformen Abbildung von $6p - 6$ reellen Konstanten ab oder sie besitzt $6p - 6$ reelle Moduln, d. h. es sind $6p - 6$ reelle Bedingungsgleichungen für zwei Riemannsche Flächen zu erfüllen, wenn dieselben sich konform aufeinander abbilden lassen.*

---

[1]) Vgl. zu diesen Sätzen *Koebe*, Acta mathem., Bd. 41, S. 305ff.; Math. Zeitschr., Bd. 7, wo noch andere, allgemeinere Typen von Normalbereichen behandelt sind.

[2]) Vgl. *Courant*, Math. Zeitschr., Bd. 3; *Koebe*, Gött. Nachrichten, Jahrgang 1918.

Im Falle $p = 1$ und $p = 0$ ist diese Behauptung nicht mehr richtig, da man im ersten Falle noch eine von zwei willkürlichen reellen Parametern abhängige Schar von Transformationen der Fläche in sich angeben kann, im Falle $p = 0$ sogar eine von 6 solchen Parametern abhängige Schar. ***Wir haben demgemäß im Falle $p = 1$ zwei, im Falle $p = 0$ keine Moduln.***

Hinsichtlich der nicht schwierigen Durchführung der hierzu gehörigen Beweise sei der Leser auf die Literatur verwiesen[1]).

Zum Schluß seien noch einige Bemerkungen über den *allgemeinen Begriff der Riemannschen Fläche* gemacht: Während wir zunächst die *Riemann*sche Fläche über die Zahlenebene oder Zahlenkugel ausgebreitet dachten, sind wir, um uns die betreffenden Zusammenhangsverhältnisse zu veranschaulichen, darauf geführt worden, diese ebenen *Riemann*schen Flächen beliebigen stetigen Deformationen zu unterwerfen. Allgemein können wir demgemäß den Begriff der *Riemann*schen Fläche folgendermaßen formulieren: *Wir nennen jede Mannigfaltigkeit, speziell jede Mannigfaltigkeit von Raumpunkten, eine zur Funktion $\zeta = f(z)$ gehörige Riemannsche Fläche, wenn den Punkten des analytischen Gebildes (ζ, z) umkehrbar eindeutig und stetig die Punkte der Mannigfaltigkeit G zugeordnet sind.* Die Funktion $f(z)$ heißt dann *Funktion auf der Riemannschen Fläche.* Ist unsere Fläche G eine ebene Fläche, so wird durch die Funktion $\zeta = f(z)$ eine konforme Abbildung von ihr auf einen Bereich über der ζ-Ebene vermittelt, derart, daß geeigneten Stücken von G schlichte Gebiete über der ζ-Ebene entsprechen. Es entsteht nun naturgemäß die Frage, ob und inwiefern es noch einen Sinn hat, bei dem allgemeinen Begriff der *Riemann*schen Fläche davon zu reden, daß die Funktien ζ eine *konforme Abbildung von G auf einen ebenen Bereich* vermittelt.

Diese Fragestellung setzt voraus, daß wir in der Mannigfaltigkeit G eine *Maßbestimmung* gegeben haben, so daß der Begriff des Winkels einen Sinn erhält. Unter Vermeidung unnötiger Allgemeinheit stellen wir uns G als räumliche Fläche vor, deren Punkte durch zwei reelle Koordinaten x, y festgelegt sind und auf der das Linienelement ds durch den Ausdruck

$$ds^2 = e\,dx^2 + 2f\,dx\,dy + g\,dy^2 \tag{1}$$

gegeben ist; hierbei sind e, f, g gegebene Funktionen von x, y, welche stetige partielle Differentialquotienten besitzen mögen. Sobald es uns gelingt, statt x, y solche Koordinaten u, v auf G einzuführen, daß das Linienelement ds^2 die Gestalt annimmt

$$ds^2 = \lambda\,(du^2 + dv^2), \quad (\lambda = \lambda(u, v)), \tag{2}$$

so überzeugt man sich bekanntlich sofort davon, daß die Fläche G auf ein Stück der uv-Ebene konform, d. h. winkeltreu, abgebildet ist,

[1]) Vgl. z. B. *Weyl*, loc. cit., S. 165.

wenn jedem Punkt (u, v) auf G der entsprechende Punkt u, v in der Ebene zugeordnet wird, in der u, v rechtwinkliche Koordinaten sind. Indem wir auf G einen bestimmten Umlaufssinn einführen[1]), können wir es durch geeignete Vorzeichenbestimmung von u oder v stets so einrichten, daß die winkeltreue Abbildung auch den Umlaufssinn erhält. Wir nennen dann den komplexen Ausdruck $u + iv = \zeta$ eine *Funktion auf der Fläche.* Ist $u^* + iv^* = \zeta^*$ eine andere Funktion auf der Fläche, so haben wir offenbar wegen der Konformität der Abbildung der ζ-Ebene auf die ζ^*-Ebene in ζ^* eine analytische Funktion der komplexen Variablen ζ im gewöhnlichen Sinne vor uns.

Zwei beliebige Funktionen auf einer Fläche G sind analytische Funktionen voneinander. Im Spezialfall der ebenen *Riemann*schen Flächen $(e = g = 1,\ f = 0)$ liegt die Sache einfach so, daß z und ζ Funktionen auf der Fläche sind; *unsere allgemeine Auffassung beseitigt die Sonderstellung der unabhängigen Variablen gegenüber der abhängigen in der Funktionentheorie.*

Wie erhält man nun Funktionen auf der Fläche, d. h. konforme Abbildungen auf ebene Bereiche? Zur Beantwortung dieser Frage zerlegen wir die Gleichung (2) in die drei Relationen

$$e = \lambda(u_x^2 + v_x^2) \tag{3}$$

$$f = \lambda(u_x u_y + v_x v_y) \tag{4}$$

$$g = \lambda(u_y^2 + v_y^2), \tag{5}$$

aus denen sofort

$$w = \lambda(u_x v_y - u_y v_x) \tag{6}$$

folgt, wobei

$$w = \sqrt{eg - f^2}, \tag{7}$$

die mit irgendeinem — wir wollen zur Fixierung der Vorstellung annehmen: positiven — Vorzeichen genommene Quadratwurzel ist. Durch Elimination von λ aus (3), (4) mit Hilfe von (5) erhalten wir zwei Gleichungen, die in den Größen u_y, v_y linear sind und, nach ihnen aufgelöst, die Relationen

$$u_y = \frac{f u_x - w v_x}{e}$$

$$v_y = \frac{w u_x + f v_x}{e}$$

ergeben, die wir auch schreiben können

$$u_x = \frac{e v_y - f v_x}{w} \tag{8}$$

$$u_y = \frac{f v_y - g v_x}{w}. \tag{9}$$

[1]) G darf also keine „einseitige" Fläche sein.

Diese Gleichungen sind genau das *Analogon zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen der Funktionentheorie* und gehen in diese für $e = g = 1$, $f = 0$ über. Man schließt aus ihnen sofort, daß u, v Lösungen der partiellen *Differentialgleichung von Beltrami*

$$(10) \qquad \Delta p = \frac{1}{w}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{e\frac{\partial p}{\partial y} - f\frac{\partial p}{\partial x}}{w} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{g\frac{\partial p}{\partial x} - f\frac{\partial p}{\partial y}}{w}\right) = 0$$

sind, welche das *Analogon zur Potentialgleichung* für unsere Fläche darstellt. Mit Rücksicht hierauf nennt man Lösungen dieser Gleichung *Potentiale auf der Fläche.* Zwei Potentiale u, v, welche durch Relationen (8), (9) aneinander gebunden sind, heißen *konjugiert.* Alle unsere früheren Überlegungen und Vorstellungen bezüglich ebener Strömungen finden mit Hilfe der entwickelten Begriffe ihre unmittelbare Übertragung auf unseren jetzigen Bereich G; insbesondere sind zwei konjugierte Potentiale charakteristisch für die Stromlinien und Niveaulinien einer Strömung auf der Fläche. Die *Greensche Formel,* auf der so viele Schlüsse der vorangehenden Kapitel beruhten, *bleibt* ebenfalls *erhalten*; wir müssen nur unter $D[\varphi, \psi]$ das Integral

$$\iint \frac{e\varphi_y\psi_y - f(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + g\varphi_x\psi_x}{w}\,dx\,dy$$

verstehen. Alle diese Tatsachen beweisen sich mühelos, wenn man beachtet, daß die hier gebildeten Ausdrücke gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen invariant sind und daß stets das Linienelement ds^2 von G die Form $\lambda(du^2 + dv^2)$ annehmen muß, wenn wir für u, v zwei konjugierte Potentiale auf der Fläche einführen; wir haben dann in unseren Behauptungen nur einen anderen Ausdruck für wohlbekannte Tatsachen bezüglich des Bildes von G in der uv-Ebene.

Auf Grund dieser Vorstellungen ergibt sich ohne weiteres eine *Ausdehnung der früher entwickelten Abbildungstheoreme für Gebiete G, welche auf beliebigen zweiseitigen krummen Raumflächen ausgebreitet sind,* vorausgesetzt, daß man die Umgebung jedes Punktes von G in der eben geschilderten Art konform auf einen schlichten ebenen Bereich abbilden kann. Dabei darf der Bereich G sogar noch im Raume Singularitäten aufweisen. So z. B. stören *Kanten,* längs deren zwei stetig gekrümmte Flächenstücke aneinanderstoßen, die Möglichkeit der konformen Abbildung keineswegs, da man die Größen e, f, g bei geeigneter Parameterwahl ohne weiteres nebst ihren Ableitungen stetig über die Kanten hinweg definieren kann. Sogar *körperliche Ecken,* in denen drei oder mehr Flächenstücke unter nicht verschwindenden Winkeln aneinanderstoßen, *darf der Bereich G in seinem Inneren enthalten.* Denn wie man sich z. B. nach den Methoden von § 7 sehr leicht überzeugt, kann man die Umgebung der körperlichen Ecke

konform auf einen ebenen Bereich derart abbilden, daß dabei der Ecke ein einzelner Punkt entspricht[1]).

§ 17. Historische und literarische Angaben zum letzten Kapitel.

Die Theorien, denen das vorstehende Kapitel gewidmet ist, hängen alle mehr oder weniger mittelbar mit den grundlegenden Gedanken zusammen, welche *Bernhard Riemann*[2]) (geb. 1826, gest. 1866) in die Funktionentheorie eingeführt hat. Von *Riemann* stammt auch der Ansatz des *Dirichlet*schen Prinzipes zur Führung der Existenzbeweise; indem er jedoch die Lösbarkeit der betreffenden Minimumprobleme als selbstverständlich voraussetzte, ließ er in den Grundlagen seiner Theorie eine Lücke, deren Ausfüllung den Mathematikern zunächst beinahe unmöglich schien. *Weierstraß* war der erste, welcher auf diese Lücke hinwies; er bemerkte, daß es sehr wohl einfach formulierbare Minimumprobleme gibt, für welche keine Lösung existieren kann; (ein einfaches Beispiel ist das Problem, zwei Punkte einer Geraden durch eine möglichst kurze stetige gekrümmte Linie zu verbinden, welche in ihren Endpunkten auf der gegebenen Geraden senkrecht steht). Der Eindruck der *Weierstraß*schen Kritik war so stark, daß man den *Riemann*schen Ausgangspunkt des *Dirichlet*schen Prinzipes ganz verließ und den Beweis der fundamentalen Existenztheoreme auf ganz anderen Wegen suchte, ein Ziel, welches *H. A. Schwarz* und *C. Neumann* tatsächlich erreichten, wenigstens sofern es sich um die Theorie der algebraischen Funktionen und der *Abel*schen Integrale und die konforme Abbildung schlichter einfach zusammenhängender, von einer stückweise glatten Kurve begrenzter Bereiche handelte. Unter wesentlich erweiterten Voraussetzungen gelang der Beweis des Abbildungstheoremes später *Osgood* und anderen[3]).

Neue Schwierigkeiten und Fragen brachte das Problem der Uniformisierung, welches aus Fragen der *Riemann*schen Theorie herauswuchs, jedoch gleichermaßen vom Standpunkt der *Weierstraß*schen Funktionentheorie fundamentales Interesse bietet. Die kühnen Gedankengänge, in denen *H. Poincaré* und *F. Klein* dieses Problem nach den verschiedensten Richtungen hin in den achtziger Jahren des 19. Jahrhunderts durchdrangen, gaben insofern noch keine befriedigende Lösung, als der strenge Beweis für die Möglichkeit der

---

[1]) Vgl. z. B. *Robert König*, Math. Annalen, Bd. 71, S. 184.

[2]) Vor allen Dingen in seiner Inaugural-Dissertation und seinen „*Abel*schen Funktionen".

[3]) Genauere Literaturnachweise findet der Leser in den später zitierten *Koebe*schen Arbeiten.

Uniformisierung in diesen Arbeiten noch nicht erbracht werden konnte. Dies gelang erst viel später, nachdem eine intensive mathematische Entwickelung, vor allem unter dem Einfluß von *F. Klein* und *H. A. Schwarz*, die Gedanken und Methoden der *Riemann*schen Funktionentheorie verbreitet und weiter entwickelt hatte. Auf der Grundlage der *Neumann-Schwarz*schen Methoden aufbauend, gelangten gleichzeitig *Koebe* und *Poincaré* im Jahre 1907 zu einem Beweise des wichtigsten Uniformisierungstheoremes, und von da ab hat hauptsächlich *Koebe* diese Probleme nach allen Richtungen hin in völlig befriedigender Weise behandelt. Die große Reihe der *Koebe*schen Abhandlungen zur geometrischen Funktionentheorie gibt eine allseitige Darstellung der hierhergehörigen Fragen[1]).

Mittlerweile war das verachtete und scheintote *Dirichlet*sche Prinzip durch *Hilbert* wieder zum Leben erweckt worden; *Hilbert* zeigte zwar nur in einigen besonders einfachen Fällen, daß die Kräfte der Analysis ausreichten, um den Weg des *Dirichlet*schen Prinzipes zu Ende zu gehen; aber nach diesem ersten Erfolge setzten Bemühungen vieler Mathematiker ein mit dem Ergebnis, daß nunmehr der Weg des *Dirichlet*schen Prinzipes vielleicht den bequemsten Zugang zu den Gebieten der modernen geometrischen Funktionentheorie darstellt[2]).

[1]) Es kommen hier vor allen Dingen in Betracht Arbeiten über die Uniformisierung der algebraischen Funktionen, Math. Ann., Bd. 67 (1909); Bd. 69 (1910); Bd. 72 (1912); Bd. 75 (1914); Arbeiten über die Uniformisierung beliebiger analytischer Funktionen, Crelles Journ., Bd. 138 und 139; 5 Arbeiten zur Theorie der konformen Abbildung, Crelles Journ., Bd. 145; Acta math., Bd. 40; Crelles Journ., Bd. 147; Acta math., Bd. 41; Math. Zeitschr., Bd. 7. In diesen Arbeiten ist vielfach andere Literatur zitiert.

[2]) Für die vorliegende Darstellung möge der Leser die folgenden Arbeiten des Verfassers vergleichen: Über die Anwendungen des *Dirichlet*schen Prinzipes auf die Probleme der konformen Abbildung, Math. Ann. 71. Über die Existenztheoreme der Potential- und Funktionentheorie Crelles Journal Bd. 144. Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung, Gött. Nachrichten, Jahrgang 1914.

Namen- und Sachverzeichnis.

Die Zahlen geben die Seiten an.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.



